Poglavje 1

Kinematika in dinamika

1.1 Premočrtno gibanje

1.1.1 Rešene naloge

1. Točka se giblje premočrtno po osi x. V času od 0 do t_1 se giblje s konstantno brzino v_1, v času od t_1 do t_2 enakomerno zavira tako, da ima v času t_2 trenuto brzino nič.

   (a) Izračunaj do kod pride v času t_1.

   (b) Izračunaj pospešek zaviranja.

   (c) Do kod pride v času t_2?

   (d) Kdaj se vrne v začetni položaj?

   (e) Izračunaj za konkretne vrednosti $v_1 = 2\,\mathrm{m/s}$, $t_1 = 10\,\mathrm{s}$, $t_2 = 20\,\mathrm{s}$. Nariši tudi grafe pospeška, hitrosti in položaja v odvisnosti od časa.

Rešitev: Poglejmo prvo, kako je s pospeškom. Pospešek je od $t = 0$ do $t = t_1$ je enak nič, ker je gibanje enakomerno, na intervalu (t_1, t_2) in naprej do t_3, ko se točka vrne v začetni položaj, pa je pospešek konstanten in ima vrednostjo a_2. Kolikšna je njena vrednostše ne vemo, vemo pa da je negativna, saj točka zavira. Na intervalu $(0, t_1)$ je hitrost konstantna in enaka v_1, nato pa od t_1 naprej linearno poda, saj točka enakomerno zavira. Njen linearni potek je natanko določen, saj vemo, da je $v(t_1) = v_1$ in $v(t_2) = 0$. Od tod sledi, da je

$$v(t) = \frac{v_1(t - t_2)}{t_1 - t_2} \qquad t > t_1.$$

Odvod hitrosti je pospešek in tako $a_2 = -v_1/(t_2 - t_1) = -0.2\,\mathrm{m/s^2}$. Postavimo začetni položaj točke v $x = 0$. Ker je hitrost na $(0, t_1)$ konstantna, na tem intervalu velja $x = v_1 t$, x torej narašča linearno in tako velja $x(t = t_1) = v_1 t_1 = 20\,\mathrm{m}$. Za $t > t_1$ je gibanje enakomerno pospešeno, zato je x kvadratna funkcija časa. Ker poznamo položaj in hitrost za $t = t_1$ zapišemo x v obliki

$$x = \frac{1}{2} a_2 (t - t_1)^2 + v_1(t - t_1) + v_1 t_1.$$

Potem

$$x(t_2) = -\frac{v_1(t_2 - t_1)^2}{2(t_2 - t_1)} + v_1(t_2 - t_1) + v_1 t_1 = \frac{1}{2} v_1 (t_1 + t_2) = 60\,\mathrm{m}.$$

Kdaj se vrne v začetni položaj, dobimo iz enačbe

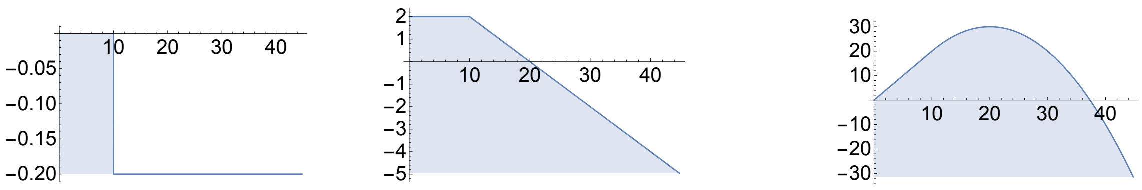
$$0 = \frac{1}{2}a_2(t_3 - t_1)^2 + v_1(t_3 - t_1) + v_1 t_1.$$

Dobili smo kvadratno enačbo za t_3. Za lažje reševanje vpeljimo novo neznanko $\tau = t_3 - t_1$. Potem $0 = \frac{1}{2}a_2\tau + v_1\tau + v_1 t_1$ in tako

$$\tau_{1,2} = \frac{-v_1 \pm \sqrt{v_1^2 - 2a_2 v_1 t_1}}{a} = \frac{t_2 - t_1}{v_1}\left(v_1 \pm \sqrt{v_1^2 + 2v_1^2 t_1/(t_2 - t_1)}\right) = (t_2 - t_1)\left(1 \pm \sqrt{\frac{t_1 + t_2}{t_2 - t_1}}\right).$$

Pravi predznak je $+$ in tako

$$t_3 = t_1 + \tau = t_1 + (t_2 - t_1)\left(1 \pm \sqrt{\frac{t_1 + t_2}{t_2 - t_1}}\right) = 10(2 + \sqrt{3})\mathrm{s}.$$



Slika 1.1: Pospešek, hitrost in polžaj.

2. Od časa $t = 0$ do $t = t_1$ se točka giblje enakomerno pospešeno s pospeškom a. V trenutku $t = t_1$ pričnemo zavirati. Določi pospešek zaviranja tako, da se točka v času $2t_1$ vrne v začetni položaj. Določi tudi do kod najdlje pride točka.

Rešitev: Označimo z x koordinato premočrtnega gibanja. Za $t \in [0, t_1]$ je enačba gibanja $x = \frac{1}{2}at^2$. Položaj točke v času t_1 je $x_1 = \frac{1}{2}at_1^2$, hitrost pa je $v_1 = at_1$. Od t_1 naprej se točka prav tako giblje enakomerno pospešeno, tokrat s pospeškom a_1. Ker je za drugi del gibanja začetni položaj v času t_1 enak x_1, začetna hitrost pa v_1, je enačba gibanja

$$x = x(t) = \frac{1}{2}a_1(t - t_1)^2 + v_1(t - t_1) + x_1 = \frac{1}{2}a_1(t - t_1)^2 + at_1(t - t_1) + \frac{1}{2}at_1^2.$$

Točka se v času $t = 2t_1$ vrne v začetni položaj. Velja torej $0 = x(2t_1) = \frac{1}{2}a_1 t_1^2 + at_1^2 + \frac{1}{2}at_1^2$. Od tod potem sledi $a_1 = -3a$. Vidimo, da je pospešek zaviranja neodvisen od časa t_1.

Poglejmo še, do kod pride točka. Točka se prične gibati nazaj v točki obrata gibanja, ki je določena z enačbo $0 = v = \dot{x}(t_2)$. Izračunajmo $\dot{x} = -3a(t - t_1) + at_1 = a(4t_1 - 3t)$. Tako dobimo $t_2 = \frac{4}{3}t_1$ in po krajšem računu $x_{\max} = \frac{2}{3}at_1^2$.

3. Dve točki se gibljeta ena proti drugi. Določi kdaj in kje se srečata, če sta v začetnem trenutku oddaljeni za d in je:

   (a) točki se gibljeta enakomerno z brzinama v_1 in v_2;

   (b) ena točka se giblje enakomerno z brzino v_1 druga pa njej nasproti enakomerno pospešeno s pospeškom a_2;

   (c) določi pospešek iz druge točke, da se točki srečata v času iz prve naloge.

Naredi izračun za konkretne vrednosti $d = 1\,\mathrm{m}$, $v_1 = 2\,\mathrm{cm/s}$, $v_2 = 3\,\mathrm{cm/s}$ in $a_2 = 2\,\mathrm{m/s^2}$.

Rešitev:

(a) V prvem primeru je pogoj srečanja $v_1 t = d - v_2 t$. Od tod sledi $t = d/(v_1 + v_2)$ in točki se srečata v oddaljenosti $dv_1/(v_1 + v_2)$ od začetnega položaja prve točke. Za dane vrednosti je čas srečanja $t = 20\,\mathrm{s}$, razdalja pa $40\,\mathrm{cm}$.

(b) Sedaj je pogoj srečanja $v_1 t = d - \frac{1}{2}a_2 t^2$. Dobili smo kvadratno enačbo za t. Rešitev je

$$t_{1,2} = \frac{1}{a_2}\left(-v_1 \pm \sqrt{v_1^2 + 2a_2 d}\right).$$

Prava rešitev je dana z vsoto. Za dane vrednosti je

$$t = \frac{1}{2}\left(-210^{-2} + \sqrt{410^{-4} + 4}\right)\mathrm{s} \doteq (-10^{-2} + 1)\mathrm{s} = 0.99\,\mathrm{s}.$$

Prepotovana razdalja prve točke pa je $v_1 t \doteq 1.98\,\mathrm{cm}$.

(c) Označimo s $t_1 = d/(v_1 + v_2)$ čas srečanja iz prve točke. Pospešek določa enačba $v_1 t_1 = d - \frac{1}{2}a t_1^2$. Potem je

$$a = \frac{2(d - v_1 t_1)}{t_1^2} = 2(v_1 + v_2)v_2/d.$$

Pri danih vrednostih $a = 30\,\mathrm{cm/s^2} = 0.3\,\mathrm{m/s^2}$.

4. Točka P_1 se giblje premočrtno. Gibnaje prične enakomerno pospešeno s pospeškom $a_1 = a$. V času t_0 prične enakomerno zavirati s pospeškom zaviranja $a_2 = ka$, $k > 0$.

(a) Določi čas v katerem se ustavi.

(b) Kje se ustavi?

(c) Določi povprečni pospešek do časa ustavitve.

