Poglavje 12

Upogib Nosilca

12.1 Upogib nosilca

12.1.1 Rešene naloge

1. Konzolno vpeti nosilec dolžine 50 cm je linijsko obremenjen s konstantno gostoto $q_0 = 50\,\mathrm{kN/m}$. Nosilec je tankostenski s krožnim presekom polmera $R = 2\,\mathrm{cm}$ in debelino stene $t = 2\,\mathrm{mm}$, Youngov modul pa je $E = 120\,\mathrm{GPa}$.

   (a) Izračunaj ploskovni moment preseka.

   (b) Določi upogib nosilca.

   (c) Kolikšen je največji upogib?

   Rešitev:

   (a) Ploskovni moment je $I = \frac{\pi}{4}\left(R^4 - (R-t)^4\right) \doteq \pi t R^3 = 16\pi 10^{-8}\mathrm{m}^4 = 50.2710^{-8}\mathrm{m}^4$.

   (b) Enačba upogiba je $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = q_0$. Po štirih integracijah dobimo

   $$w = \frac{q_0}{24EI}x^4 + \frac{1}{6}C_1x^3 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4.$$

   Robni pogoji so $w(0) = 0$, $w'(0) = 0$ na levem krajišču in $w''(l) = 0$, $w'''(l) = 0$ na desnem krajišču. Rešitev je

   $$w = \frac{q_0 l^2 x^2}{24EI}\left(\frac{x^2}{l^2} - 4\frac{x}{l} + 6\right).$$

   (c) Upogib na prostem koncu je

   $$w_{\max} = \frac{q_0 l^4}{8EI} \doteq 6.5\,\mathrm{cm}.$$

2. Enostavno podprt vodoravni nosilec dolžine $l = 2\,\mathrm{m}$ je enakomerno obremenjen s konstantno linijsko obremenitvijo q_0. Nosilec je votel s tankoslojnim kvadratnim presekom debeline $t = 5\,\mathrm{mm}$ in površino praznine $A = 1\,\mathrm{cm}^2$, Youngov modul pa je $E = 120\,\mathrm{GPa}$.

   (a) Skiciraj potek prečne sile in upogibnega momenta. Določi vrednost maksimalnega upogibnega momenta.

(b) Določi dopustno linijsko obremenitev q_0, da bo osna napetost v nosilcu po absolutni vrednosti manjša od $\sigma_0 = 120\,\text{MPa}$.

(c) Izračunaj maksimalni upogib nosilca.

Rešitev:

(a) Rezultanta obremenitve nosilca ima velikost lq_0 s prijemališčem na sredini nosilca. Potem $A = B = \frac{1}{2}lq_0$, kjer sta A in B vertikalni sili podpor. Nadalje je $\frac{dQ}{dx} = -q_0$ in tako $Q = -q_0x + C$. Ker je prečna sila v levi podpori enaka sili leve podpore je $Q(x = 0) = \frac{1}{2}lq_0$ in tako $Q = -q_0x + \frac{1}{2}lq_0$. Za upogibni moment velja $\frac{dM}{dx} = Q$ in od tod $M = \frac{1}{2}q_0x(l - x)$, saj je $M(0) = M(l) = 0$. Upogibni moment je očitno največji na

Slika 12.1: Potek prečne sile in upogibnega momenta.

sredini in tako $M_{\max} = \frac{q_0l^2}{8}$.

(b) Uporabili bomo formulo $\sigma = \frac{M}{I}z$, kjer je I ploskovni moment preseka nosilca. Označimo z a dolžino stranice notranjega kvadrata, z b pa zunanjega. Očitno je $a = 1\,\text{cm}$. Velja $b = a + t$, kjer je t debelina nosilca. Potem $b = 2\,\text{cm}$ in

$$I = \frac{1}{12}b^4 - \frac{1}{12}a^4 = \frac{15}{12}\text{cm}^4.$$

Napetost je exstremalna na robu, pri $z = \pm\frac{b}{2} = \pm 1\,\text{cm}$. Tako dobimo neenakost

$$\frac{q_0l^2 12}{8 \cdot 15\text{cm}^3} \leq \sigma_0.$$

Potem

$$q_0 \leq \frac{10\sigma_0\text{cm}^3}{l^2} = 300\,\text{N/m}.$$

(c) Upogib nosilca dobimo iz enačbe $EIw^{(}4) = q_0$. Potem je

$$w = \frac{1}{24}\frac{q_0}{EI}x^4 + \frac{1}{6}C_1x^3 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4.$$

