# Poglavje 8

# Termoelastičnost

## 8.1 Osna termoelastičnost

### 8.1.1 Rešene naloge

1. Dana je kompozitna palica s konstantnim presekom $A = 1\,\mathrm{cm}^2$. Dolžina levega dela palice je $1.0\,\mathrm{m}$, desnega $0.5\,\mathrm{m}$. Levi del palice ima Youngov modul $E_1 = 70\,\mathrm{GPa}$, desni $E_2 = 120\,\mathrm{GPa}$, koeficient termalnega raztezka levega je $\alpha_1 = 23 \times 10^{-6}\,\mathrm{m/°C}$, desnega pa $\alpha_2 = 17 \times 10^{-6}\,\mathrm{m/°C}$.

   (a) Palico segrejemo za $10\,°\mathrm{C}$. Izračunaj njen raztezek.

   (b) Nato palico tlačno obremenimo v osni smeri. Kakšna naj bo sila, da se bo palica skrčila na prvotno dolžino?

   **Rešitev:**

   (a) Raztezek palice je dan s formulo $\Delta l = \alpha l \Delta T$. Potem

   $$\Delta l_1 = \alpha_1 l_1 \Delta T = 0.23\,\mathrm{mm} \qquad \text{in} \qquad \Delta l_2 = \alpha_2 l_2 \Delta T = 0.085\,\mathrm{mm}.$$

   Palica se podaljša za $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = 0.315\,\mathrm{mm}$.

   (b) Pri dani deformaciji je osna napetost dana s formulo $\sigma = E\frac{\Delta l}{l}$. Potem $\Delta l_1 = \sigma \frac{l_1}{E_1}$ in $\Delta l_2 = \sigma \frac{l_2}{E_2}$. Od tod

   $$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \sigma \left( \frac{l_1}{E_1} + \frac{l_2}{E_2} \right) \Longrightarrow \sigma = \frac{\Delta l}{l_1/E_1 + l_2/E_2}.$$

   Vstavimo vrednosti in dobimo

   $$\sigma = -\frac{315 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}}{1.845 \times 10^{-11}\,\mathrm{mPa}^{-1}} = -17.1\,\mathrm{MPa}.$$

   Sila je enaka

   $$F = A\sigma = -10^{-4}\,\mathrm{m}^2 \times 17.1 \times 10^6\,\mathrm{Pa} = -1.7\,\mathrm{kN}.$$

## 8.2 Prostorska termoelastičnost

### 8.2.1 Rešene naloge

1. V togi matriki krogelni elastičen vključek segrejemo za $\Delta T$. Določi napetost.

   **Rešitev:** Celotna deformacija $\underline{\underline{\epsilon}}$ je vsota elastične $\underline{\underline{\epsilon}}^{\mathrm{e}}$ in termalne $\underline{\underline{\epsilon}}^{\mathrm{t}}$ deformacije. Ker je vključek v togi matriki, je celotna deformacija enaka nič. Velja torej

   $$\underline{\underline{\epsilon}}^{\mathrm{e}} = -\underline{\underline{\epsilon}}^{\mathrm{t}} = -\alpha \Delta T \underline{\underline{I}}.$$

   Po Hookovem zakonu za izotropičen material je potemtakem napetostno stanje hidrostatično, $\underline{\underline{t}} = -p\underline{\underline{I}}$. Potem

   $$\underline{\underline{\epsilon}}^{\mathrm{e}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{t}} - \frac{\nu}{E}\,\mathrm{sl}(\underline{\underline{t}})\underline{\underline{I}} = -\frac{1-2\nu}{E} p\underline{\underline{I}}.$$

   Iz dobljenih enačb potem sledi

   $$\alpha \Delta T = \frac{1-2\nu}{E} p$$

   in

   $$p = \frac{E}{1-2\nu}\alpha\Delta T = 3\kappa\alpha\Delta T,$$

   kjer je $\kappa$ kompresibilni modul.

2. V togo kotanjo v obliki kvadra s kvadratno osnovno ploskvijo dimenzije $a \times a$ in dano višino $h$ vložimo elastični kvader enakih dimenzij. Kvader segrejemo za $\Delta T$.

   (a) Določi napetostno stanje.

   (b) Za koliko zgornja ploskev pogleda iz kotanje?

   (c) Kocko želimo potisniti nazaj v kotanjo. Določi silo.

