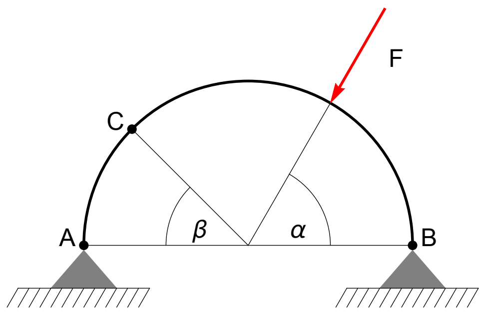
Naloge iz vaj: Sistem togih teles

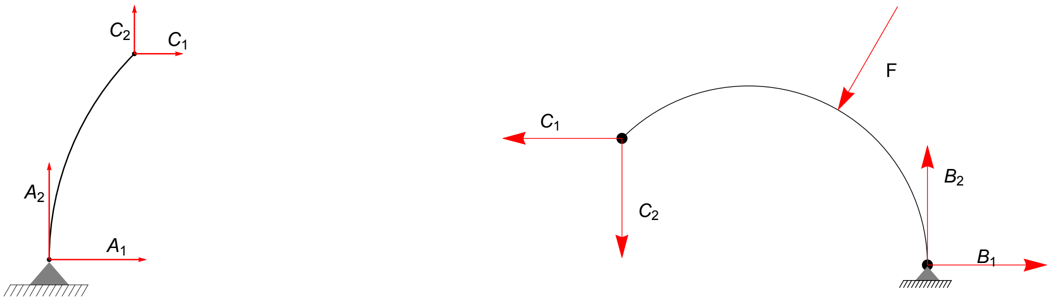
1 Rešene naloge

1. Tročleni lok s polmerom R sestavljen iz lokov AC in CB je obremenjen tako kot kaže skica. Določi sile podpor.

   Rešitev: Lok razdelimo na dva loka, glej skico. Za vsak lok veljajo ravnotežne enačbe. Za levi velja

$$
\begin{aligned}
0 &= A_1 + C_1, \\
0 &= A_2 + C_2, \\
0 &= R(1-\cos\beta)C_2 - R\sin\beta C_1.
\end{aligned}
$$



Slika 1: Sile na levi in desni lok.

Drugi sklop enačb so ravnotežne enačbe za desni lok. Namesto le teh pa raje zapišimo ravnovesne enačbe za celotni tročleni lok, saj če so izpolnjene ravnovesne enačbe za levi lok in celotni tročleni lok, so izpolnjene tudi za desni lok. Ravnovesne enačbe za celotni tročleni lok so namreč nekoliko enostavnejše kot enačbe za desni lok.

$$
\begin{aligned}
0 &= A_1 + B_1 - F\cos\alpha, \\
0 &= A_2 + B_2 - F\sin\alpha, \\
0 &= -RA_2 + RB_2.
\end{aligned}
$$

Tu smo uporabili momentno enačbo s polom v središču loka. Sistem rešimo. Prvo dobimo, da je $A_2 = B_2$ in od tod $A_2 = B_2 = \frac{1}{2}F\sin\alpha$. Nadalje je

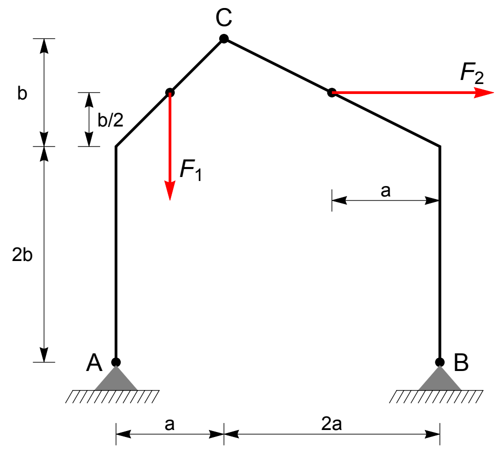
$$C_1 = \frac{1-\cos\beta}{\sin\beta}C_2 = \tan\frac{1}{2}\beta\, C_2 = -\frac{1}{2}\sin\alpha\tan\frac{1}{2}\beta\, F.$$

Tako dobimo še

$$A_1 = -C_1 = \frac{1}{2}\sin\alpha\tan\frac{1}{2}\beta\, F \quad B_1 = F\cos\alpha - A_1 = \left(\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha\tan\frac{1}{2}\beta\right)F.$$

Dobljena formula sil v podporah velja tudi, če je tročleni lok obremenjen v členku. V tem primeru lahko silo obremenitve $\vec{F}$ zapišemo v obliki $\vec{F} = \lambda\vec{F} + (1-\lambda)\vec{F}$ in nato pri razdelitvi tročlenega loka na levi in desni lok upoštevamo, da je levi lok obremenjen v spojnem členku s silo $\lambda\vec{F}$, desni pa z $(1-\lambda)\vec{F}$. Rezultat izračuna sil v podporah je neodvisen od števila λ, sila v spojnem členku pa je, vendar to ni pomembno, saj je v okviru statike pomembno samo to, da je vsota vseh sil na členek enaka nič.

2. Tročleni okvir sestavljen iz levega dela AC in desnega CB je členkasto nepomično podprt v A in B, glej skico. Izračunaj sile v podporah za primer $F_1 = F$, $F_2 = 2F$ in $a = b$.



Rešitev: Izhodišče koordinatnega sistema postavimo v A, osj x v vodoravni smeri, os y pa v navpični smeri. Na okvir deluje sistem sil, sila leve podpore $\vec{A} = A_1\vec{\imath} + A_2\vec{\jmath}$, desne podpore $\vec{B} = B_1\vec{\imath} + B_2\vec{\jmath}$, obremenitev na levi lok $\vec{F_1} = -F\vec{\jmath}$ in desni lok $\vec{F_2} = 2F\vec{\imath}$. Prijemališča sil so točke $A(0,0)$, $B(3a,0)$, $P_1(a, 5a/2)$ in $P_2(2a, 5a/2)$. Tu smo s P_1 in P_2 označili prijemališči sil F_1 in F_2.

Sedaj okvir razstavimo na levi in desni del, ki sta spojena v členku C. Označimo z $\vec{C} = C_1\vec{\imath} + C_2\vec{\jmath}$ silo levega dela na desni del. Ravnovesne enačbe za levi del so tako

$$A_1 + C_1 = 0, \quad A_2 + C_2 - F = 0, \quad -\frac{a}{2}F - 3aC_1 + aC_2 = 0, \tag{1}$$

kjer je zadnja enačba momentna enačba s polom v A. Sedaj zapišimo še ravnovesne enačbe za celotni okvir

$$A_1 + B_1 + 2F = 0, \quad A_2 + B_2 - F = 0, \quad -\frac{a}{2}F - \frac{5a}{2}2F + 3aB_2 = 0. \tag{2}$$

Tudi tokrat smo zapisali momentno enačbo s polom v A. Dobili smo sistem šestih enačb s šestimi neznankami A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 in C_2. Rešimo ga. Iz enačbe (2) dobimo takoj $B_2 = \frac{11}{6}F$ in nato iz (1) $A_2 = -\frac{5}{6}F$. Če odštejemo drugo enačbo (2) od druge enačbe (1) dobimo še $C_2 = B_2$. Potem iz tretje enačbe (2) sledi $C_1 = \frac{4}{9}F$ in nato končno