Iz robnih pogojev $w(0) = w(l) = 0$ in $w''(0) = w''(l) = 0$ sledi $C_2 = C_4 = 0$ in

$$C_1 = -\frac{q_0l}{2EI}, \qquad C_3 = \frac{q_0l^3}{24EI}.$$

Potem

$$w = \frac{q_0}{24EI}\left(x^4 - 2x^3l + l^3x\right).$$

Upogib je največji na sredini in je enak

$$w_{\max} = \frac{5q_0l^4}{384EI}.$$

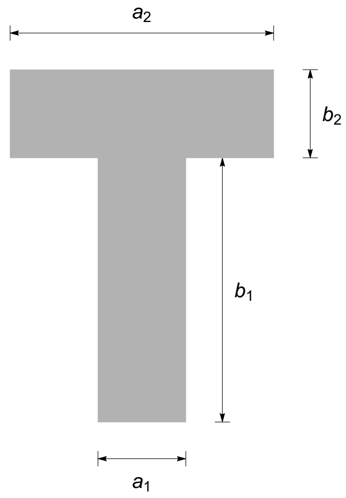
Za maksimalno dopustno linijsko obremenitev je $w_{\max} = \frac{1}{24}\text{m} \doteq 41.6\,\text{mm}$.

3. Enostavno podprt T nosilec dolžine $l = 1$m je točkovno obremenjen v navpični smeri pri $x_1 = l/4$, $x_2 = l/2$ in $x_3 = 3l/4$ s silami $F_1 = F_0$, $F_2 = 2F_0$ in $F_3 = -F_0$. Dimenzija preseka so, glej skico, $a_1 = 1\,\text{cm}$, $a_2 = 3\,\text{cm}$, $b_1 = 2\,\text{cm}$ in $b_2 = 1\,\text{cm}$.

   (a) Skiciraj potek prečne sile in upogibnega momenta.

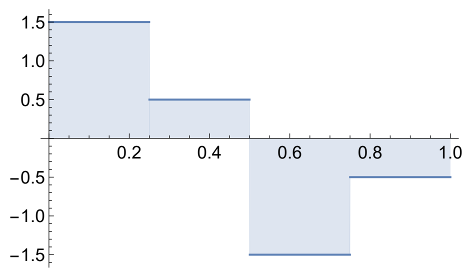
   (b) Določi središče preseka in njegov ploskovni moment drugega reda I.

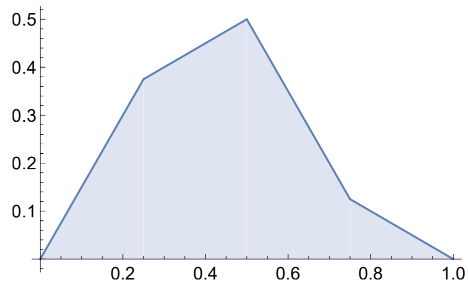
   (c) Določi F_0 tako, da bo maksimalna natezna napetost nosilca manjša od $\sigma_0 = 120\,\text{MPa}$.



Rešitev:

(a) Prvo določimo sili podpor. Označimo levo z A, desno z B. Iz ravnovesnih enačb dobimo $A = 3F_0/2$ in $B = F_0/2$. Skici poteka prečne sile in upogibnega momenta sta:





Slika 12.2: Potek prečne sile in upogibnega momenta.

(b) T nosilec je sestavljen iz dve pravokotnikov. Določimo prvo masno središče. Postavimo pomožni koordinatni sistem z izhodiščem na vrhu T nosilca. Koordinati masnega središča sta potem $z_1 = b_2 + \frac{1}{2}b_1 = 2\,\text{cm}$ in $z_2 = \frac{1}{2}b_2 = 1/2\,\text{cm}$. Ploščini sta $A_1 = a_1 b_1 = 2\,\text{cm}^2$ in $A_2 = a_2 b_2 = 3\,\text{cm}^2$. Potem je masno središce

$$z_0 = \frac{1}{A_1 + A_2}(z_1 A_1 + z_2 A_2) = \frac{11}{10}\text{cm}.$$

Postavimo sedaj izhodišče koordinatnega sistema v izračunano masno središče. Novi koordinati masnih središč pravokotnikov sta $z_1^* = 9/10\,\text{cm}$ in $z_2^* = -3/5\,\text{cm}$. Ploskovni moment je potem

$$I = \frac{1}{12}(a_1 b_1^3 + a_2 b_2^3) + A_1 (z_1^*)^2 + A_2 (z_2^*)^2 = \left(\frac{1}{12}(3+8) + \frac{27}{25} + \frac{81}{50}\right)\text{cm}^4 = \frac{217}{60}\text{cm}^4.$$