   **Rešitev:**

   (a) Postavimo koordinatni sistem z osmi v smereh kvadra, os $z$ pa naj bo v smeri stranice z dolžino $h$. Celotna deformacija je vsota elastične in termalne,

   $$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}}^{\mathrm{e}} + \alpha\Delta T.$$

   Ker je kotanja toga, je $0 = \epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{23} = \epsilon_{13} = \epsilon_{12}$ in ker je zgoraj odprta $0 = t_{33}$. Potem z uporabo Hookovega zakona sledi

   $$\begin{aligned}
   0 = \epsilon_{11} &= \alpha\Delta T + \frac{1}{E}t_{11} - \frac{\nu}{E}t_{22},\\
   0 = \epsilon_{22} &= \alpha\Delta T - \frac{\nu}{E}t_{11} + \frac{1}{E}t_{22},\\
   \epsilon_{33} &= \alpha\Delta T - \frac{\nu}{E}t_{11} - \frac{\nu}{E}t_{22},\\
   0 = \epsilon_{23} &= \frac{1}{2G}t_{23}, \quad 0 = \epsilon_{13} = \frac{1}{2G}t_{13}, \quad 0 = \epsilon_{12} = \frac{1}{2G}t_{12}.
   \end{aligned}$$

   Sistem zgornjih treh enačb rešimo na $t_{11}$, $t_{22}$ in $\epsilon_{33}$. Rešitev je

   $$t_{11} = t_{22} = -\frac{\alpha\Delta T E}{1-\nu}$$

   in

   $$\epsilon_{33} = \frac{\alpha\Delta T(\nu+1)}{1-\nu}.$$

(b) Zgornja ploskev pogleda iz kotanje za

$$\Delta h = \epsilon_{33} h = \frac{\alpha h \Delta T(\nu + 1)}{1 - \nu}.$$

(c) Sedaj želimo kocko potisniti nazaj v kotanjo. Vemo, da se je v smeri osi $z$ deformirala za $\epsilon = \Delta h/h$. Potisna sila $F = \sigma a^2 = E a^2 \Delta h/h$ kocko, ki je ob strani prosta, skrči za predpisan $\Delta h$. Vendar je kocka v kotanji, njene stranske ploskve niso proste, zato tako dobljena sila

$$F' = \frac{\alpha E a^2 \Delta T(\nu + 1)}{1 - \nu}$$

ni prava. Pravo silo dobimo z naslednjim razmislekom. Privzemimo, da kotanjo pred termalnim razteskom pokrijemo s pokrovom in na pokrov delujemo s silo, ki prepreči, da kocka po segretju pogleda iz kotanje. Ta sila je dejansko tista sila s katero kocko stisnemo nazaj v kotanjo. Naj bo torej kotanja zaprta. Potem je

$$\underline{\underline{0}} = \underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}}^{\mathrm{e}} + \alpha \Delta T.$$

oziroma

$$\begin{aligned}
0 = \epsilon_{11} &= \alpha \Delta T + \frac{1}{E} t_{11} - \frac{\nu}{E} t_{22} - \frac{\nu}{E} t_{33}, \\
0 = \epsilon_{22} &= \alpha \Delta T - \frac{\nu}{E} t_{11} + \frac{1}{E} t_{22} - \frac{\nu}{E} t_{33}, \\
0 = \epsilon_{33} &= \alpha \Delta T - \frac{\nu}{E} t_{11} - \frac{\nu}{E} t_{22} - \frac{1}{E} t_{33}, \\
0 = \epsilon_{23} &= \frac{1}{2G} t_{23}, \quad 0 = \epsilon_{13} = \frac{1}{2G} t_{13}, \quad 0 = \epsilon_{12} = \frac{1}{2G} t_{12}.
\end{aligned}$$

Sistem rešimo in dobimo

$$t_{11} = t_{22} = t_{33} = -\frac{\alpha \Delta T E}{1 - 2\nu}.$$

Sila s katero kocko nazaj potisnemo v kotanjo je tako enaka

$$F = \frac{\alpha E a^2 \Delta T}{1 - 2\nu}.$$

Vidimo, da je ta sila večja kot $F'$, saj je

$$F - F' = \alpha E a^2 \Delta T \frac{2\nu^2}{(1 - \nu)(1 - 2\nu)}.$$

3. V togo kotanjo v obliki kvadra s kvadratno osnovno ploskvijo dimenzije $a \times a$ in dano višino $h$ vložimo elastični kvader enakih dimenzij.

   (a) Kvader potisnemo s silo $F$. Določi napetostno stanje in izračunaj za koliko se zgornja ploskev pogrezne v kotanjo.

   (b) Za koliko moramo kvader nato segreti, da pogleda iz kotanje.