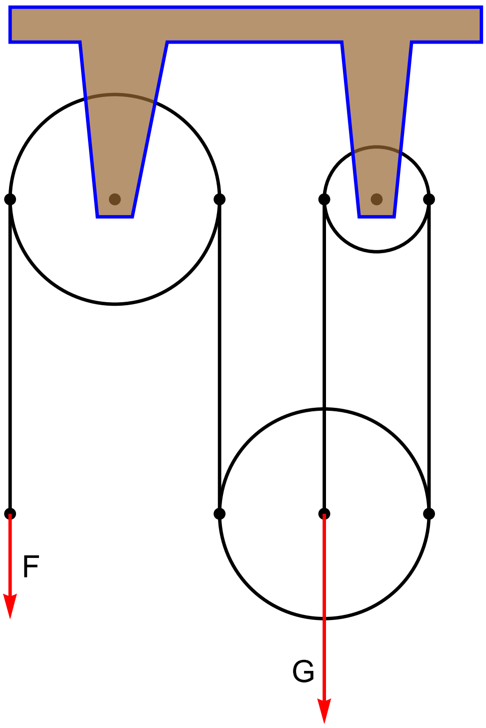
$$A_1 = -C_1 = \frac{4}{9}F \quad \text{in} \quad B_1 = -2F - A_1 = -\frac{14}{9}F.$$

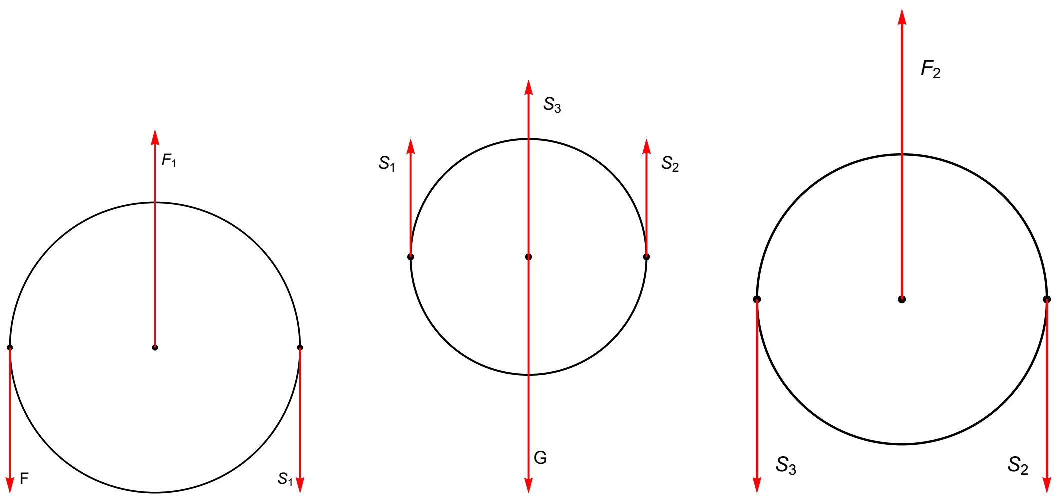
3. Za škripec na skici določi silo F potrebno za enakomerno dvigovanje bremena s težo G. Trenje v ležajih škripca zanemari.

   Rešitev: Škripec je sestavljen iz treh kolutov, ki jih povezujejo vrvi, glej skico razčlenitve na prosta telesa. Polmere kolutov označimo z r_1, r_2 in r_3. Za vsak kolut posebej veljajo ravnotežne enačbe. Ker nas ne zanimajo sile v ležajih, je dovolj za vpeta koluta napisati samo momentno enačbo. Ravnovesne momentne enačbe so tako $r_1 F - r S_1 = 0$ za levi zgornji kolut, $-r_2 S_1 + r_2 S_2 = 0$ za spodnji kolut in $r_3 S_3 - r_3 S_2 = 0$ za desni zgornji kolut. Iz teh enačb sledi $S_1 = S_2 = S_3 = F$. Zapišimo sedaj ravnotežno enačbo za sile za spodnji kolut. Enačba je

   $$S_1 + S_2 + S_3 - G = 0.$$

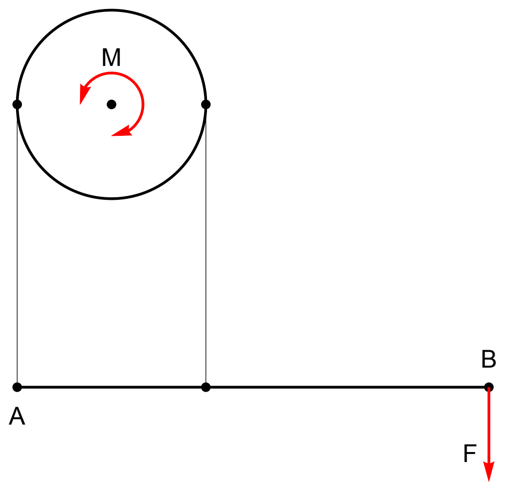
   Od tod sledi $3F = G$. Sila F, ki zagotavlja enakomerno dvigovanje(spuščanje) bremena je tako $G/3$.



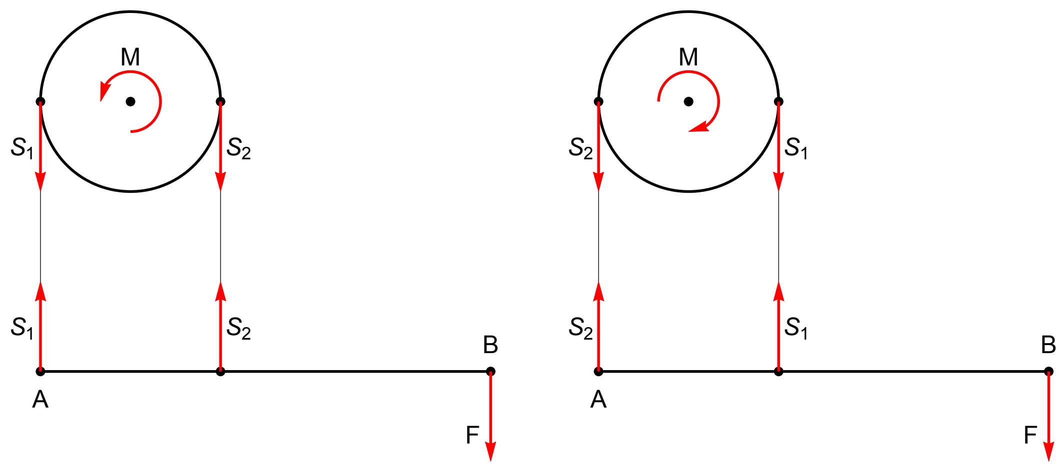


Slika 2: Diagram sil na kolute škripca, levi, spodnji, desni kolut.

4. Za tračno zavoro na skici, z ročico AB dolžine l in polmerom koluta r, določi silo F na ročico, ki bo uravnovesila navor M na kolut. Ločeno obravnavaj primera sournega in protiurnega delovanja navora M.



Rešitev: Tračna zavora je sestavljena iz ročice, koluta in vrvi, ki drsi po kolutu. Sila trenja vrvi na kolutu je $S_2 = S_1\, \mathrm{e}^{k\varphi}$, kjer je k koeficient trenja vrvi na kolutu, φ pa je ovojni kot vrvi na kolutu. Pri tem sila S_2 kaže v smer drsenja vrvi. To pomeni, da moramo ločiti primera sournega in protiurnega vrtenja koluta.