(c) Dopustno silo F_0 določa neenakost

$$\frac{M}{I} z \leq \sigma_0.$$

Maksimalni upogibni moment je $M = \frac{1}{2}lF_0$, napetost pa je natezna na spodnjem delu preseka, zato $z = 19/10$cm. Potem

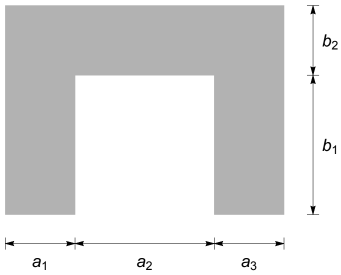
$$F_0 \leq \frac{2I\sigma_0}{lz} = \frac{8680}{19}\mathrm{N} \doteq 457\,\mathrm{N}.$$

4. Enostavno podprt U nosilec dolžine $l = 1$m je linijsko obremenjen s konstantno obremenitvijo q_0. Dimenzija preseka so, glej skico, $a_1 = 1\,\mathrm{cm}$, $a_2 = 2\,\mathrm{cm}$, $a_3 = 1\,\mathrm{cm}$, $b_1 = 2\,\mathrm{cm}$ in $b_2 = 1\,\mathrm{cm}$.

   (a) Skiciraj potek prečne sile in upogibnega momenta.

   (b) Določi središče preseka in njegov ploskovni moment I.

   (c) Določi dopustno obremenitev q_0 tako, da natezna napetost ne bo presegla vrednosti $\sigma_0 = 180\,\mathrm{MPa}$.

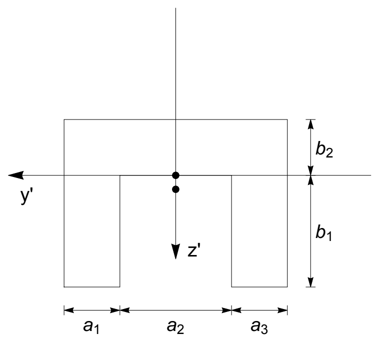


Rešitev:

(a) Prvo izračunamo sile podpor, levo označimo z A, desno z B. Iz simetrije problema sledi $A = B$. Vsota vseh sil je $q_0 l$, potem $A = B = \frac{1}{2}q_0 l$. Potek prečne sile in upogibnega momenta je dan na sliki. Maksimalni upogibni moment je $M_{\max} = \frac{l}{8}q_0 l^2$.

Slika 12.3: Brezdimenzijski potek prečne sile in upogibnega momenta $(l = 1, q_0 = 1)$.

(b) Presek je sestavljen iz treh pravokotnikov, A_1 pravokotnik $a_1 \times b_1$, A_2 pravokotnik $a_3 \times b_1$ in A_3 pravokotnik $(a_1 + a_2 + a_3) \times b_2$. Postavimo pomožni koordiantni sistem $y'z'$ tako kot kaže skica. Očitno je središče na osi z'. Koordinato z'_* določimo po formuli



$$z'_* = \frac{1}{A_1 + A_2 + A_3}\left(A_1 z'_{1*} + A_2 z'_{2*} + A_3 z'_{3*}\right).$$

Izračunamo posebej $A_1 = a_1 \times b_1 = 2\,\mathrm{cm}^2$, $A_2 = a_3 \times b_1 = 2\,\mathrm{cm}^2$, $A_3 = (a_1 + a_2 + a_3) \times b_2 = 4\,\mathrm{cm}^2$ in $z'_{1*} = 1\,\mathrm{cm}$, $z'_{2*} = 1\,\mathrm{cm}$ in $z'_{3*} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{cm}$. Potem

$$z'_* = \frac{1}{8}(2 \times 1 + 2 \times 1 - 4 \times \frac{1}{2})\,\mathrm{cm} = \frac{1}{4}\,\mathrm{cm}.$$