Rešitev:

(a) Hitrost gibanja je za čas $t \geq t_0$ enaka $v = -ka(t - t_0) + at_0 = (1 + k)at_0 - kat$. Tu smo upoštevali, da je hitrost točke v času t_0 enaka at_0. Iskani čas t_1 zaustavitve je rešitev enačbe $0 = (1 + k)at_0 - kat_1$ in tako $t_1 = (1 + k)t_0/k$.

(b) Enačba gibanja za $t > t_0$ je $x = -\frac{1}{2}ka(t - t_0)^2 + at_0(t - t_0) + \frac{1}{2}at_0^2$. Vstavimo v enačbo $t_1 = (1 + k)t_0/k$. Potem je $t_1 - t_0 = t_0/k$ in točka se ustavi pri

$$x_1 = \frac{(1 + k)at_0^2}{2k}.$$

(c) Povprečni pospešek je enak pospešku prvega dela gibanja krat čas prvega dela gibanja plus pospešek drugega dela gibanja krat čas drugega dela gibanja deljeno s skupnim času gibanja. S formulo

$$\bar{a} = \frac{at_0 - ka(t_1 - t_0)}{t_1} = 0.$$

5. Na valj s polmerom r_0 se navija vrvica.

(a) Koliko se navije vrvice v času t, če se valj vrti enakomerno z o obrati na minuto?

(b) Valj se naj vrti enakomerno pospešeno. Določi pospešek tako, da so bo na valj navila enaka dol v zina vrvice v polovičnem času. Valj se prične vrteti z mirovanja.

Rešitev:

(a) Izpeljimo zvezo med kotno hitrostjo in številom obratov. Naj bo ω konstantna kotna hitrost. V času t se valj zavrti za kot $\varphi = \omega t$ oziroma za $\omega t/2\pi$ obratov. Potem je število obratov na minuto $t = 60\,\mathrm{s}$ enako $o = 30\omega/\pi$. Pri danem številu obratov na minuto je kotna hitrost tako $\omega = o\pi/30$. Dolžina navite vrvice je potem $l = r_0\omega t = r_0 o\pi t/30$.

(b) Valj se sedaj v času $t/2$ zavrti za kot $\varphi = \frac{1}{2}\alpha(t/2)^2 = \frac{1}{8}\alpha t^2$. Tu smo z α označili kotni pospešek. Enačba, ki določa kotni pospešek je

$$l = r_0 o\pi t/30 = r_0\varphi = r_0\frac{1}{8}\alpha t^2.$$

Potemtakem je

$$\alpha = \frac{4o\pi}{15t}.$$

Krajši je čas, večji mora biti kotni pospešek.

6. Tovornjak vozi po ravni cesti z brzino v_0, za njim pa v oddaljenosti d pelje avtomobil z enako brzino. V času $t_0 = 0$ avtomobil začne prihitevati s pospeškom a_1. V času t_1 ga dohiti in nato začne zavirati s pospeškom a_2 tako, da ima v času t_2 začetno brzino v_0 in je v razdalji $2d_0$ pred tovornjakom. Avtomobil mora zaključiti prehitevanje v razdalji kd_0.

(a) Izračunaj pospeška prihitevanja in zaviranja, kdaj avtomobil dohiti tovornjak in kdaj zaključi prehitevanje.

(b) Naredi konkretni račun, kjer je d enak varnosti razdalji, razdalji, ki jo prevozi avtomobil v dveh sekundah, $v_0 = 80\,\mathrm{km/h}$ in $k = 10$. Izračunaj tudi maksimalno brzino avtomobila.

Rešitev:

(a) Gibanje vozil je premočrtno. Označimo z x položaj tovornjaka in z y avtomobila. V začetnem trenutku naj bo $y = 0$. Potem je $x(t = 0) = d$. V času $t \in [0, t_1]$ avtomobil enakomerno pospešuje, zato je $y(t) = y_1(t) = \frac{1}{2}a_1 t^2 + v_0 t$. V času $t \in (t_1, t_2]$ pa velja $y(t) = y_2(t) = -\frac{1}{2}a_2(t - t_1)^2 + \dot{y}(t_1)(t - t_1) + y(t_1)$, saj se gibanje avtomobila nadaljuje z zaviranjem a_2 z začetnim pogojem brzine in položaja pri času t_1. Enačbe, ki določajo neznanke a_1, a_2, t_1 in t_2 so

$$\begin{aligned} y_1(t_1) &= x(t_1), \\ y_2(t_2) &= x(t_2) + 2d, \\ \dot{y}_2(t_2) &= v_0, \\ y_2(t_2) &= kd_0. \end{aligned}$$

Dobili smo štiri enačbe za štiri neznanke. Enačbe prepišemo v

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a_1 t_1^2 + v_0 t_1 &= d + v_0 t_1, \\ -\frac{1}{2}a_2(t_2 - t_1)^2 + (a_1 t_1 + v_0)(t_2 - t_1) + d + v_0 t_1 &= v_0 t_2 + 3d, \\ -a_2(t_2 - t_1) + (a_1 t_1 + v_0) &= v_0, \\ -\frac{1}{2}a_2(t_2 - t_1)^2 + (a_1 t_1 + v_0)(t_2 - t_1) + d + v_0 t_1 &= kd_0. \end{aligned}$$

Iz prve enačbe dobimo takoj t_1, z upoštvanjem druge in četrte pa t_2. Tako imamo

$$t_1 = \sqrt{2d/a_1} \quad \text{in} \quad t_2 = (k-3)d/v_0. \tag{1.1}$$

Pomnožimo tretjo enačbo z $-\frac{1}{2}(t_2 - t_1)$ in prištejmo k četrti. Po krajšem računu dobimo enačbo

$$\frac{1}{2}(2v_0 + a_1 t_1)t_2 = kd.$$

Vstavimo v enačbo časa iz (1.1). Potem je

$$a_1 = \frac{18k^2 v_0^2}{d(k-3)^2}$$

in nato še

$$a_2 = \frac{9v_0^2}{d(k-3)^2}.$$

(b) Za podane vrednosti je $t_1 = 14/3\,\mathrm{s}$, $t_2 = 14\,\mathrm{s}$, $a_1 = 4.08\,\mathrm{m/s^2}$ in $a_2 = a_1/2 = 2.08\,\mathrm{m/s^2}$. Maksimalna dosežena hitrost avtomobila je $\dot{y}_1(t_1) = 149\,\mathrm{km/h}$. Avtomobil ima močen motor, pri pospešku a_1 doseže iz mirovanja brzino $100\,\mathrm{km/h}$ v času $6.8\,\mathrm{s}$.

1.1.2 Dodatne naloge

1. Točka se giblje premočrtno po osi x. V času od 0 do t_1 se giblje enakomerno pospešeno s pospeškom a_1, v času od t_1 do t_2 pa nato enakomerno zavira tako, da ima v času t_2 trenuto brzino nič.

   (a) Izračunaj do kod pride v času t_1.

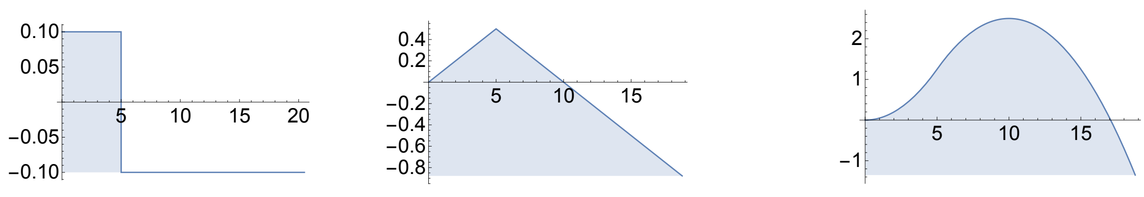
   (b) Izračunaj pospešek zaviranja a_2.

   (c) Do kod pride v času t_2?

   (d) Kdaj se vrne v začetni položaj?

   (e) Izračunaj za konkretne vrednosti $a_1 = 1/10\,\mathrm{m/s^2}$, $t_1 = 5\,\mathrm{s}$, $t_2 = 10\,\mathrm{s}$. Nariši tudi grafe pospeška, hitrosti in položaja v odvisnosti od časa.

   Rešitev: $x_1 = \frac{1}{2}a_1 t_1^2$, $a_2 = -\frac{a_1 t_1}{t_2 - t_1}$, $x_2 = \frac{1}{2}a_1 t_1 t_2$, $t_3 = t_2 + \sqrt{t_2(t_2 - t_1)}$.



Slika 1.2: Pospešek, hitrost in polžaj.

2. Točka se giblje premočrtno po osi x. V času od 0 do t_1 se giblje enakomerno pospešeno s pospeškom a_1, v času od t_1 do t_2 pa nato enakomerno zavira tako, da se v času t_2 vrne v začetni položaj.

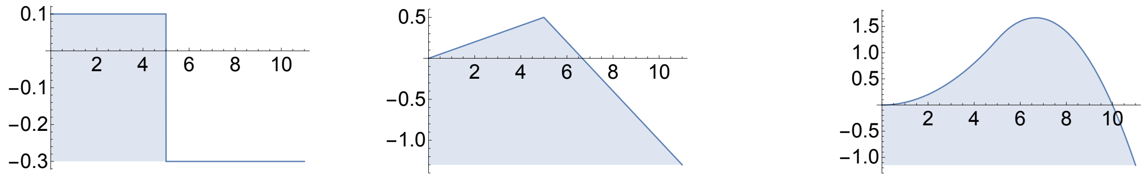
   (a) Izračunaj do kod pride v času t_1.