Slika 3: Tračna zavora, protiurna in sourna rotacija koluta.

Poglejmo prvo primer protiurnega vrtenja. Ker ne bomo računali sil na ležaj koluta in ročice, je dovolj, da uporabimo samo momentno enačbo za kolut in ročico. Momentna enačba za kolut je $M + rS_1 - rS_2 = 0$. Od tod, z upoštevanjem sile trenja na kolutu sledi

$$M = rS_1 \left(\mathrm{e}^{k\pi} - 1\right). \tag{1}$$

Momentna enačba za ročico je $-lF + 2rS_2 = 0$. Potem z upoštevanjem zgornje enačbe

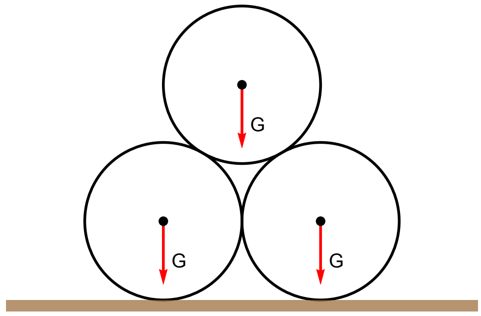
$$F = \frac{2R}{l} S_2 = \frac{2R}{l} S_1\, \mathrm{e}^{k\pi} = \frac{2M\, \mathrm{e}^{k\pi}}{l\left(\mathrm{e}^{k\pi} - 1\right)}.$$

V primeru sournega vrtenja dobimo ponovno (1), za ročico pa $-lF + 2rS_1 = 0$. Potem

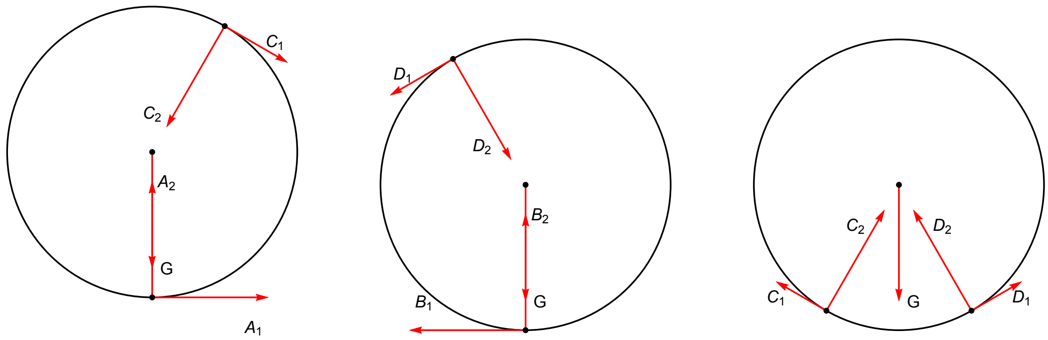
$$F = \frac{2R}{l} S_1 = \frac{2M}{l\left(\mathrm{e}^{k\pi} - 1\right)}.$$

Vidimo, da je v tem primeru sila ročice potrebna za faktor $\mathrm{e}^{k\pi}$ manjša sila.

5. Trije enaki valji so naloženi drug na drugega tako kot kaže skica. Določi koeficient lepenja med valji in valji in tlemi, ki zagotavlja ravnovesje. Kaj se zgodi, če obodna sila na valju preseže maksimalno dopustno vrednost?



Rešitev: Koeficient trenja označimo s k. nalogo bomo rešili na dva načina. Poglejmo prvega. Sistem je sestavljen iz treh valjev. Za vsak valj posebej narišimo diagram sil, glej skico.



Slika 4: Diagram sil na prosta telesa, levi, desni in zgornji valj.

Na levi spodnji valj delujejo sila tal $\vec{A} = A_1\vec{\imath} + A_2\vec{\jmath}$, sila zgornjega valja $\vec{C} = -C_1\vec{e}_\varphi(\pi/3) - C_2\vec{e}_r(\pi/3)$ in sila teže $\vec{G} = -G\vec{\jmath}$. Tu sta $\vec{e}_r(\alpha) = \cos\alpha\vec{\imath} + \sin\alpha\vec{\jmath}$ radialni, $\vec{e}_\varphi(\alpha) = -\sin\alpha\vec{\imath} + \cos\alpha\vec{\jmath}$ pa obodni bazni vektor, ki oklepa kot α s osjo x. Silo $\vec{C}$ smo namenoma zapisali po komponentah v radialni in obodni smeri, da bomo kasneje lažje določili pogoj na koeficient trenja. Sile na desni spodnji valj so sila tal $\vec{B} = B_1\vec{\imath} + B_2\vec{\jmath}$, sila zgornjega valja $\vec{D} = -D_1\vec{e}_r(2\pi/3) + D_2\vec{e}_\varphi(2\pi/3)$ in sila teže $\vec{G}$. Na zgornji valj delujeta sili spodnjih valjev $-\vec{C}$, $-\vec{D}$ in sila teže $\vec{G}$. Ravnovesne enačbe so

$$0 = A_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_1 - \frac{1}{2}C_2, \quad 0 = A_2 - \frac{1}{2}C_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}C_2 - G, \quad 0 = rA_1 - rC_1,$$

za levi valj,

$$0 = -B_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}D_1 + \frac{1}{2}D_2, \quad 0 = B_2 - \frac{1}{2}D_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}D_2 - G, \quad 0 = -rB_1 + rD_1,$$

za desni valj in

$$0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}C_1 + \frac{1}{2}C_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}D_1 - \frac{1}{2}D_2, \quad 0 = \frac{1}{2}C_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_2 + \frac{1}{2}D_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}D_2 - G, \quad 0 = -rC_1 + rD_1$$

za zgornji valj. Imamo sistem devetih enačb z osmimi neznankami. Sistem sil na zgornji valj ima ne glede na velikosti sil vedno skupno prijemališče, zato je momentna enačba odveč. Kljub temu pa jo bomo uporabili, saj je nismo zapisali s polom v prijemaliču sil in zato ni trivialna. V nadaljevanju pa bomo videli, da je ena enačba odveč. Iz momentnih enačb sledi takoj, da je $A_1 = B_1 = C_1 = D_1$. Potem

$$0 = (1 + \frac{\sqrt{3}}{2})A_1 - \frac{1}{2}C_2, \quad 0 = A_2 - \frac{1}{2}A_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}C_2 - G,$$

$$0=-(1+\frac{\sqrt{3}}{2})A_1+\frac{1}{2}D_2,\quad 0=B_2-\frac{1}{2}A_1-\frac{\sqrt{3}}{2}D_2-G,$$
$$0=\frac{1}{2}C_2-\frac{1}{2}D_2,\quad 0=A_1+\frac{\sqrt{3}}{2}C_2+\frac{\sqrt{3}}{2}D_2-G.$$

Vidimo, in to na dva načina, da je $C_2=D_2=(2+\sqrt{3})A_1$. Ostane nam sistem

$$0=-\sqrt{3}A_1+A_2-G,\quad 0=B_2-(2+\sqrt{3})A_1-G,\quad 0=2(2+\sqrt{3})A_1-G.$$

Rešitev je

$$A_1=B_1=C_1=D_1=\frac{G}{2(2+\sqrt{3})},\quad A_2=B_2=\frac{3}{2}G,\quad C_2=D_2=\frac{G}{2}.$$