**Rešitev:**

(a) Postavimo koordinatni sistem z osmi v smereh kvadra, os $z$ pa naj bo v smeri stranice z dolžino $h$. Ker je kotanja toga, je edina neničelna komponenta deformacijskega tenzorja

$\epsilon_{33}$. Po drugi strani pa je v smeri osi $z$ je podana napetost $t_{33} = -F/a^2$. Po Hookovem zakonu tako velja

$$\begin{aligned}
0 = \epsilon_{11} &= \frac{1}{E}t_{11} - \frac{\nu}{E}t_{22} - \frac{\nu}{E}t_{33},\\
0 = \epsilon_{22} &= -\frac{\nu}{E}t_{11} + \frac{1}{E}t_{22} - \frac{\nu}{E}t_{33},\\
\epsilon_{33} &= -\frac{\nu}{E}t_{11} - \frac{\nu}{E}t_{22} + \frac{1}{E}t_{33},\\
0 = \epsilon_{23} &= \frac{1}{2G}t_{23}, \quad 0 = \epsilon_{13} = \frac{1}{2G}t_{13}, \quad 0 = \epsilon_{12} = \frac{1}{2G}t_{12}.
\end{aligned}$$

Strižne komponente napetostnega tenzorja so enake nič. Sistem rešimo še za $t_{11}$ in $t_{22}$. Dobimo

$$t_{11} = t_{22} = \frac{\nu}{1-\nu}t_{33} = -\frac{\nu F}{(1-\nu)a^2}.$$

Potem je

$$\epsilon_{33} = -\frac{(1-\nu-2\nu^2)F}{(1-\nu)Ea^2}.$$

Zgornja ploskev se pogrezne za

$$\Delta h = \frac{(1-\nu-2\nu^2)Fh}{(1-\nu)Ea^2}.$$

(b) V drugem koraku pogreznjeni kvader segrejemo. Nova celotna deformacija je $\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}}^{\mathrm{e}} + \underline{\underline{\epsilon}}^{\mathrm{t}} = \underline{\underline{\epsilon}}^{\mathrm{e}} - \alpha\Delta T\underline{\underline{I}}$. Po Hookovem zakonu potem

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \alpha\Delta T\underline{\underline{I}} + \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{t}} - \frac{\nu}{E}\,\mathrm{sl}(\underline{\underline{t}})\underline{\underline{I}}.$$

Tu je $\underline{\underline{t}}$ napetost v kvadru na drugem koraku. Komponenta deformacije je $\epsilon_{33}$ je enaka $\Delta h/h$, vse ostale pa so enake nič. Komponenta napetosti $t_{33}$ pa je enaka nič, saj je v tem drugem delu naloge zgornji rob prost. Tako dobimo sistem

$$\begin{aligned}
0 = \epsilon_{11} &= \alpha\Delta T + \frac{1}{E}t_{11} - \frac{\nu}{E}t_{22},\\
0 = \epsilon_{22} &= \alpha\Delta T - \frac{\nu}{E}t_{11} + \frac{1}{E}t_{22},\\
\frac{\Delta h}{h} = \epsilon_{33} &= \alpha\Delta T - \frac{\nu}{E}t_{11} - \frac{\nu}{E}t_{22},\\
0 = \epsilon_{23} &= \frac{1}{2G}t_{23}, \quad 0 = \epsilon_{13} = \frac{1}{2G}t_{13}, \quad 0 = \epsilon_{12} = \frac{1}{2G}t_{12}.
\end{aligned}$$

za neznane komponente napetostnega tenzorja in $\Delta T$. Rešitev sistema je

$$\begin{aligned}
t_{11} = t_{22} &= -\frac{\Delta h E}{h(1+\nu)},\\
t_{23} = t_{13} &= t_{12} = 0,\\
\Delta T &= \frac{\Delta h(1-\nu)}{\alpha h(\nu+1)}.
\end{aligned}$$

4. V togi matriki je elastični vključek v obliki kocke. Polovico kocke segrejemo za $\Delta T_1$, drugo pa za $\Delta T_2$.

   (a) Določi napetostno stanje.

(b) Izračunaj relativno spremembo volumna ene in druge polovice kocke.

**Rešitev:**

(a) Postavimo koordinatni sistem v smereh stranic kocke z izhodiščem v njenem središču. Privzemimo, da smo polovico kocke na negativni strani osi $x$ segreli za $\Delta T_1$, na pozitivni pa za $\Delta T_2$. Deformacijo in napetost na negativni strani osi $x$ oznaqčimo z $\underline{\underline{\epsilon}}_1$ in $\underline{\underline{t}}_1$ na desni pa z $\underline{\underline{\epsilon}}_2$ in $\underline{\underline{t}}_2$. Za obe polovici, $p = 1, 2$ velja