   (b) Izračunaj pospešek zaviranja a_2.

(c) Določi do kod najdlje pride točka.

(d) Izračunaj za konkretne vrednosti $a_1 = 1/10\,\mathrm{m/s^2}$, $t_1 = 5\,\mathrm{s}$, $t_2 = 10\,\mathrm{s}$. Nariši tudi grafe pospeška, hitrosti in položaja v odvisnosti od časa.

Rešitev: $x_1 = \frac{1}{2}a_1 t_1^2$, $a_2 = -\frac{a_1 t_1 (2t_2 - t_1)}{(t_2 - t_1)^2}$, $t_3 = \frac{(a_2 - a_1)t_1}{a_2}$, $x_{\max} = \frac{a_1 t_1 t_2^2}{2(2t_2 - t_1)}$.



Slika 1.3: Pospešek, hitrost in polžaj.

3. Obroč s polmerom R se kotali po ravni podlagi. V žačetnem trenutku t_0 ima brzino v_0. Nato od t_0 do t_1 enakomerno zavira, tako da brzina do časa t_1 pade na $\frac{1}{2}v_0$. Od t_1 do t_2 se nato giblje enakomerno.

   (a) Izračunaj pospešek zaviranja.

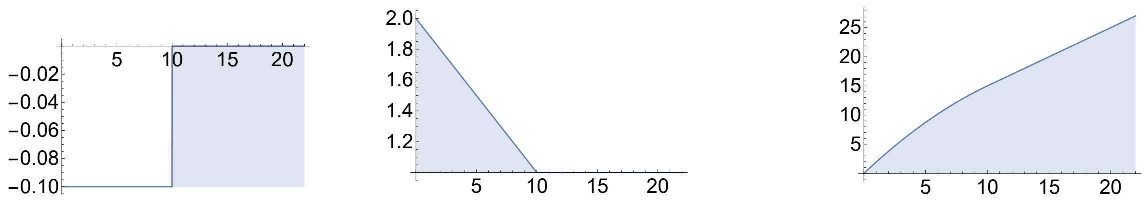
   (b) Do kod pride v času t_1 in t_2?

   (c) Nariši diagrame pospeška, hitrosti in poti od t_0 do t_2.

   (d) Izračunaj tudi kotni pospešek zaviranja. Koliko obratov naredi kolo do t_2?

   Izračun naredi za vrednosti $R_0 = 1/5\,\mathrm{m}$, $v_0 = 2\,\mathrm{m/s}$, $t_0 = 0\,\mathrm{s}$, $t_1 = 10\,\mathrm{s}$ in $t_2 = 20s$.

   Rešitev: $a_0 = \frac{v_0}{2(t_0 - t_1)} = 1/10\,\mathrm{ms^{-2}}$, $x_1 = \frac{3}{4}(t_1 - t_0)\,v_0 = 10\,\mathrm{m}$, $x_2 = \frac{1}{4}v_0(-3t_0 + t_1 + 2t_2) = 25\,\mathrm{m}$, $\alpha = a_0/R_0 = 1/2\,\mathrm{m}$, $o = x_2/(2\pi R_0) = 19.9$.



Slika 1.4: Pospešek, hitrost in polžaj.

4. Točka P_1 se giblje premočrtno s konstantno brzino v_1. Gibanje začne iz izhodšča v času $t = 0$. V času $t = t_0$ se prične iz iste izhodiščne točke v isto smer enakomerno pospešeno gibati točka P_2. Določi njen pospešek a_2, tako da P_2 ujame P_1 v času $t_1 = kt_0$, $k > 1$.

   Rešitev: $a_2 = 2kv_1/t_0(k-1)$.

5. Motor na valj s polemerom R_0 navija vrvico. Motor vklopimo v času $t_0 = 0$. Od t_0 do t_1 se motor vrti enakomerno pospešeno s kotnim pospeškom α_1, v času od t_1 do $t_2 = 2t_1$ se nato vrti enakomerno s kotno hitrostjo ω, od t_2 do t_3 pa enakomerno zavira s kotnim pospeškom 2α.

   (a) Določi kotni pospešek α in čas t_3, če se valj ustavi v času t_3.

(b) Koliko vrvice se navije.

(c) Naredi konkretni račun, če je kotna hitrost $R_0 = 1\,\mathrm{cm}$, $t_1 = 1\,\mathrm{min}$, $\omega = 60\,\mathrm{o/min}$.

Rešitev: $\alpha = \omega/t_1 = \pi/30\,\mathrm{s}^{-2}$, $t_3 = 5t_1/2 = 150\,\mathrm{s}$, $l = R_0\varphi = 15R_0\omega t_1/8 = 9\pi/4\,\mathrm{m}$.

1.2 Prostorsko gibanje

1.2.1 Rešene naloge

1. Dano je gibanje točke $\vec{r} = \vec{\alpha}t^2 + \vec{\beta}t + \vec{\gamma}$, kjer je $\vec{\alpha} = a_0(\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 3\vec{k})$, $\vec{\beta} = v_0(-3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - \vec{k})$ in $\vec{\gamma} = r_0(\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k})$. Tu so a_0, v_0 in r_0 konstante.

   (a) Določi dimenzije konstant a_0, v_0 in r_0.

   (b) Ali se tir gibanja seka?

   (c) Določi pogoj na čas t, da bo točka pospeševala.

   Rešitev:

   (a) Dimenzije so $[a_0] = \mathrm{m/s^2}$, $[v_0] = \mathrm{m/s}$ in $[r_0] = \mathrm{m}$.

   (b) Privzemimo, da se tir seka. Potem obstajata časa t_1 in t_2, da velja $\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2)$. Od tod sledi
   $$\vec{\alpha}t_1^2 + \vec{\beta}t_1 = \vec{\alpha}t_2^2 + \vec{\beta}t_2$$
   oziroma
   $$\vec{\alpha}(t_1 + t_2) + \vec{\beta} = 0.$$
   Tir se seka samo v primeru, ko sta vektorja $\vec{\alpha}$ in $\vec{\beta}$ vzporedna. Pri danih podatkih nista, zato se tir ne seka.

   (c) Točka pospešuje, če je $\vec{a} \cdot \vec{v} > 0$. Vektor hitrosti je $\vec{v} = 2\vec{\alpha}t + \vec{\beta}$, pospeška pa $\vec{a} = 2\vec{\alpha}$. Potem je
   $$\vec{a} \cdot \vec{v} = 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha}t + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 56a_0^2 t - 20a_0v_0.$$
   Točka torej pospešuje, če je $t > 5v_0/14a_0$.

2. Dano je gibanje točke $\vec{r} = \vec{\alpha}t^2 + \vec{\beta}t + \vec{\gamma}$, kjer so $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ in $\vec{\gamma}$ konstantni vektorji. Pokaži, da se tir danega gibanja seka natanko tedaj, ko sta konstanti $\vec{\alpha}$ in $\vec{\beta}$ taki, da je gibanje premočrtno.

   Rešitev: Tako kot v predhodni nalogi dobimo enačbo
   $$\vec{\alpha}(t_1 + t_2) + \vec{\beta} = 0.$$
   Tir se torej seka natanko tedaj, ko sta $\vec{\alpha}$ in $\vec{\beta}$ vzporedna vektorja. Vektor hitrosti je $\vec{v} = 2\vec{\alpha}t + \vec{\beta}$, vektor pospeška pa $\vec{a} = 2\vec{\alpha}$. Vidimo, da sta vektorja hitrosti in pospeška vzporedna natanko tedaj, ko sta vzporedna tudi $\vec{\alpha}$ in $\vec{\beta}$. Vektorja hitrosti in pospeška pa sta vzporedna natanko tedaj, ko je gibanje premočrtno. Vidimo, da se tir danega gibanja seka samo v primeru, ko je gibanje premočrtno.

3. Točka se giblje po Arhimedovi spirali $r = r_0\varphi$, $\varphi = \omega t$, $t \geq 0$. Tu je ω konstanta. Izračunaj vektor hitrosti in pospeške ter njuni velikosti.

Rešitev: Gibanje je podano v polarnem koordinatnem sistemu. Uporabili bomo formuli

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi, \qquad \vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r + \left(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi.$$

Izračunajmo $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}r_0\omega t = r_0\omega$. Vidimo, da je radialna hitrost konstantna. Potem je $\ddot{r} = 0$. Podobno $\dot{\varphi} = \omega$ in $\ddot{\varphi} = 0$. Vstavimo izračunano v formuli za hitrost in pospešek. Tako dobimo

$$\vec{v} = r_0\omega\,\vec{e}_r + r_0\omega^2 t\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi, \qquad \vec{a} = -r_0\omega^3 t\,\vec{e}_r + 2r_0\omega^2\,\vec{e}_\varphi.$$

Naj bo vektor $\vec{c}$ podan v polarnem koordinatnem sistemu $\vec{c} = c_1\,\vec{e}_r + c_2\,\vec{e}_\varphi$. Njegova velikost je potem $|\vec{c}| = \sqrt{\vec{c}\cdot\vec{c}} = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$. Potem sta velikosti vektorjev $\vec{v}$ in $\vec{a}$

$$v = |\vec{v}| = r_0\omega\sqrt{1+\omega^2 t^2}, \qquad a = |\vec{a}| = r_0\omega^2\sqrt{4+\omega^2 t^2}.$$

Tu smo privzeli, da je $\omega > 0$. Izračunajmo še

$$\vec{v}\cdot\vec{a} = r_0^2\omega^4 t.$$

Točka pospešuje za $t > 0$.