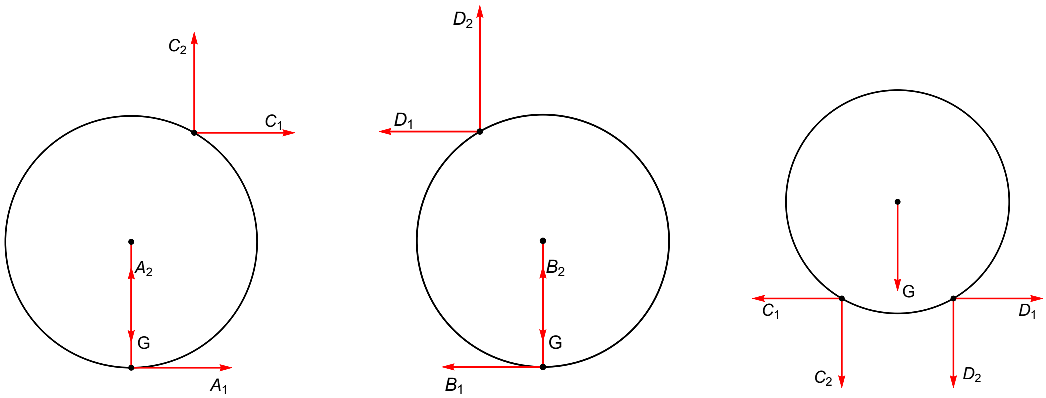
Tvorimo sedaj kvociente

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{2}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\doteq 0.089$$

in

$$\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}\doteq 0.268.$$

Da ne pride do zdrsa mora biti tako med valji koeficient lepenja večji od $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$, med valjem in tlemi pa večji od $\frac{2}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}$. Če pogoja nista izpolnjena, sistem ni v ravnovesju in se prične gibati.



Slika 5: Diagram sil na prosta telesa, levi, desni in zgornji valj.

Sedaj bomo nalogo rešili še na drugi način. Sistem razstavimo na prosta telesa tako kot kaže skica. Opazimo, da smo sedaj sile medsebojnega vpliva med valji razstavili na horinzotalno in vertikalno komponento. Začnimo z zgornjim valjem. Ravnovesne enačbe so

$$C_1-D_1=0,\quad C_2+D_2+G=0,\quad rD_2-rC_2=0.$$

Rešitev je $D_1=C_1$ in $D_2=C_2=-G/2$. Za levi valj se ravnotežne enačbe glasijo

$$A_1+C_1=0,\quad A_2+C_2-G=0,\quad \frac{1}{2}rC_2-r(1+\frac{\sqrt{3}}{2})C_1=0.$$

Tako dobimo

$$A_1=\frac{G}{2(2+\sqrt{3})},\quad A_2=\frac{3G}{2},\quad C_1=\frac{C_2}{2+\sqrt{3}}=-\frac{G}{2(2+\sqrt{3})}.$$

Za A_1 in A_2 smo dobili enak rezultat kot prej. Pogoj, da ne pride do zdrsa zgornjega valja je, da je tangentna komponenta sile $\vec{C}$ po absolutni vrednosti manjša od absolutne vrednosti normalne komponente krat koeficient trenja. Torej

$$(C_1\vec{\imath} + C_2\vec{\ }) \cdot \vec{t} < k(C_1\vec{\imath} + C_2\vec{\jmath}) \cdot \vec{n},$$

kjer je $\vec{t} = \cos\pi/6\vec{\imath} - \sin\pi/6\vec{\jmath}$ enotski tangentni vektor v obodni smeri v točki C, $\vec{n} = -\cos\pi/3\vec{\imath} - \sin\pi/3\vec{\jmath}$ enotski vektor v smeri normale. Izračunamo posebej

$$C_t = (C_1\vec{\imath} + C_2\vec{\jmath}) \cdot \vec{t} = \left(-\frac{G}{2(2+\sqrt{3})}\vec{\imath} - \frac{G}{2}\vec{\jmath}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\imath} - \frac{1}{2}\vec{\jmath}\right) = \frac{G}{2(2+\sqrt{3})}$$

in

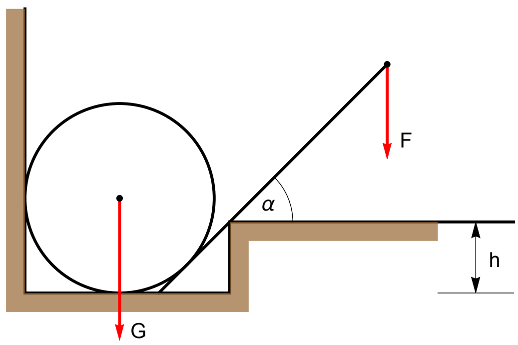
$$C_n = (C_1\vec{\imath} + C_2\vec{\jmath}) \cdot \vec{t} = \left(-\frac{G}{2(2+\sqrt{3})}\vec{\imath} - \frac{G}{2}\vec{\jmath}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\vec{\imath} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}\right) = -\frac{G}{2}.$$

Tako dobimo

$$\frac{C_t}{C_n} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} < k$$

kar se seveda ujema s pogojem, ki smo ga dobili pri reševanju naloge na prvi način.

6. V kanalu z višino h leži krogla s polmerom r, ki jo poskušamo dvigniti z vzvodom dolžine l, glej skico. Določi silo F, ki dvigne kroglo. Vzvod modeliraj kot tanko gladko palico. Dobljeni rezultat poenostavi za primer $r = h$ in $\alpha = \pi/4$.



Rešitev: Imamo sistem dveh togih teles, krogla in palica. Vsako telo posebej obravnavamo kot togo telo v statičnem ravnovesju. Na kroglo deluje sila stene $\vec{A}$ v vodoravni smeri, sila tal $\vec{B}$, sila palice $\vec{C}$ in sila teže $\vec{G}$, glej skico. Če postavimo koordinatni sistem z osjo x v vodoravni smeri in osjo y navpično navzgor je vektorski zapis sil $\vec{A} = A\vec{\imath}$, $\vec{B} = B\vec{\jmath}$, $\vec{C} = C(-\cos(\pi/2-\alpha)\vec{\imath} + \sin(\pi/2-\alpha)\vec{\jmath}) = C(-\sin\alpha\,\vec{\imath} + \cos\alpha\,\vec{\jmath})$ in $\vec{G} = -G\vec{\jmath}$. Sistem sil na kroglo ima skupno prijemališče v središcu krogle. Ravnovesni enačbi sta tako

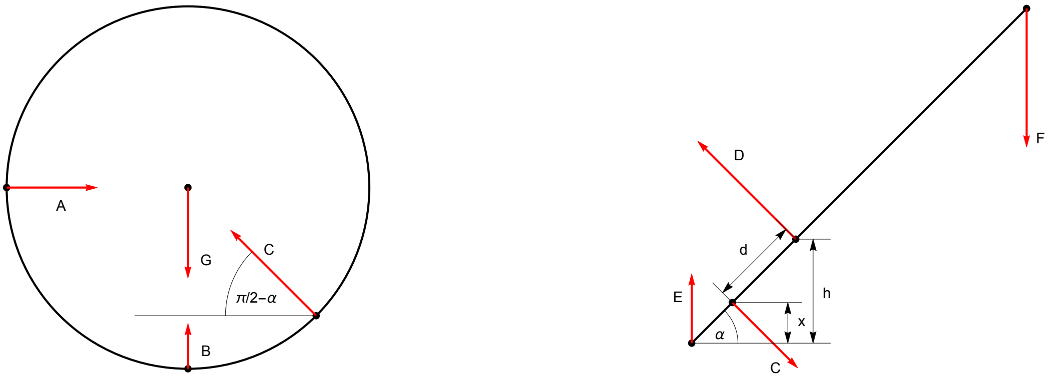
$$A - \sin\alpha C = 0, \qquad B + \cos\alpha C - G = 0.$$