V koordinatnem sistemu yz, ki ima izhodišče v središčni točki preseka imajo pomožni pravokotniki z koordinato središč $z_{1*} = \frac{3}{4}\,\mathrm{cm}$, $z_{2*} = \frac{3}{4}\,\mathrm{cm}$ in $z_{3*} = -\frac{3}{4}\,\mathrm{cm}$. Ploskovni moment preseka je potem

$$I = z_{1*}^2 A_1 + \frac{1}{12} a_1 b_1^3 + z_{2*}^2 A_2 + \frac{1}{12} a_3 b_1^3 + z_{3*}^2 A_3 + \frac{1}{12}(a_1 + a_2 + a_3) b_2^3.$$

Vstavimo podatke in dobimo $I = \frac{37}{6}\,\mathrm{cm}^4$.

(c) Maksimalnemu upogibnemu momentu pripada maksimalna osna napetost $\sigma_{\max}$. Veljati mora

$$\sigma_0 \geq \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I} z_{\max},$$

kjer je $z_{\max}$ koordinata na vrhu nosilca, kjer je natezna napetost največja. Po predhodnen izračunu je $z_{\max} = \frac{5}{4}$, cm. Tako dobimo

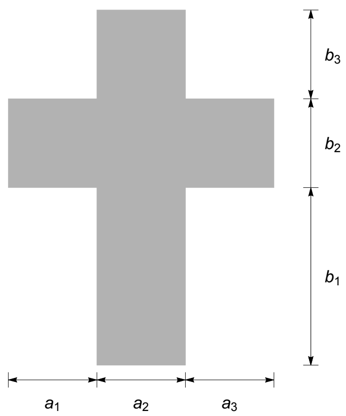
$$q_0 \leq \frac{8 I \sigma_0}{l^2 z_{\max}} = 71\,\mathrm{N/m}.$$

5. Enostavno podprt nosilec s presekom v obliki križa dolžine $l = 1$m je točkovno obremenjen v navpični smeri pri $x_1 = \frac{1}{2}l$ in $x_2 = \frac{3}{4}l$ s silama $F_1 = F_0$ in $F_2 = 2F_0$. Dimenzija preseka so, glej skico $a_1 = a_2 = a_3 = 1\,\mathrm{cm}$, $b_1 = 2\,\mathrm{cm}$, $b_2 = b_3 = 1\,\mathrm{cm}$.

   (a) Skiciraj potek prečne sile in upogibnega momenta. Kolikšna je maksimalna vrednost upogibnega momenta?

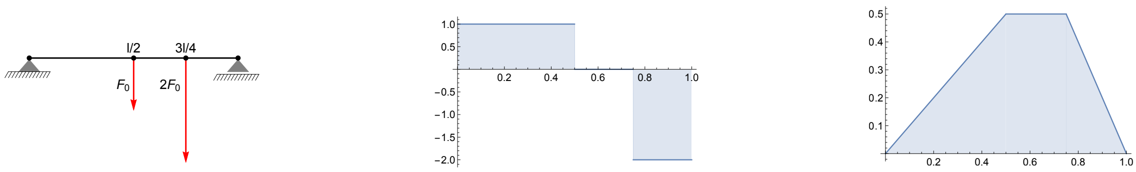
   (b) Določi središče preseka in njegov ploskovni moment I.

   (c) Določi dopustno obremenitev F_0 tako, da bo maksimalna napetost manjša od $\sigma_{\max} = 120\,\mathrm{MPa}$.



Rešitev:

(a) Skica obremenitve s potekom prečne sile in upogibnega momenta je podana na spodnji sliki. Za potek prečne sile, ki je odsekoma konstantna prvo izračunamo sile podpor. Imamo enačbi ravnovesja momentov v podporah. Torej $\frac{l}{4} \times 2F_0 + \frac{l}{2} \times F_0 = lA$ in $\frac{l}{2}F_0 + \frac{3l}{4} \times 2F_0 = lB$. Tako dobimo $A = F_0$ in $B = 2F_0$. Za potek momenta M upoštevamo, da je $\frac{dM}{dx} = Q$. Od tod sledi, da je maksimalen upogibni moment enak $M_{\max} = \frac{l}{2}F_0$.



Slika 12.4: Točkovno obremenjen nosilec s potekom prečne sile in upogibnega momenta.