4. Točka se giblje po logaritemski spirali $r = r_0\,\mathrm{e}^{\varphi}$, $\varphi = \omega t$, kjer je ω konstanta. Izračunaj vektor hitrosti in pospeške ter njuni velikosti. Izračunaj tudi kot med radij vektorjem in vektorjem hitrosti.

Rešitev: Tudi sedaj je gibanje podano v polarnem koordinatnem sistemu. Izračunajmo $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}r_0\,\mathrm{e}^{\omega t} = r_0\omega\,\mathrm{e}^{\omega t}$ in $\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = r_0\omega^2\,\mathrm{e}^{\omega t}$. ter $\dot{\varphi} = \omega$ in $\ddot{\varphi} = 0$. Vstavimo izračunano v formuli za hitrost in pospešek. Tako dobimo

$$\vec{v} = r_0\omega\,\mathrm{e}^{\omega t}\ \vec{e}_r + r_0\omega\,\mathrm{e}^{\omega t}\ \vec{e}_\varphi, \qquad \vec{a} = 2r_0\omega^2\,\mathrm{e}^{\omega t}\ \vec{e}_\varphi.$$

Velikosti sta

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{2}r_0\omega\,\mathrm{e}^{\omega t}, \qquad a = 2r_0\omega^2\,\mathrm{e}^{\omega t}\,.$$

Izračunajmo še kot θ med $\vec{r}$ in $\vec{r}$. Velja

$$\cos\theta = \frac{\vec{v}\cdot\vec{r}}{|\vec{v}|\,|\vec{r}|} = \frac{r_0^2\omega\,\mathrm{e}^{2\omega t}}{\sqrt{2}r_0^2\omega\,\mathrm{e}^{2\omega t}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vektorja oklepata kot $\pi/4$.

1.3 Dinamika točke

1.3.1 Rešene naloge

1. Obravnavaj prosti pad:

   (a) brez upoštevanja upora zraka;

   (b) z upoštevanjem upora zraka.

Rešitev: Postavimo os x v smeri sile teže z izhodiščem v začetnem položaju. Če točka v začetnem trenutku nima komponente brzine pravokotne na smer navpičnice, je gibanje premočrtno in lahko namesto vektorske oblike Newtonove enačbe uporabimo skalarno enačbo $m\ddot{x} = f$, kjer je f rezultanta vseh sil. V našem primeru točko spustimo v prosti pad. Začetna hitrost je enaka nič in gibanje je premočrtno.

(a) V primeru braz upoštevanja sile upora deluje na materialno točko samo sila teže $f = mg$. Newtonova enačba je se tako glasi $m\ddot{x} = mg$ oziroma $\ddot{x} = g$. Potem je $\dot{x} = gt + C_1$, kjer je C_1 integracijska konstanta, ki jo določa začetni pogoj. Ker je $\dot{x}(t = 0) = 0$, je $C_1 = 0$. Položaj dobimo še z eno integracijo. Dobimo $x = \frac{1}{2}gt^2 + C_2$. Ker je $x(t = 0) = 0$, je $C_2 = 0$ in tako $x = \frac{1}{2}gt^2$. Vidimo, da je gibanje natanko določeno z Newtonovo enačbo in začetnima pogojema, ki določata integracijski konstanti C_1 in C_2. Iz dobljene enačbe gibanja sledi, da hitrost narašča brez meje, saj je $\dot{x} = gt$.

(b) Sedaj obravnavajmo gibanje z uporom zraka. Ker točko spustimo, je začetna hitrost nič in zato uporabimo linearen zakon upora $F_\mathrm{u} = -k\dot{x}$, kjer je k koeficient upora. Njegova enota je kg/s. Enačba gibanja je $m\ddot{x} = mg - k\dot{x}$. Enačbo delimo z m in označimo $\gamma = k/m$. Tako dobimo $\ddot{x} = g - \gamma\dot{x}$, oziroma

$$\dot{v} = g - \gamma v, \tag{1.2}$$

kjer je $v = \dot{x}$. Dobili smo linearno diferencialno enačbo prvega reda za v. Iščemo njeno splošno rešitev, ki bo odvisna od dveh integracijskih konstant. Posebno, pravimo ji tudi partikularna rešitev, rešitev enačbe (1.2) znamo poiskati. Vprašajmo se, ali konstantna funkcija $v = v_1$ reši (1.2)? Vidimo, da jo reši, če je $v_1 = g/\gamma$. Pišimo $v_0 = v - v_1$ in poglejmo kakšni enačbi zadošča v_0, če v reši (1.2). Izračunajmo

$$\dot{v} = \dot{v}_0 + \dot{v}_1 = \dot{v}_0 = g - \gamma v = g - \gamma v_0 - \gamma v_1 = \gamma v_0.$$

Vidimo, da je $v = v_0 + v_1$ rešitev (1.2), če je v_0 rešitev enačbe

$$\dot{v}_0 = -\gamma v_0.$$

Dobljeno enačbo znamo rešiti. Rešitev je $v_0 = C_1\,\mathrm{e}^{-\gamma t}$ in tako

$$v = v_0 + v_1 = C_1\,\mathrm{e}^{-\gamma t} + g/\gamma.$$

Iz začetnega pogoja $v(0) = 0$ sledi, da je $C_1 = -g/\gamma$ in tako

$$v = \frac{g}{\gamma}\left(1 - \mathrm{e}^{-\gamma t}\right). \tag{1.3}$$

V primeru z uporom zraka hitrost ne narašča več linearno. Še več hitrost ne narašča brez meja, je navzgor omejena z $\frac{g}{\gamma}$, saj je $\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-\gamma t} = 0$. Položaj dobimo z integracijo brzine. Iz (1.3) sledi

$$x = \frac{g}{\gamma}t + \frac{g}{\gamma^2}\,\mathrm{e}^{-\gamma t} + C_2.$$

Konstanto C_2 določa začetni pogoj $x(t = 0) = 0$. Od tof $C_2 = -g/\gamma^2$ in

$$x = \frac{g}{\gamma}t + \frac{g}{\gamma^2}\left(\mathrm{e}^{-\gamma t} - 1\right).$$

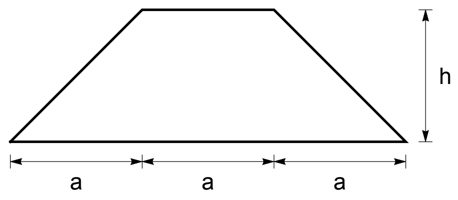
1.4 Masno središče

1.4.1 Rešene naloge

1. Določi masno središče homogenega trapeza na skici.

   (a) Trapez obravnavaj kot sestavljen lik iz dveh trikotnikov in pravokotnika.

   (b) Trapez obravnavaj kot trikotnik brez vršnega trikotnika.



Slika 1.5: Homogeni trapez.

Rešitev:

(a) Lik je sestavljen iz treh likov, levi trikotnik, pravokotnik in desni trikotnik. Koordinatno os x postavimo v smeri osnovnice, koordinatno središče pa tako, da je os y os zrcalne simetrije. Potem je očitno $x_* = 0$, y_* pa izračunamo s po formuli

$$y_* = \frac{1}{A_1 + A_2 + A_3} \left(A_1 y_1^* + A_2 y_2^* + A_3 y_3^* \right).$$

Tu smo upoštevali, da je trapez homogen in je masa enaka površini krat gostota. Sestavimo tabelo

Lik	A	y_*
Levi trikotnik	$\frac{1}{2}ah$	$\frac{1}{3}h$
Pravokotnik	ah	$\frac{1}{2}h$
Desni trikotnik	$\frac{1}{2}ah$	$\frac{1}{3}h$

Ploščina trapeza je potem vsota ploščin $A = 2ah$, masno središče pa je

$$y_* = \frac{1}{2ah} \left(\frac{1}{6}ah^2 + \frac{1}{2}ah^2 + \frac{1}{6}ah^2 \right) = \frac{5}{12}h.$$

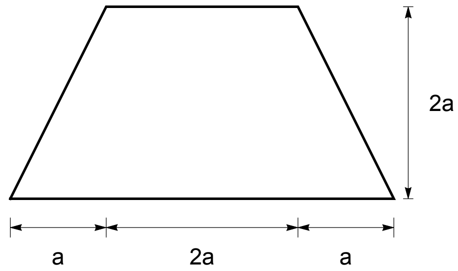
(b) Stranici trapeza podaljšamo do skupnega presečišča. Tako dobimo trikotnik z višino $\frac{3}{2}h$, trapez pa je dan kot razlika tega trikotnika in trikotnika na trapezu. Sestavimo tabelo

Lik	A	y_*
Veliki trikotnik	$\frac{9}{4}ah$	$\frac{1}{2}h$
Mali trikotnik	$\frac{1}{4}ah$	$\frac{7}{6}h$

Ploščina trapeza je potem razlika ploščin, torej $A = \frac{9}{4}ah - \frac{1}{4}ah = 2ah$, masno središče pa je

$$y_* = \frac{1}{2ah} \left(\frac{9}{8}ah^2 - \frac{7}{24}ah^2 \right) = \frac{h}{16} \left(9 - \frac{7}{3} \right) = \frac{5}{12}h.$$

2. Nehomogeni trapez na skici je sestavljen iz dveh homogenih trikotnikov s površinsko gostoto ρ_1 in in homogenega kvadrata s površinsko gostoto ρ_2. Dolči gostoto ρ_2, da bo imel trapez masno središče v višini 3/8 višine trapeza nad osnovno ploskvijo.