Poglejmo sedaj vzvod. Ker s silo $\vec{F}$ potiskamo navzdol, deluje na vzvod sila tal $\vec{E}$. Delujeta še sili robnika kanala $\vec{D}$ in sila krogle na palico $-\vec{C}$. Iz diagrama sil takoj vidimo, da je $E = F$ in $C = D$. Iz ravnovesja momentov sledi, da je dvojica sil $\{\vec{E}, \vec{F}\}$ nasprotno enaka $\{\vec{C}, \vec{D}\}$. Od tod sledi

$$l\cos\alpha F = dD,$$

kjer je d razdalja med prijemališčema sil $\vec{C}$ in $\vec{D}$. Iz slike vidimo, da je $\sin\alpha = (h-x)/d$ in $x = r(1-\cos\alpha)$. Tako dobimo

$$d = \frac{h - r(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha}$$



Slika 6: Diagram sil na prosti telesi.

in

$$D = \frac{l}{d}\cos\alpha F = \frac{l\sin\alpha\cos\alpha}{h - r(1-\cos\alpha)}F.$$

Potem je

$$B = G - \cos\alpha C = G - \cos\alpha D = G - \frac{l\sin\alpha\cos^2\alpha}{h - r(1-\cos\alpha)}F.$$

V trenutku dviga je sila tal $\vec{B}$ na kroglo enaka nič. Sila na vzvod, ki dvigne palico je tako enaka

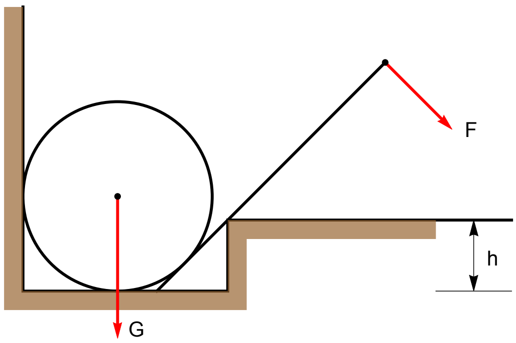
$$F = \frac{h - r(1-\cos\alpha)}{l\sin\alpha\cos^2\alpha}G.$$

Za $r = h$ potem sledi

$$F = \frac{2r}{l\sin 2\alpha}G$$

in za $\alpha = \pi/4$ je $F = \frac{2r}{l}G$.

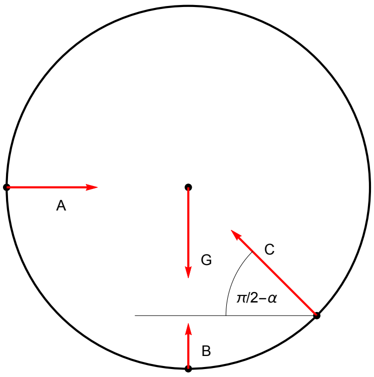
7. Podobno kot v predhodni nalogi tudi sedaj dvigujemo kroglo iz kanala, z razliko, da je tokrat sila $\vec{F}$ pravokotna na vzvod, glej skico. Določi silo F, ki dvigne kroglo. Dobljeni rezultat poenostavi za primer $r = h$ in $\alpha = \pi/4$.

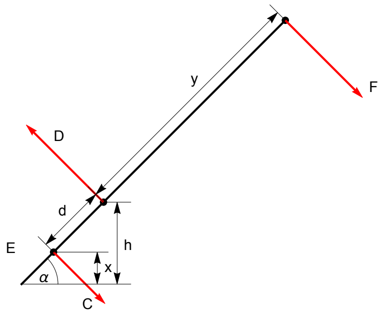


Rešitev: Sistem sil na kroglo je enak kot v predhodni nalogi, sistem sil na drog pa se razlikuje, saj tokrat vzvoda ne potiskamo navzdol in tako ne deluje sila tal na drog, glej skico. Ravnovesni enačbi sta $D - F - C = 0$ in $dC - yF = 0$, kjer je y razdalja med prijemališčema sil $\vec{D}$ in $\vec{F}$. Tako dobimo $C = \frac{y}{d}F$. S pomočjo skice vidimo, da je $y = l - h/\sin\alpha$.

Potem je z upoštevanjem ravnovesnih enačb za kroglo in znanih izrazov za d in y sledi

$$B = G - \cos\alpha C = G - \cos\alpha\frac{y}{d}F = G - \cos\alpha\frac{l\sin\alpha - h}{h - r(1-\cos\alpha)}F.$$





Slika 7: Diagram sil na prosti telesi.

V trenutku dviga je sila tal $\vec{B}$ na kroglo enaka nič. Sila na vzvod, ki dvigne palico je tako enaka

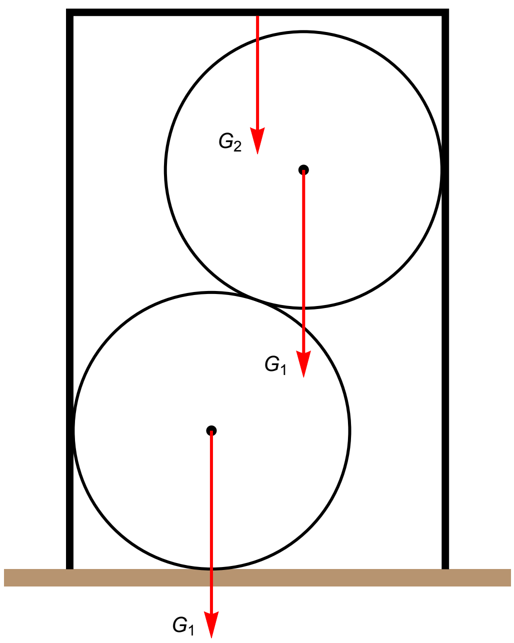
$$F = \frac{h - r(1 - \cos\alpha)}{(l\sin\alpha - h)\cos\alpha} G.$$

Za $r = h$ potem sledi

$$F = \frac{r}{l\sin\alpha - r} G$$

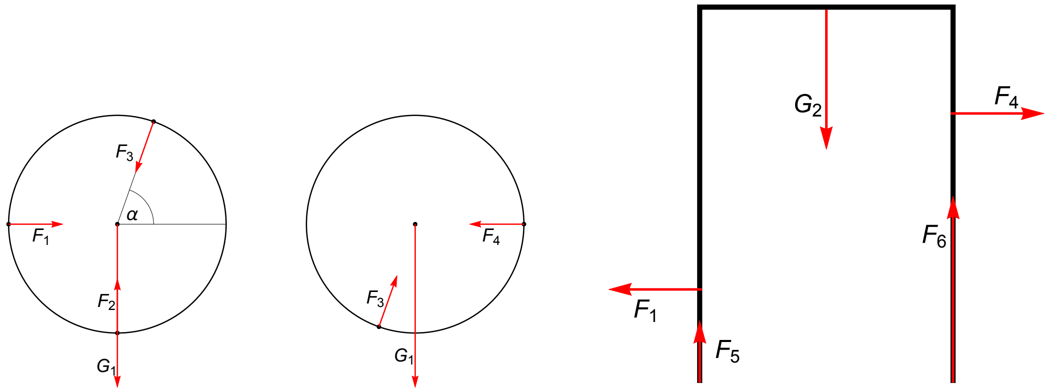
in za $\alpha = \pi/4$ je $F = \frac{r}{l/\sqrt{2} - r} G$. Če primerjamo rešitvi, vidimo, da je za visok robnik primernejši prvi način dviga, za nizek pa drugi.