(b) Križ je sestavljen iz treh pravokotnikov, pokončnega dimenzije $a_2 \times (b_1 + b_2 + b_3)$ in dveh krakov dimenzije $a_1 \times b_2$ oziroma $a_3 \times b_2$. Postavimo koordinatni sistem v središče preseka krakov in pokončnega dela. Očitno $x_* = 0$, za y_* pa velja formula

$$y_* = \frac{1}{A_1 + A_2 + A_3} \left(A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3 \right),$$

kjer je $A_1 = 4\,\mathrm{cm}^2$ površina pokončnega dela, $A_2 = A_3 = 1\,\mathrm{cm}^2$ pa površini krakov. Nadalje $y_1 = -\frac{1}{2}\mathrm{cm}$ in $y_2 = y_3 = 0$. Tako dobimo $y_* = -\frac{1}{3}\mathrm{cm}$. Ploskovni moment dobimo po formuli

$$I = \frac{1}{12} a_2 (b_1 + b_2 + b_3)^3 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)^2 \mathrm{cm}^2 A_1 + 2 \left(\frac{1}{12} a_1 b_2^3 + \left(\frac{1}{3}\mathrm{cm} \right)^2 A_2 \right).$$

Tu smo upoštevali simetrijo levega in desnega kraka. Tako dobimo

$$I = \frac{35}{6}\mathrm{cm}^4.$$

(c) Vsavimo dobljeno v formulo $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} z_{\max}}{I}$, kjer je $z_{\max}$ maksimalna oddaljenost od centralne osi do roba preseka nosilca v smeri obremenitve, torej $z_{\max} = (2 + \frac{1}{3})\mathrm{cm} = \frac{7}{3}\mathrm{cm}$. Vstavimo izračunane vrednosti v formulo. Tako dobimo

$$120\,\mathrm{MPa} = \frac{F_0}{2}\mathrm{m} \times \frac{6}{35} \times 10^8 \mathrm{m}^{-4} \times \frac{7}{3} 10^{-2}\mathrm{m}.$$

Tako dobimo $F_0 \leq 600\,\mathrm{N}$.

6. Enostavno podprt vodoravni nosilec dolžine $l = 1\,\mathrm{m}$ je v vertikalni smeri točkovno obremenjen pri $x_1 = \frac{l}{4}$, $x_2 = \frac{l}{2}$ in $x_3 = \frac{3l}{4}$ s silami $F_1 = -F_0$, $F_2 = 2F_0$ in $F_3 = -F_0$.

   (a) Skiciraj potek prečne sile in upogibnega momenta. Določi vrednost maksimalnega upogibnega momenta.

   (b) Nosilec je votel s kvadratnim presekom dimenzij $2\,\mathrm{cm} \times 3\,\mathrm{cm}$. Določi pogoj na velikost sile F_0 tako, da bo osna napetost v nosilcu manjša od $\sigma_0 = 120\,\mathrm{MPa}$.

Rešitev:

(a) Prvo izračunamo sile podpor, levo označimo z A, desno z B. Iz simetrije problema sledi $A = B$. Vsota vseh sil je nič, potem $A = B = 0$. Potek prečne sile in upogibnega momenta je dan na sliki. Maksimalni upogibni moment je $M_{\max} = \frac{l}{4} F_0$.

Slika 12.5: Potek prečne sile in upogibnega momenta.

(b) Ploskovni moment pravokotnika dimenzije $a \times b$ je

$$I = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} y^2 \, dy = 2a \int_{-b/2}^{b/2} y^2 \, dy = \frac{1}{12} a b^3 = \frac{9}{2}\mathrm{cm}^4.$$

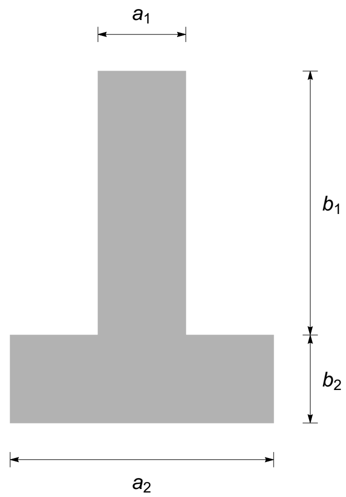
Osna napetost je dana s formulo $\sigma = \frac{M}{I} z$. Veljati mora pogoj