Slika 1.6: Nehomogeni trapez.

Rešitev: Sestavimo tabelo

Lik	m	y_*
Levi trikotnik	$\rho_1 a^2$	$\frac{2}{3}a$
Kvadrat	$4a^2\rho_2$	a
Desni trikotnik	$\rho_1 a^2$	$\frac{2}{3}a$

Masno središče trapeza je

$$y_* = \frac{4\rho_1 a^3/3 + 4a^3\rho_2}{2\rho_1 a^2 + 4a^2\rho_2} = \frac{2\rho_1/3 + 2\rho_2}{\rho_1 + 2\rho_2} a.$$

Določiti moramo ρ_2 tako, da bo $y_* = \frac{3}{8}h = \frac{3}{4}a$. Tako dobimo enačbo za ρ_2

$$\frac{2\rho_1/3 + 2\rho_2}{\rho_1 + 2\rho_2} = \frac{3}{4}.$$

Enačbo poenostavimo v

$$8\rho_1 + 24\rho_2 = 9\rho_1 + 18\rho_2.$$

Rešitev je

$$\rho_2 = \frac{1}{6}\rho_1.$$

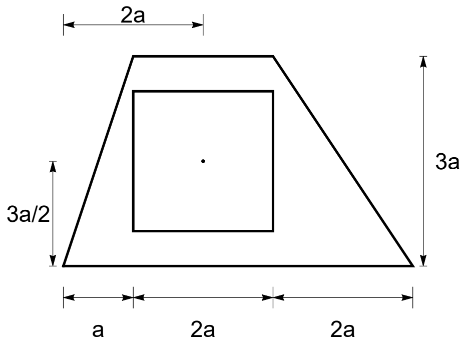
3. Naj bo P_* masno središče homogenega telesa $\mathcal{B}$. Iz telesa izrežemo kroglo s središčem v P_* in polmerom r tako, kjer je r dovolj majhen, da je krogla vsebovana v telesu. Pokaži, da se masno središče tako nastalega telesa ujema z masnim središčem prvotnega telesa.

   Rešitev: Naj bo m masa telesa $\mathcal{B}$, m_0 pa masa izrezane krogle s polmerom r. Z $\vec{r}_*$ označimo krajevni vektor do masnega središča $\mathcal{B}$, z $\vec{r}'_*$ pa masno središče novo nastalega telesa. Potem je

   $$\vec{r}'_* = \frac{m\vec{r}_* - m_0\vec{r}_*}{m - m_0} = \vec{r}_*.$$

   Masno središče novo nastalega telesa se ujema s prvotnim masnim središčem. V primeru, če je r tako velik, da krogla ni vsebovana vsa v $\mathcal{B}$ ima telo z luknjo lahko masno središče v drugi točki.

4. Trapez na skici ima kvadratni izrez tako kot kaže skica. Določi njegovo masno središče, če je trapez homogen.



Slika 1.7: Trapez z izrezom.

Rešitev: Prvo bomo določili masno središče trapeza brez izreza, nato pa upoštevali, da ima izrez. Za izračun koordinat x_* in y_* masnega središča trapeza brez izreza pa sestavimo tabelo

Lik	A	x_*	y_*
Levi trikotnik	$3a^2/2$	$2a/3$	a
Kvadrat	$6a^2$	$2a$	3a/2
Desni trikotnik	$3a^2$	$3a + 2a/3$	a

Površina trikotnika je $A_1 = 21a^2/2$. Koordinati masnega središča trapeza sta

$$x_1 = \frac{16a}{7}, \qquad y_1 = \frac{9a}{7}.$$

Upoštevajmo sedaj izrez. Površina izreza je $A_2 = 4a^2$, njegovo središče pa ima koordinati $x_2 = 2a$, $y_2 = 3a/2$. Potem je

$$x_* = \frac{x_1 A_1 - x_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{32}{13}a, \qquad y_* = \frac{y_1 A_1 - y_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{15}{13}a.$$

5. Pravokotnik na skici ima pravokotni izrez tako kot kaže skica, ($a = 4a_0$, $b = 5a_0$, $a_1 = a_2 = a_0$, $b_1 = a_0$, $b_2 = 2a_0$).

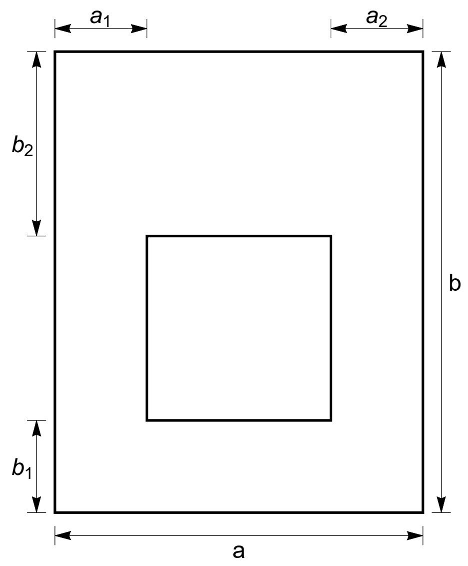
   (a) Določi njegovo masno središče.

   (b) Določi njegovo masno središče, če je gostota notranjega pravokotnika dvakrat večja kot gostota okvirja.

Rešitev: Postavimo koordinatni sistem v smereh stranic zunanjega pravokotnika z osjo x v smeri stranice z dolžino a. Zaradi simetrije je potem $x_* = a/2$ v obeh primerih, y_* pa izračunamo po formuli

$$y_* = \frac{\rho_1 A_1 y_1^* + \rho_2 A_2 y_2^*}{\rho_1 A_1 + \rho_2 A_2},$$

kjer je A_1 površina pravokotnika $a \times b$, A_2 površina notranjega pravokotnika, ρ_1 in ρ_2 njuni gostoti, y_1^* in y_2^* pa njuni masni središči. V primeru izreza je $\rho_2 = -\rho_1$, v drugem primeru pa $\rho_2 = \rho_1$. V primeru, če bi bil pravokotnik $a \times b$ homogen bi vzeli $\rho_2 = 0$.



Slika 1.8: Trapez z izrezom.

Notranji pravokotnik ima dimenzije $a - 2a_1$ v smeri osi x in $b - b_1 - b_2$ v smeri osi y. Nadalje je $y_1^* = b/2$ in $y_2^* = b_1 + (b - b_1 - b_2)/2$. Če vstavimo podatke dobimo $A_1 = 20a_0^2$ in $A_2 = 4a_0^2$ ter $y_1^* = 5a_0/2$ in $y_2^* = 2a_0$. Po kratkem računu potem dobimo v prvem primeru

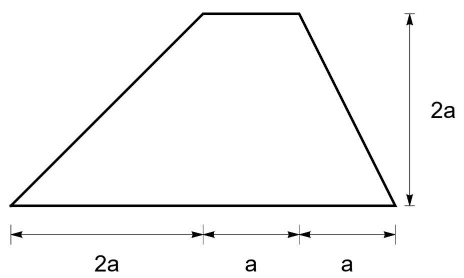
$$y_* = \frac{21a_0}{8},$$

v drugem pa

$$y_* = \frac{29a_0}{12}.$$

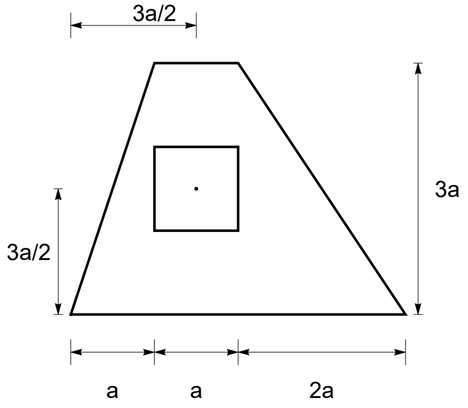
1.4.2 Dodatne naloge

1. Določi masno središče homogenega trapeza na skici. **Rešitev:** $x_* = 11a/5$, $y_* = 4a/5$.



2. Določi masno središče homogenega trapeza z izrezom. **Rešitev:** $x_* = 24a/13$, $y_* = 15a/13$.

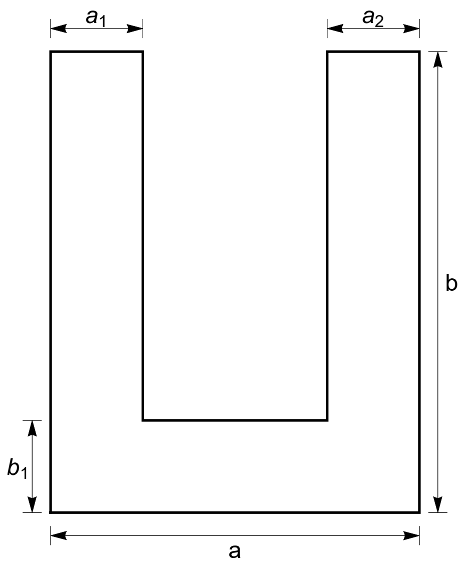
3. Izračunaj masno središče nehomogenega trapeza, kjer je namesto izreza s predhodne naloge krog z dvojno površinsko gostoto kot ostali del trapeza. **Rešitev:** $x_* = 30a/17$, $y_* = 21a/17$.