8. Dve enaki krogli s polmerom r in težo G_1 pokrijemo z valjem s polmerom $R (r < R < 2r)$ in težo G_2, glej skico. Določi težo valja, da se valj ne prevrne.



Rešitev: Sistem je sestavljen iz treh togih teles, dveh krogel in valja. Narišimo digram sil prostih teles, glej skico. Na spodnjo kroglo delujejo sila leve stene $\vec{F}_1$, sila tal $\vec{F}_2$, sila teže $\vec{G}_1$ in sila zgornje krogle $\vec{F}_3$. Na zgornjo kroglo delujejo sila spodnje krogle $-\vec{F}_3$, sila desne stene $\vec{F}_4$ in sila teže $\vec{G}_1$. Na valjasto posodo pa sili tal $\vec{F}_5$ in $\vec{F}_6$, sili krogel $-\vec{F}_1$ in $-\vec{F}_4$ in sila teže $\vec{G}_2$. Za vektorski zapis sile postavimo koordinatni sistem z osjo x v vodoravni smeri in osjo y v navpični smeri. Kot ki ga oklepa os x z zveznico med središčema krogel označimo z α. Vektorski zapis sil je potem

$$\vec{F}_1 = F_1\vec{\imath}, \quad \vec{F}_2 = F_2\vec{\jmath}, \quad \vec{F}_3 = -F_3(\cos\alpha\vec{\imath} + \sin\alpha\vec{\jmath}), \quad \vec{F}_4 = -F_4\vec{\imath}, \quad \vec{F}_5 = F_5\vec{\jmath}, \quad \vec{F}_6 = F_6\vec{\jmath}.$$



Slika 8: Diagram sil na prosta telesa.

Na krogli deluje sistem sil s skupnim prijemališčem, zato je ravnovesna momentna enačba trivialno izpolnjena. Ravnovesna pogoja sta tako $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{G}_1 = \vec{0}$ za prvo kroglo in $-\vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \vec{G}_1 = \vec{0}$ za drugo. Komponentni zapis je

$$F_1 - F_3 \cos\alpha = 0 \quad F_2 - F_3 \sin\alpha - G_1 = 0, \quad F_3 \cos\alpha - F_4 = 0, \quad F_3 \sin\alpha - G_1 = 0.$$

Sistem ima štiri neznanke in štiri enačbe. Rešitev je

$$F_1 = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} G_1, \quad F_2 = 2G_1, \quad F_3 = \frac{1}{\sin\alpha} G_1, \quad F_4 = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} G_1.$$

Pri ravnovesju valja moramo upoštevati tudi momentno enačbo. Za pol si izberimo točko na tleh, ki leži na simetrali valja. Tako za izračun navora potrebujemo y koordinati y_1 in y_4 prijemališč sil $-\vec{F}_1$ in $-\vec{F}_4$ na valj. Očitno je $y_1 = r$, za y_4 pa iz definicije kota α vidimo, da je $y_4 = r(1 + 2\cos\alpha)$. Ravnovesne enačbe za valj se tako v komponentnem zapisu glasijo

$$F_5 + F_6 - G_2 = 0, \quad -F_1 + F_4 = 0, \quad -RF_5 + RF_6 + rF_1 - r(1 + 2\sin\alpha)F_4 = 0.$$

Druga enačba je že izpolnjena. Iz prve enačbe dobimo $F_6 = G_2 - F_5$ in to vstavimo v tretjo in upoštevajmo že izračunane vrednosti za F_1 in F_4. Potem

$$0 = R(G_2 - 2F_5) - 2rG_1 \cos\alpha.$$

in od tod

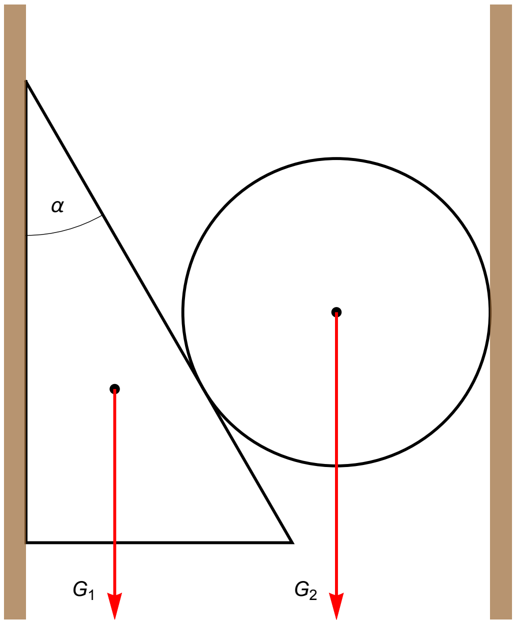
$$F_5 = \frac{1}{2} G_2 - \frac{r}{R} G_1 \cos\alpha.$$

Določimo sedaj kot α. Iz slike vidimo, da je $2R = r + 2r\cos\alpha + r$. Torej $\cos\alpha = (R - r)/r$. Vstavimo to v izraz za F_5 in dobimo

$$F_5 = \frac{1}{2} G_2 - G_1(1 - r/R).$$

Valj se ne prevrne, če je $F_5 \geq 0$. Pogoj, da se valj ne preverne je tako $G_2 \geq 2(1 - r/R)G_1$.

9. Med dvema vzporednima stenama sta zagozdena zagozda in valj, glej skico. Naklonski kot zagozde je α, polmer valja je r, teža zagozde G_1, valja pa G_2. Med zagozdo in valjem ni trenja, koeficient lepenja med steno in zagozdo oziroma valjem pa je k. Določi najmanjšo težo valja, ki drži zaporo.



Rešitev: Sistem je sestavljen iz dveh togih teles, zagozde in valja. Narišimo digram sil prostih teles, glej skico. Na zagozdo deluje sila stene $\vec{A} = A_1\vec{\imath} + A_2\vec{\jmath}$, sila teže $\vec{G}_1$ in sila valja na zagozdo $\vec{B} = -B(\cos\alpha\vec{\imath} + \sin\alpha\vec{\jmath})$. Tu smo kot običajmo postavili koordinatni sistem z osjo x v vodoravni smeri in y v navpični. Prijemališče sile stene določa momentni ravnovesni pogoj. Ker za našo nalogo to ni pomembno, ga ne bomo določili in tako tudi ne bomo uporabili momentno enačbo.