$$\frac{M_{\max}}{I} z_{\max} \leq \sigma_0.$$

Ker je $z_{\max} = \frac{a}{2}$ in $M_{\max} = \frac{l}{4} F_0$, dobimo od tod neenačbo

$$F_0 \leq \frac{8 I \sigma_0}{la} = 2.16\,\text{kN}.$$

7. Enostavno podprt T nosilec dolžine $l = 1$m je točkovno obremenjen v navpični smeri pri $x_1 = l/4$, $x_2 = l/2$ in $x_3 = 3l/4$ s silami $F_1 = 2F_0$, $F_2 = F_0$ in $F_3 = -F_0$. Dimenzija preseka so, glej skico, $a_1 = 1\,\text{cm}$, $a_2 = 3\,\text{cm}$, $b_1 = 2\,\text{cm}$ in $b_2 = 1\,\text{cm}$.



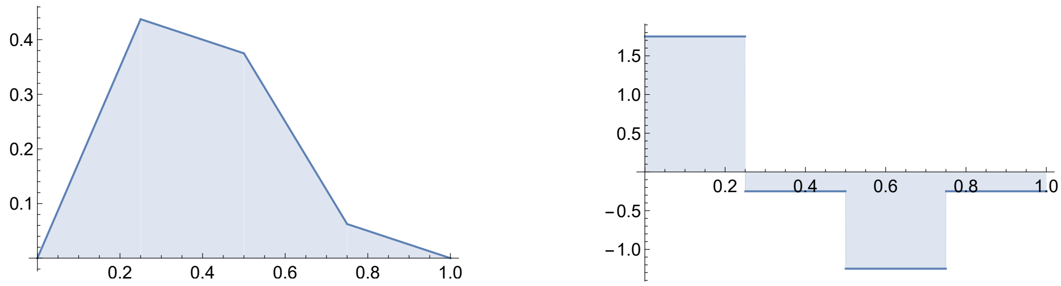
(a) Skiciraj potek prečne sile in upogibnega momenta.

(b) Določi središče preseka in njegov ploskovni moment drugega reda I.

(c) Določi F_0 tako, da bo maksimalna natezna napetost nosilca manjša od $\sigma_0 = 120\,\text{MPa}$.

Rešitev:

(a) Prvo določimo sili podpor. Označimo levo z A, desno z B. Iz ravnovesnih enačb dobimo $A = 7F_0/4$ in $B = F_0/4$. Skici poteka prečne sile in upogibnega momenta sta:



Slika 12.6: Potek prečne sile in upogibnega momenta.

(b) T nosilec je sestavljen iz dve pravokotnikov. Določimo prvo masno središče. Postavimo pomožni koordinatni sistem z izhodiščem na dnu T nosilca. Koordinati masnega središča sta potem $z_1 = b_2 + \frac{1}{2} b_1 = 2\,\text{cm}$ in $z_2 = \frac{1}{2} b_2 = 1/2\,\text{cm}$. Ploščini sta $A_1 = a_1 b_1 = 2\,\text{cm}^2$ in $A_2 = a_2 b_2 = 3\,\text{cm}^2$. Potem je masno sredisce

$$z_0 = \frac{1}{A_1 + A_2}(z_1 A_1 + z_2 A_2) = \frac{11}{10}\text{cm}.$$

Postavimo sedaj izhodišče koordinatnega sistema v izračunano masno središče. Novi koordinati masnih središč pravokotnikov sta $z_1^* = 9/10\,\text{cm}$ in $z_2^* = -3/5\,\text{cm}$. Ploskovni moment je potem

$$I = \frac{1}{12}(a_1 b_1^3 + a_2 b_2^3) + A_1 (z_1^*)^2 + A_2 (z_2^*)^2 = \left(\frac{1}{12}(3+8) + \frac{27}{25} + \frac{81}{50}\right)\mathrm{cm}^4 = \frac{217}{60}\mathrm{cm}^4.$$

(c) Dopustno silo F_0 določa neenakost

$$\frac{M}{I} z \leq \sigma_0.$$

Maksimalni upogibni moment je $M = Al/4 = 7F_0/16$, napetost pa je natezna na spodnjem delu preseka, zato $z = 11/10\mathrm{cm}$. Potem

$$F_0 \leq \frac{16 I \sigma_0}{7 l z} = \frac{9920}{11}\mathrm{N} \doteq 902\,\mathrm{N}.$$