4. Določi masno središče U preseka na skici z dimenzijami $a = 4a_0$, $b = 5a_0$, $a_1 = a_2 = a_0$, $b_1 = a_0$.

   (a) Kot razliko dveh pravokotnikov.

   (b) Kot unijo treh pravokotnikov.



Rešitev: $x_* = a_0/2$, $y_* = 13a_0/6$.

Poglavje 2

Sistem sil

2.1 Ravninski sistem sil

2.1.1 Rešene naloge

1. Dan je ravninski sistem sil $\mathcal{F} = \{(P_1, \vec{F}_1), (P_2, \vec{F}_2), (P_3, \vec{F}_3), (P_4, \vec{F}_4)\}$, kjer imajo prijemališča sil koordinate $P_1 = (0, 2a)$, $P_2 = (a, -2a)$, $P_3 = (2a, -a)$, $P_4 = (-2a, -2a)$, sile pa so $\vec{F}_1 = F_0(-2\vec{\imath} - \vec{\jmath})$, $\vec{F}_2 = F_0(3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath})$, $\vec{F}_3 = 2F_0\vec{\imath}$, $\vec{F}_4 = F_0(-2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath})$.

   (a) Izračunaj rezultanto sistema sil.
   (b) Izračunaj rezultanto navora sistema sil glede na pol v koordinatnem izhodišču.
   (c) Izračunaj invarianto sistema sil.
   (d) Določi os sistema.

   Rešitev:

   (a) Rezultanta sistema sil je $\vec{R}(\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^{4} \vec{F}_i = F_0(\vec{\imath} - 5\vec{\jmath})$.
   (b) Izračunajmo
   $$\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \sum_{i=1}^{4} \vec{OP}_i \times \vec{F}_i = 4aF_0\vec{k} + 4aF_0\vec{k} + 2aF_0\vec{k} + 0aF_0\vec{k} = 10aF_0\vec{k}.$$
   (c) Invarianta sistema sil je enaka nič, ker je sistem ravninski. Ker je rezultanta sil različna od nič, sistem sil ni dvojica in ima skupno prijemališče, ki leži na osi sistema.
   (d) Os sistema je premica v smeri $\vec{R}(\mathcal{F})$, ki gre skozi točko P_0 dano s krajevnim vektorjem
   $$\vec{OP}_0 = \frac{\vec{R}(\mathcal{F}) \times \vec{N}(\mathcal{F}, O)}{\vec{R}(\mathcal{F}) \cdot \vec{R}(\mathcal{F})} = \frac{5a}{13}(-5\vec{\imath} - \vec{\jmath}).$$

2. Dan je ravninski sistem sil $\mathcal{F} = \{(P_1, \vec{F}_1), (P_2, \vec{F}_2), (P_3, \vec{F}_3), (P_4, \vec{F}_4)\}$, kjer imajo prijemališča sil koordinate $P_1 = (-a, -2a)$, $P_2 = (2a, 0)$, $P_3 = (-2a, a)$, $P_4 = (2a, 2a)$, sile pa so $\vec{F}_1 = F_0(-3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath})$, $\vec{F}_2 = F_0(\vec{\imath} + \vec{\jmath})$, $\vec{F}_3 = 2F_0(-\vec{\imath} + \vec{\jmath})$, $\vec{F}_4 = F_0(2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath})$.

   (a) Izračunaj rezultanto sistema sil.
   (b) Izračunaj rezultanto navora sistema sil glede na pol v koordinatnem izhodišču.
   (c) Določi os sistema.
   (d) Reduciraj sistem sil na sistem dveh sil s prijemališčem v $Q_1 = (a, 0)$ in $Q_2 = (a, a)$.

Rešitev:

(a) Rezultanta sistema sil je $\vec{R}(\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^{4} \vec{F}_i = F_0(-2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath})$.

(b) Rezultanta navorov glede na izhodišče je

$$\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \sum_{i=1}^{4} \vec{OP}_i \times \vec{F}_i = -2aF_0\vec{k}.$$

(c) Sistem sil ima skupno prijemališče, ki gre skozi točko P_0 dano s krajevnim vektorjem

$$\vec{OP}_0 = \frac{\vec{R}(\mathcal{F}) \times \vec{N}(\mathcal{F}, O)}{\vec{R}(\mathcal{F}) \cdot \vec{R}(\mathcal{F})} = -\frac{a}{5}(2\vec{\imath} + \vec{\jmath}).$$

(d) Redukcija ravninskega sistema sil na sistem dveh sil je vedno možna. Ni pa enolična, saj lahko sistemu sil dodamo ravnovesni par sil v smeri zveznice med Q_1 in Q_2. Iščemo sistem sil $\mathcal{G} = \{(Q_1, \vec{G}), (Q_2, \vec{H})\}$. Sili $\vec{G}_1$ in $\vec{G}_2$ bomo določili iz pogojev

$$\begin{aligned}
\vec{G} + \vec{H} &= \vec{R}(\mathcal{F}), \\
\vec{N}(\mathcal{G}, Q_1) &= \vec{N}(\mathcal{F}, Q_1), \\
\vec{N}(\mathcal{G}, Q_2) &= \vec{N}(\mathcal{F}, Q_2), \\
\vec{G} \cdot \vec{Q_1Q_2} &= 0.
\end{aligned}$$

Zadnji pogoj enolično določa sistem $\mathcal{G}$. Z njim smo izbrali tak ravnvesni par sil, da je $\vec{G}_1$ pravokotna na zveznico. Zapišimo $\vec{G} = F_0(g_1\vec{\imath} + g_2\vec{\jmath})$ in $\vec{H} = F_0(h_1\vec{\imath} + h_2\vec{\jmath})$ in izračunajmo posebej

$$\vec{N}(\mathcal{F}, Q_1) = \vec{Q_1P_0} \times \vec{R}(\mathcal{F}) = -\frac{a}{5}(7\vec{\imath} + \vec{\jmath}) \times F_0(-2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}) = -6aF_0\vec{k}$$

ter

$$\vec{N}(\mathcal{F}, Q_2) = \vec{Q_1P_0} \times \vec{R}(\mathcal{F}) = -\frac{a}{5}(7\vec{\imath} + 6\vec{\jmath}) \times F_0(-2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}) = -8aF_0\vec{k}.$$

Potem se naš sistem enačb glasi

$$\begin{aligned}
g_1 + h_1 &= -2, \\
g_2 + h_2 &= 4, \\
-h_1 &= -6, \\
g_1 &= -8, \\
g_2 &= 0.
\end{aligned}$$

Rešitev je $\vec{G} = -8F_0\vec{\imath}$ in $\vec{H} = F_0(6\vec{\imath} + 4\vec{\jmath})$.

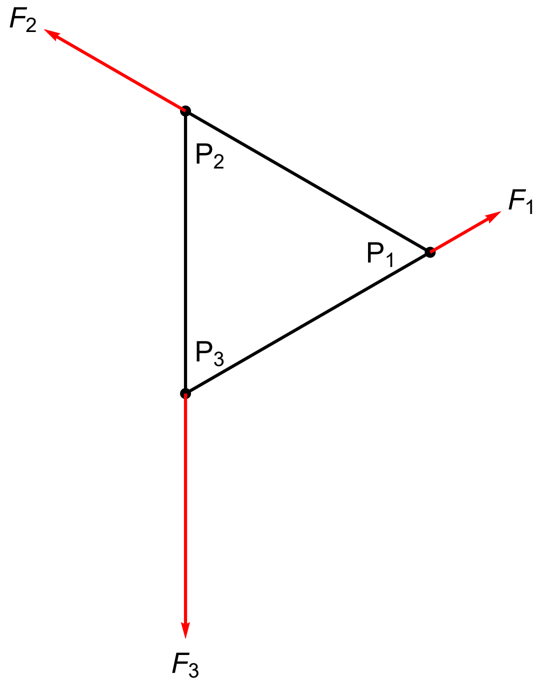
3. Enakostranični trikotnik z dolžino stranice a je obremenjen s silami F_i, $i = 1, 2, 3$ tako kot kaže slika.

   (a) Določi sistem sil.

   (b) Določi pogoj na velikosti sil F_i, $i = 1, 2, 3$ tako, da bo rezultanta danega sistema sil enak nič.

   (c) Določi pogoj na velikosti sil F_i, $i = 1, 2, 3$ tako, da bo rezultanta navorov danega sistema sil glede na središče trikotnika enak nič. Kolikšna je potem rezultanta navorov s polom v P_1.

   (d) Določi pogoj na velikosti sil F_i, $i = 1, 2, 3$, da bo sistem sil ravnovesen.



Rešitev:

(a) Postavimo izhodišče O koordinatnega sistema v središče mnogokotnika. Prijemališča sil so potem

$$P_1 = \left(\frac{a}{\sqrt{3}}, 0, 0\right), \qquad P_2 = \left(-\frac{a}{2\sqrt{3}}, \frac{a}{2}, 0\right), \qquad P_3 = \left(-\frac{a}{2\sqrt{3}}, -\frac{a}{2}, 0\right),$$

sile pa so

$$\vec{F}_1 = F_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\imath} + \frac{1}{2}\vec{\jmath}\right), \qquad \vec{F}_2 = F_2\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\vec{\imath} + \frac{1}{2}\vec{\jmath}\right), \qquad \vec{F}_3 = -F_3\vec{\jmath}.$$

(b) Rezultanta sil je

$$\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}(F_1 - F_2)\vec{\imath} + (\frac{1}{2}F_1 + \frac{1}{2}F_2 - F_3)\vec{\jmath}.$$

Iz pogoja $\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{0}$ sledi $F_1 = F_2 = F_3$.