Ravnovesni enačbi za zagozdo sta

$$A_1 - B\cos\alpha = 0, \qquad A_2 - G_1 - B\sin\alpha = 0.$$

Poglejmo sedaj kroglo na katero delujejo sile $-\vec{B} = B(\cos\alpha\vec{\imath} + \sin\alpha\vec{\jmath})$,$\vec{G}_2$ in $\vec{C} = C_1\vec{\imath} + C_2\vec{\jmath}$. Ravnovesne enačbe so

$$-C1 + B\cos\alpha = 0, \quad C_2 + B\sin\alpha - G_2 = 0, \quad rC_2 = 0.$$

Od tod sledi

$$C_2 = 0, \quad B = \frac{1}{\sin\alpha}G_2, \quad C_1 = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}G_2.$$

Iz ravnovesnih enačb za zagozdo potem sledi

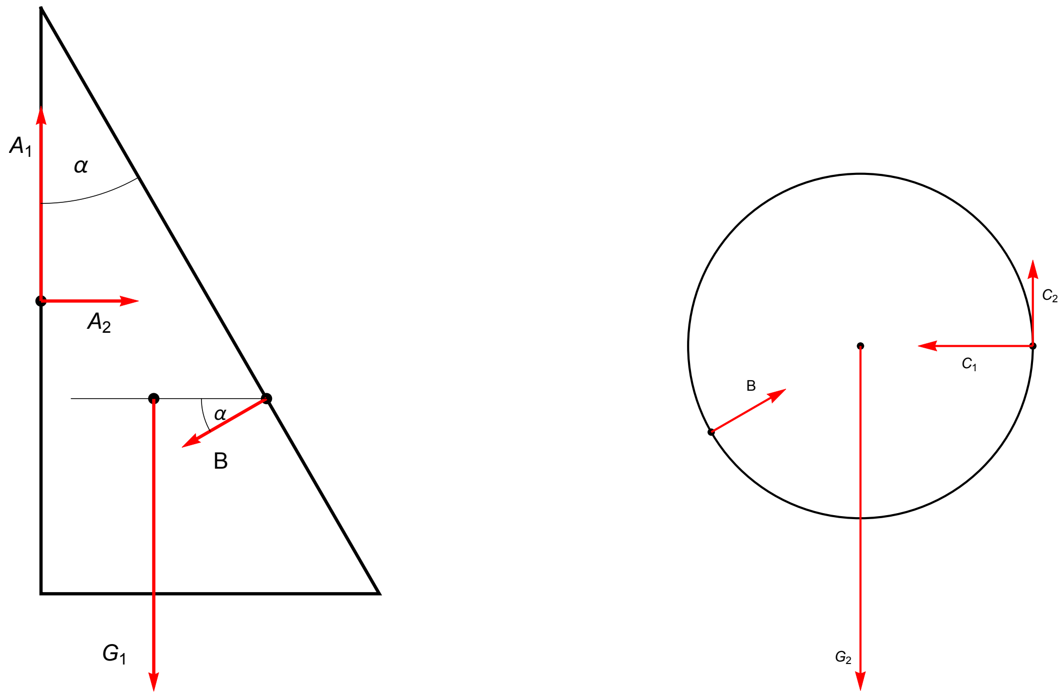
$$A_1 = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}G_2, \quad A_2 = G_1 + B\sin\alpha = G_1 + G_2.$$

Pogoj, da klada ne zdrsne je $A_2 < kA_1$. Vstavimo izračunane vrednosti. Potem

$$G_1 + G_2 < k\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}G_2.$$

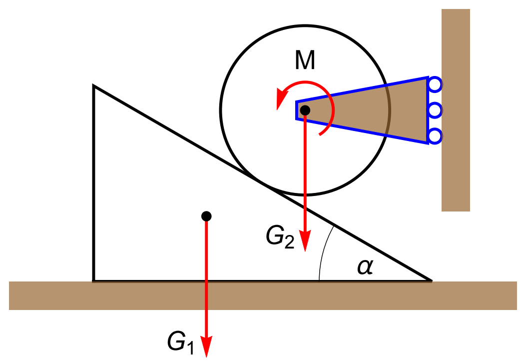
Od tod dobimo pogoj

$$\frac{\sin\alpha G_1}{k\cos\alpha - \sin\alpha} < G_2.$$



Slika 9: Diagram sil na prosta telesa.

10. Valj s polmerom r in težo G_2, ki je vertikalno prosto gibljiv, drsi po podstavljeni zagozdi s težo G_1, glej skico. Vrtenje valja poganja navor M. Koeficient trenja med tlemi in zagozdo je k_1, med zagozdo in valjem pa k_2. Določi navor M in zvezo med koeficientoma, da bo vrtenje valja enakomerno pomikalo zagozdo proti desni.



Rešitev: Sistem je sestavljen iz dveh togih teles, zagozde in valja. Narišimo digram sil prostih teles, glej skico.

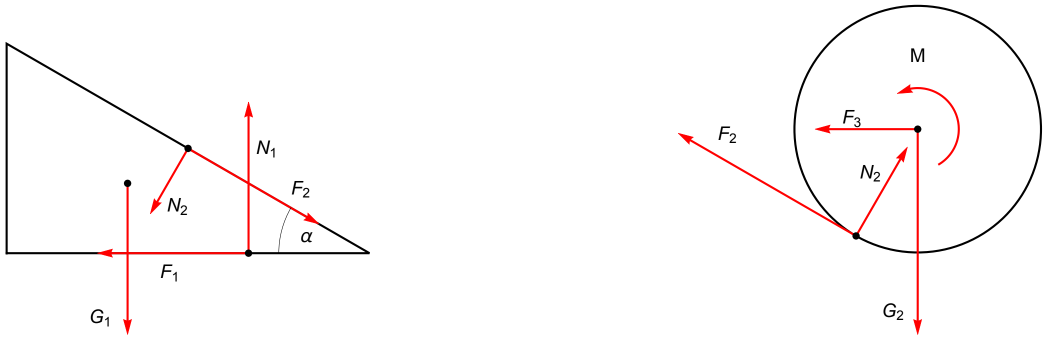
Na zagozdo deluje sila teže $\vec{G}_1 = -G_1\vec{\jmath}$, sila tal $F_1\vec{\imath} + N_1\vec{\jmath}$ in sila valja $F_2\vec{e}_1 + N_2\vec{e}_2$, kjer je $vece_1$ v smeri strmine zagozde, torej $\vec{e}_1 = \cos\alpha\vec{\imath} - \sin\alpha\vec{\jmath}$, $\vec{e}_2$ pa je pravokoten na strmino, $\vec{e}_2 = -\sin\alpha\vec{\imath} - \cos\alpha\vec{\jmath}$. Na valj delujejo sila teže $\vec{G}_2 = -G_2\vec{\jmath}$, sila zagozde na valj $-F_2\vec{e}_1 - N_2\vec{e}_2$ in sila ležaja $-F_3\vec{\imath}$.

Ravnovesni enačbi za zagozdo sta

$$F_2\cos\alpha - F_1 - N_2\sin\alpha = 0, \quad -F_2\sin\alpha - G_1 - N_2\cos\alpha + N_1 = 0. \tag{1}$$

Tu smo upoštevali samo ravnovesje sil, saj prijemališča sile podlage ne poznamo. Ravnovesne enačbe za valj pa so

$$-F_2\cos\alpha - F_3 + N_2\sin\alpha = 0, \quad F_2\sin\alpha - G_2 + N_2\cos\alpha = 0, \quad M - F_2 r = 0. \tag{2}$$



Slika 10: Diagram sil na prosti telesi, zagozda in valj.