$$
\begin{aligned}
\epsilon_{p,11} &= \frac{1}{E}t_{p,11} - \frac{\nu}{E}t_{p,22} - \frac{\nu}{E}t_{p,33} + \alpha_p \Delta T_p,\\
0 = \epsilon_{p,22} &= -\frac{\nu}{E}t_{p,11} + \frac{1}{E}t_{p,22} - \frac{\nu}{E}t_{p,33} + \alpha_p \Delta T_p,\\
0 = \epsilon_{p,33} &= -\frac{\nu}{E}t_{p,11} - \frac{\nu}{E}t_{p,22} + \frac{1}{E}t_{p,33} + \alpha_p \Delta T_p,\\
0 = \epsilon_{p,23} &= \frac{1}{2G}t_{p,23}, \quad 0 = \epsilon_{p,13} = \frac{1}{2G}t_{p,13}, \quad 0 = \epsilon_{p,12} = \frac{1}{2G}t_{p,12}.
\end{aligned}
$$

Tu smo upoštevali, da se koti ohranijo, in da se mejna ploskev med polovicama zaradi različne temperature pomakne, zato $\epsilon_{p,11} \neq 0$. Iz enačb vidimo, da so vsi izvendiagonalni elementi enaki nič. Upoštevajmo, da se celotni volumen kocke ne spremeni. Potem

$$
0 = \mathrm{sl}\left(\underline{\underline{\epsilon}}_1\right) + \mathrm{sl}\left(\underline{\underline{\epsilon}}_2\right) = \epsilon_{1,11} + \epsilon_{2,11}.
$$

Nadalje je mejna ploskev v ravnovesju. Velja

$$
\underline{\underline{t}}_1 \cdot \vec{\imath} = \underline{\underline{t}}_2 \cdot \vec{\imath}
$$

oziroma $t_{1,11} = t_{2,11}$.
Dobili smo sistem enačb za neznanke $\epsilon_{p,11}$, $t_{p,11}$, $t_{p,22}$,$t_{p,33}$ za $p = 1, 2$. Iz simetrije naloge sledi $t_{p,22} = t_{p,33}$. Upoštevjmo še zadnji dve enačbi. Prvotni sistem je tako sistem za neznanke $\epsilon_{1,11}$, $t_{1,11}$, $t_{1,22}$,$t_{1,33}$. Rešitev sistema je

$$
\begin{aligned}
t_{1,11} = t_{2,11} &= -\frac{\alpha\left(\Delta T_1 + \Delta T_2\right)E}{2(1-2\nu)},\\
t_{1,22} = t_{1,33} &= \frac{\alpha E\left(\Delta T_1(3\nu - 2) - \Delta T_2 \nu\right)}{2(1-2\nu)(1-\nu)},\\
t_{2,22} = t_{2,33} &= \frac{\alpha E\left(\Delta T_2(3\nu - 2) - \Delta T_1 \nu\right)}{2(1-2\nu)(1-\nu)},\\
\epsilon_{1,11} = -\epsilon_{2,11} &= -\frac{\alpha\left(\Delta T_1 - \Delta T_2\right)(\nu+1)}{2(\nu-1)}.
\end{aligned}
$$

V primeru $\Delta T_1 = \Delta T_2$ dobimo dobro znano rešitev.

(b) Relativni spremembi volumna sta $\epsilon_{1,11}$ in $\epsilon_{2,11}$ in sta podani z zgornjo rešitev. Vidimo, da se volumen ene polovice zmanjša, druge pa poveča.

### 8.2.2 Dodatne naloge

1. V togi matriki je elastični vključek v obliki kvadra. Kvader segrejemo za $\Delta T$. Določi napetostno stanje.

   **Rešitev:** $t_{11} = t_{22} = t_{33} = -\frac{\alpha E \Delta T}{1-2\nu}$, $t_{12} = t_{13} = t_{23} = 0$.

2. V togi matriki je kompozitni elastični vključek v obliki kocke. Ena polovica ima koeficient termalnega razteska $\alpha_1$, druga pa $\alpha_2$. Kocko segrejemo za $\Delta T$. Določi napetostno stanje.

   **Rešitev:**

$$
\begin{aligned}
t_{1,11} = t_{2,11} &= -\frac{(\alpha_1 + \alpha_2)\, E \Delta T}{2(1-2\nu)}, \\
t_{1,22} = t_{1,33} &= \frac{\Delta T\, (\alpha_1(3\nu - 2) - \alpha_2 \nu)\, E}{2(1-2\nu)(1-\nu)}, \\
t_{2,22} = t_{2,33} &= -\frac{\Delta T\, (\alpha_1 \nu + \alpha_2 (2 - 3\nu))\, E}{2(1-2\nu)(1-\nu)}, \\
\epsilon_{1,11} = -\epsilon_{2,11} &= -\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)\, \Delta T(\nu + 1)}{2(\nu - 1)}.
\end{aligned}
$$