(c) Rezultanta navorov pa je

$$\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \sum_{i=1}^{3} O\vec{P}_i \times \vec{F}_i = \frac{a}{2\sqrt{3}}(F_1 + F_2 + F_3)\vec{k}.$$

Rezultanta navorov je enaka nič, če je $(F_1 + F_2 + F_3) = 0$. Rezultanta navorov v P_1 je

$$\vec{N}(\mathcal{F}, P_1) = \sum_{i=1}^{3} \overrightarrow{P_1P_i} \times \vec{F}_i = \frac{a}{2\sqrt{3}}F_3\vec{k}.$$

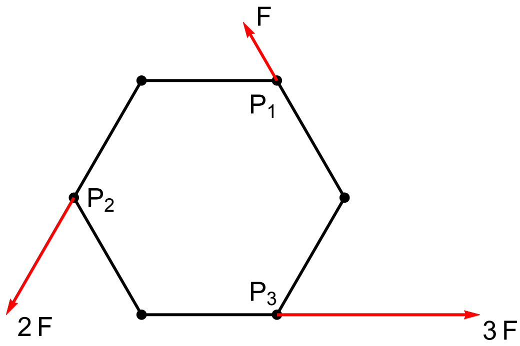
(d) Sistem sil je ravnovesen, če je $\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{0}$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, P_1) = \vec{0}$. Potem je $F_1 = F_2 = F_3 = 0$.

4. Pravilni šestkotnik z dolžino stranice a je obremenjen tako kot kaže slika.

   (a) Zapiši sistem sil $\mathcal{F}$.

   (b) Izračunaj rezultanto sil $\vec{R}(\mathcal{F})$ in navorov $\vec{N}(\mathcal{F}, O)$ s polom O v središču mnogokotnika.

   (c) Določi os sistema.



Rešitev:

(a) Postavimo izhodišče koordinatnega sistema v središče mnogokotnika. Prijemališča sil so potem $P_1(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2})$, $P_2(-a, 0)$ in $P_3(\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}a}{2})$, sile pa so $\vec{F}_1 = F(-\frac{1}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath})$, $\vec{F}_2 = -F(\vec{\imath} + \sqrt{3}\vec{\jmath})$ in $\vec{F}_3 = 3F\vec{\imath}$.

(b) Rezultanta sil je

$$\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = F\left(\frac{3}{2}\vec{\imath} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}\right),$$

rezultanta navorov pa je

$$\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \sum_{i=1}^{3} \vec{OP}_i \times \vec{F}_i = aF\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\vec{k} = 3\sqrt{3}aF\vec{k}.$$

Navore lahko izračunamo tudi elementarno brez uporabe vektorskega produkta. Po polznosti sile lahko vse sile pomaknemo do sredine stranic. Potem je ročica pravokotna na silo in tako

$$N = \frac{a\sqrt{3}}{2}(F + 2F + 3F) = 3\sqrt{3}aF.$$

(c) Krajevni vektor do točke P_0 na osi sistema izračunamo po formuli

$$\vec{OP}_0 = \frac{\vec{R}(\mathcal{F}) \times \vec{N}(\mathcal{F}, O)}{\vec{R}(\mathcal{F}) \cdot \vec{R}(\mathcal{F})} = -\frac{3a}{2}\left(\vec{\imath} + \sqrt{3}\vec{\jmath}\right).$$

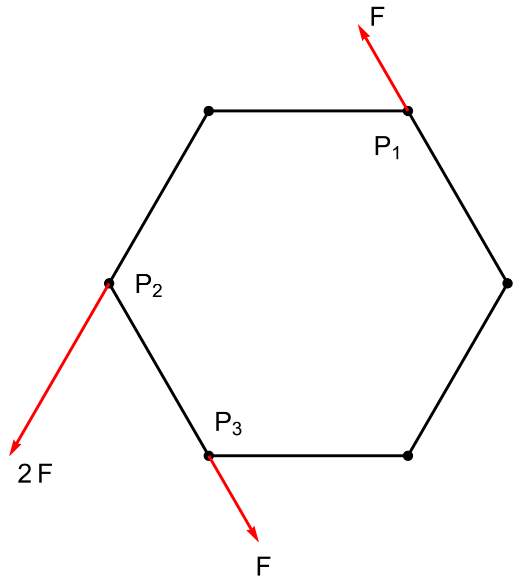
Ker je sistem sil ravninski in ni dvojica, ima dani sistem sil skupno prijemališče na osi sistema. Velja $\vec{N}(\mathcal{F}, P_0) = \vec{0}$.

5. Pravilni šestkotnik z dolžino stranice a je obremenjen tako kot kaže slika.

   (a) Zapiši sistem sil $\mathcal{F}$.

   (b) Izračunaj rezultanto sil $\vec{R}(\mathcal{F})$ in navorov $\vec{N}(\mathcal{F}, O)$ s polom O v središču mnogokotnika.

   (c) Določi os sistema.



Rešitev:

(a) Postavimo izhodišče koordinatnega sistema v središče mnogokotnika. Prijemališča sil so potem $P_1(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2})$, $P_2(-a, 0)$ in $P_3(-\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}a}{2})$, sile pa so $\vec{F_1} = F(-\frac{1}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath})$, $\vec{F_2} = -F(\vec{\imath} + \sqrt{3}\vec{\jmath})$ in $\vec{F_3} = F(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

(b) Rezultanta sil je

$$\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = F\left(-\vec{\imath} - \sqrt{3}\vec{\jmath}\right),$$

rezultanta navorov pa je

$$\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \sum_{i=1}^{3} \vec{OP_i} \times \vec{F_i} = aF\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3}aF\vec{k}.$$

(c) Krajevni vektor do točke P_0 na osi sistema izračunamo po formuli

$$\vec{OP_0} = \frac{\vec{R}(\mathcal{F}) \times \vec{N}(\mathcal{F}, O)}{\vec{R}(\mathcal{F}) \cdot \vec{R}(\mathcal{F})} = a\left(-\frac{3}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}\right).$$

Točka P_0 je skupno prijemališče sil.

6. Dan je ravninski sistem sil $\mathcal{F} = \{(P_i, \vec{F_i}) : i = 1, \ldots, n\}$, kjer je $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, P_i so oglišča pravilnega n-kotnika, $\vec{F_i}$ pa so sile, vse po velikosti enake, in usmerjene od oglišča P_i do naslednjega oglišča v smeri urinega kazalca.

   (a) Izračunaj rezultanto sistema sil.

   (b) Izračunaj rezultanto navora sistema sil glede na pol v središču mnogokotnika.

   (c) Reduciraj dani sistem sil.

Rešitev:

(a) Označimo z F_0 velikost sil in z r_0 polmer očrtane krožnice mnogokotnika. Sila $\vec{F}_i$ je enaka $\vec{F}_i = F_0(P_{i+1} - P_i)/a$, kjer je $a = |P_{i+1} - P_i|$ dolžina stranice mnogokotnika in $P_{n+1} = P_1$. Tu smo s $P_{i+1} - P_i$ zapisali vektor od P_i do P_{i+1}. Rezultanta sistema sil je

$$\vec{R}(\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \frac{F_0}{a} \sum_{i=1}^{n} (P_{i+1} - P_i) = \frac{F_0}{a} \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i).$$

Tu smo z $\vec{r}_i$ zapisali krajevni vektor od središča O mnogokotnika do oglišča P_i. Vsota je enaka

$$\sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i) = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + (\vec{r}_3 - \vec{r}_2) + \ldots + (\vec{r}_1 - \vec{r}_n) = \vec{0}$$

in tako $\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{0}$.

(b) Izračunajmo sedaj

$$\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i.$$

Postavimo koordinatni sistem tako, da mnogokotnik leži v ravnini xy. Potem so vektorji $\vec{r}_i \times \vec{F}_i$ v smeri normale na ravnino, torej v smeri vektorja $\vec{k}$. Njihova velikost je

$$\left| \vec{r}_i \times \vec{F}_i \right| = a F_0 \sin \alpha,$$

kje je α kot med $\vec{r}_i$ in $\vec{F}_i$. Kot mnogokotnika med $\vec{r}_i$ in $\vec{r}_{i+1}$ je $\varphi = 2\pi/n$. Ker je trikotnik z oglišči O, P_i in P_{i+1} enakokraki, je kot med $\vec{r}_i = P_i - O$ in $\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i = P_{i+1} - P_i$ enak $\alpha = \pi(\frac{1}{2} - \frac{1}{n})$. Potem je $\sin \alpha = \cos \pi/n$. Potemtakem je

$$\vec{N}(\mathcal{F}, O) = n r_0 F_0 \cos \pi/n \vec{k}.$$

(c) Ker je $\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{0}$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, O) \neq \vec{0}$, je sistem sil dvojica.