Pri drsenju zagozde in valja velja $F_1 = k_1 N_1$ in $F_2 = k_2 N_2$. Vstavimo to v prvi dve enačbi (1). Tako dobimo dve enačbe za neznanki N_1 in N_2. Rešitev je

$$N_1 = \frac{G_1 (\sin\alpha - k_2 \cos\alpha)}{\sin\alpha + k_1 k_2 \sin\alpha + (k_1 - k_2)\cos\alpha}, \tag{3}$$

$$N_2 = -\frac{G_1 k_1}{\sin\alpha + k_1 k_2 \sin\alpha + (k_1 - k_2)\cos\alpha}. \tag{4}$$

Drugo enačbo v (2) preoblikujemo v

$$N_2(\cos\alpha + k_2 \sin\alpha) = G_2.$$

Upoštevajmo sedaj izraz za N_2. Tako dobimo enačbo, ki povezuje koeficienta trenja k_1 in k_2. Če jo rešimo na k_2, dobimo

$$k_2 = \frac{\tan\alpha + (1 + G_1/G_2)\, k_1}{1 - (1 + G_1/G_2)\, k_1 \tan\alpha}.$$

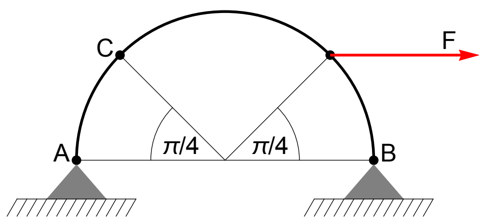
Za konec izračunajmo še navor M. Iz tretje enačbe (2) sledi

$$M = rF_2 = rk_2 N_2 = r\left(G_2 \sin\alpha + (G_1 + G_2)\, k_1 \cos\alpha\right).$$

2 Dodatne naloge

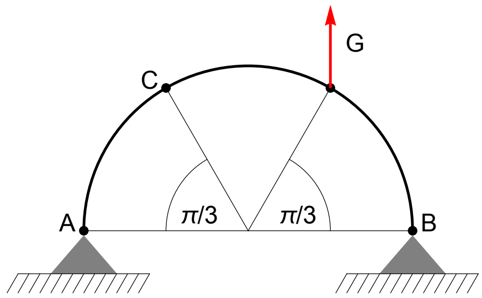
1. Tročleni lok s polmerom R sestavljen iz lokov AC in CB je obremenjen tako kot kaže skica. Določi sile podpor.

   Rešitev: $A_1 = \frac{1}{4}(-2 + \sqrt{2})F$, $A_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}F$, $B_1 = -\frac{1}{4}(2 + \sqrt{2})F$, $B_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}F$.



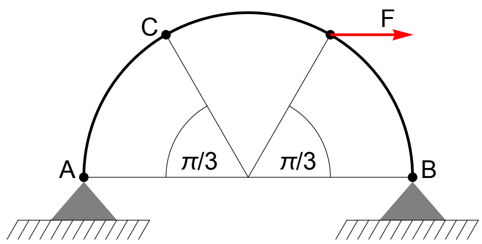
2. Tročleni lok s polmerom R sestavljen iz lokov AC in CB je obremenjen tako kot kaže skica. Določi sile podpor.

   Rešitev: $A_1 = -\frac{1}{4\sqrt{3}}G$, $A_2 = -\frac{1}{4}G$, $B_1 = \frac{1}{4\sqrt{3}}G$, $B_2 = -\frac{3}{4}G$.



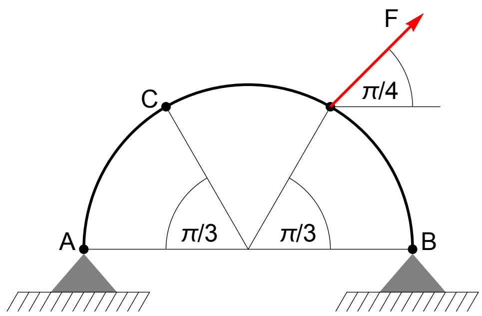
3. Tročleni lok s polmerom R sestavljen iz lokov AC in CB je obremenjen tako kot kaže skica. Določi sile podpor.

   Rešitev: $A_1 = -\frac{1}{4}F$, $A_2 = -\frac{\sqrt{3}}{4}F$, $B_1 = -\frac{3}{4}F$, $B_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}F$.



4. Tročleni lok s polmerom R sestavljen iz lokov AC in CB je obremenjen tako kot kaže skica. Določi sile podpor in pokaži, da lahko nalogo rešiš tudi s kombinacijo rešitev prdhodnih nalog.

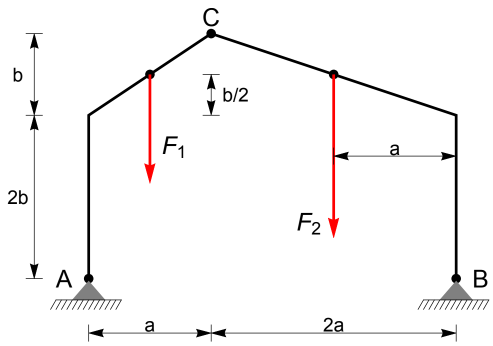
   Rešitev: $A_1 = -\frac{(3+\sqrt{3})F}{12\sqrt{2}}$, $A_2 = -\frac{1}{4}\sqrt{2+\sqrt{3}}F$, $B_1 = \frac{(-9+\sqrt{3})F}{12\sqrt{2}}$, $B_2 = \frac{(-3+\sqrt{3})F}{4\sqrt{2}}$.



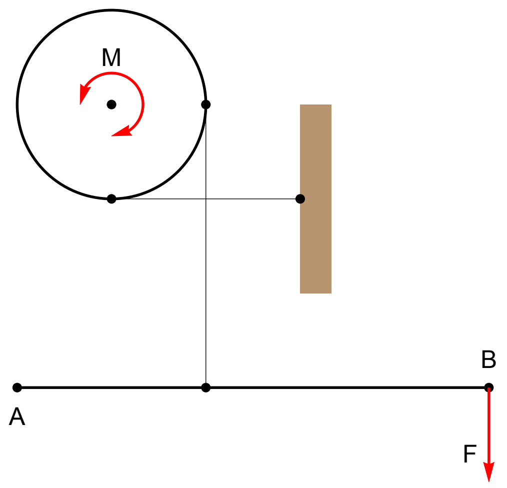
5. Tročleni okvir sestavljen iz levega dela AC in desnega CB je členkasto nepomično podprt v A in B, glej skico. Izračunaj sile v podporah za primer $F_1 = F$, $F_2 = 2F$.

   Rešitev:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \frac{aF}{3b}, \quad A_2 = \frac{3F}{2}, \\
B_1 &= -\frac{aF}{3b}, \quad B_2 = \frac{3F}{2}A_1.
\end{aligned}
$$



6. Za tračno zavoro na skici, z ročico AB dolžine l in polmerom koluta r, določi silo F na ročico, ki bo uravnovesila navor M na kolut. Ločeno obravnavaj primera sournega in protiurnega delovanja navora M.



Rešitev: Protiurno vrtenje

$$F = \frac{2M\,\mathrm{e}^{3k\pi/2}}{l\left(\mathrm{e}^{3k\pi/2} - 1\right)},$$

sourno

$$F = \frac{2M}{l\left(\mathrm{e}^{3k\pi/2} - 1\right)}.$$

7. Tri enake krogle s polmerom r in težo G_1 pokrijemo z valjem s polmerom $R (r < R < 2r)$ in težo G_2, glej skico za primer dveh krogel. Določi težo valja, da se valj ne prevrne.

Rešitev: Velja enak pogoj kot za dve krogli.