2.1.2 Dodatne naloge

1. Dan je ravninski sistem sil $\mathcal{F} = \{(P_1, \vec{F}_1), (P_2, \vec{F}_2), (P_3, \vec{F}_3)\}$, kjer imajo prijemališča sil koordinate $P_1 = (a, -a)$, $P_2 = (0, a)$, $P_3 = (a, 0)$, sile pa so $\vec{F}_1 = F_0(-2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath})$, $\vec{F}_2 = 3F_0\vec{\imath}$, $\vec{F}_3 = F_0(\vec{\imath} + \vec{\jmath})$.

   (a) Izračunaj rezultanto sistema sil.

   (b) Izračunaj rezultanto navora sistema sil glede na pol v koordinatnem izhodišču.

   (c) Določi skupno prijemališče sistema sil $\mathcal{F}$.

   (d) Reduciraj sistem sil na sistem dveh sil s prijemališčem v $Q_1 = (a, -a)$ in $Q_2 = (a, a)$.

Rešitev: $\vec{R}(\mathcal{F}) = F_0(2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath})$, $\vec{N}(\mathcal{F}, O) = -aF_0\vec{k}$, $P_0 = \frac{a}{10}(-2, 1)$, $\vec{G} = -F_0\frac{3}{2}\vec{\imath}$, $\vec{H} = F_0(\frac{7}{2}\vec{\imath} + 4\vec{\jmath})$.

2. Dan je ravninski sistem sil $\mathcal{F} = \{(P_1, \vec{F}_1), (P_2, \vec{F}_2), (P_3, \vec{F}_3), (P_4, \vec{F}_4)\}$, kjer imajo prijemališča sil koordinate $P_1 = (2a, -a)$, $P_2 = (-a, -2a)$, $P_3 = (-2a, 2a)$, $P_4 = (2a, -a)$, sile pa so $\vec{F}_1 = F_0(-\vec{\imath} + 2\vec{\jmath})$, $\vec{F}_2 = -F_0\vec{\imath}$, $\vec{F}_3 = F_0(-3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath})$, $\vec{F}_4 = F_0(-\vec{\imath} + 2\vec{\jmath})$.

   (a) Izračunaj rezultanto sistema sil.

   (b) Izračunaj rezultanto navora sistema sil glede na pol v koordinatnem izhodišču.

   (c) Določi skupno prijemališče sistema sil $\mathcal{F}$.

   (d) Reduciraj sistem sil na sistem dveh sil s prijemališčem v $Q_1 = (a, -a)$ in $Q_2 = (a, a)$.

   Rešitev: $\vec{R}(\mathcal{F}) = F_0(-6\vec{\imath} + 2\vec{\jmath})$, $\vec{N}(\mathcal{F}, O) = 14aF_0\vec{k}$, $P_0 = \frac{7a}{10}(1, 3)$, $\vec{G} = 3F_0\vec{\imath}$, $\vec{H} = F_0(-9\vec{\imath} + 2\vec{\jmath})$.

2.2 Prostorski sistem sil

2.2.1 Rešene naloge

1. Podan je prostorski sistem sil $\vec{F}_1 = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$, $\vec{F}_2 = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$, $\vec{F}_3 = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$, s prijemališči v točkah $P_1(1, 2, 1)$, $P_2(-1, 0, 1)$, $P_3(1, -1, 0)$.

   (a) Izračunaj rezultanto sistema sil.

   (b) Izračunaj rezultanto navora sistema sil glede na pol v koordinatnem izhodišču.

   (c) Izračunaj invarianto sistema sil.

   (d) Določi os sistema.

   Rešitev:

   (a) Rezultanta sistema sil je $\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 2\vec{\imath} + 2\vec{k}$.

   (b) Izračunajmo

   $$\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \sum_{i=1}^{3} \vec{OP}_i \times \vec{F}_i = (\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 3\vec{k}) + (\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + \vec{k}) + (-\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}) = \vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - \vec{k}.$$

   (c) Invarianta sistema sil je $I(\mathcal{F}) = \vec{R}(\mathcal{F}) \cdot \vec{N}(\mathcal{F}, O) = 0$. Ker je $I(\mathcal{F}) = 0$ in $\vec{R}(\mathcal{F}) \neq \vec{0}$, ima sistem sil skupno prijemališče, ki leži na osi sistema.

   (d) Os sistema je premica v smeri $\vec{R}(\mathcal{F})$, ki gre skozi točko P_0 dano s krajevnim vektorjem

   $$\vec{OP}_0 = \frac{\vec{R}(\mathcal{F}) \times \vec{N}(\mathcal{F}, O)}{\vec{R}(\mathcal{F}).\vec{R}(\mathcal{F})} = -\frac{3}{4}\vec{\imath} + \frac{1}{2}\vec{\jmath} + \frac{3}{4}\vec{k}.$$

   Kratek račun

   $$\vec{N}(\mathcal{F}, P_0) = \vec{P_0 O} \times \vec{R}(\mathcal{F}) + \vec{N}(\mathcal{F}, O) = \vec{0}$$

   potrdi, da je P_0 res skupno prijemališče sil.

2. Podan je sistem sil $\vec{F}_1 = F_0(3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k})$, $\vec{F}_2 = F_0(-3\vec{\jmath} + \vec{k})$, $\vec{F}_3 = F_0(-2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 3\vec{k})$ s prijemališči v točkah $P_1(a, 0, a)$, $P_2(2a, 2a, -2a)$, $P_3(-a, 0, 0)$. Dodaj sistemu silo $(P_4, \vec{F}_4)$ tako, da razširjeni sistem sil imel skupno prijemališče v točki $P_0(a, -a, a)$.

Rešitev: Računali bomo brezdimenzijsko, z $a = 1$ in $F_0 = 1$. Za vrnitev v dimenzijski zapis, sile pomnožimo z F_0, položaje z a, navore pa z aF_0. Označimo dani sistem sil s $\mathcal{F}$ in izračunajmo $\vec{N} = \vec{N}(\mathcal{F}, P_0)$. Imamo

$$\vec{N} = \Big((\vec{\imath} - 3\vec{k}) + (-6\vec{\imath} - \vec{\jmath} - 3\vec{k}) + (-4\vec{\jmath} - 4\vec{k})\Big) = (-5\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} - 10\vec{k}).$$

Sistemu sil moramo dodati $(P_4, \vec{F}_4)$ tako, da bo $\overrightarrow{P_0P_4} \times \vec{F}_4 = -\vec{N}$, saj bo potem za razširjeni sistem sil $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cup \{(P_4, \vec{F}_4)\}$ veljalo $\vec{N}(\mathcal{G}, P_0) = \vec{0}$.

Enačba $\overrightarrow{P_0P_4} \times \vec{F}_4 = -\vec{N}$ ima več rešitev. Izberimo P_4 in $\vec{F}_4$ tako, da bodo vektorji $\overrightarrow{P_0P_4}$, $\vec{F}_4$ in $\vec{N}$ med seboj paroma pravokotni. Izberimo prvo $\overrightarrow{P_0P_4} = (3\vec{\imath} + \vec{\jmath} + x\vec{k})$ in določimo x tako, da bo

$$0 = \overrightarrow{P_0P_4} \cdot \vec{N} = -20 - 10x.$$

Rešitev enačbe je $x = -2$ in tako $\overrightarrow{P_0P_4} = 3\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k}$. Sila $\vec{F}_4$ je v smeri $\overrightarrow{P_0P_4} \times \vec{N}$. Potem

$$\vec{F}_4 = f\overrightarrow{P_0P_4} \times \vec{N} = 10f\left(-2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - \vec{k}\right),$$

kjer je f neznanka, ki jo določimo s pogoja

$$-\vec{N} = \overrightarrow{P_0P_4} \times \vec{F}_4 = f\overrightarrow{P_0P_4} \times \left(\overrightarrow{P_0P_4} \times \vec{N}\right) = -f\left|\overrightarrow{P_0P_4}\right|^2 \vec{N} = -14f\vec{N}.$$

Torej $f = 1/14$. Tu smo uporabili formulo $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ in upoštevali, da sta $\overrightarrow{P_0P_4}$ in $\vec{N}$ med seboj pravokotna. Dodana sila je tako

$$\frac{5F_0}{7}\left(-2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - \vec{k}\right)$$

s prijemališčem v

$$P_4 = P_0 + \overrightarrow{P_0P_4} = (4a, 0, -a).$$

3. Dani sistem sil $\vec{F}_1 = F_0(-\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 2\vec{k})$, $\vec{F}_2 = F_0(-\vec{\imath} - 2\vec{\jmath})$, $\vec{F}_3 = F_0(-\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k})$ s prijemališči v točkah $P_1(-a, -2a, 2a)$, $P_2(0, -2a, a)$, $P_3(2a, 2a, -2a)$ uravnovesi s sistemom sil podpor $\vec{A} = A_1\vec{\imath} + A_2\vec{\jmath} + A_3\vec{k}$, $\vec{B} = B_3\vec{k}$, $\vec{C} = C_1(\cos\alpha\vec{\imath} + \sin\alpha\vec{\jmath}) + C_3\vec{k}$ s prijemališči v točkah $A(0, 0, 0)$, $B(a, 0, 0)$ in $C(0, a, 0)$. Ali obstaja rešitev za vsak kot α.

Rešitev: Računali bomo brezdimenzijsko, z $a = 1$ in $F_0 = 1$. Za vrnitev v dimenzijski zapis, sile pomnožimo z F_0, položaje pa z a. Dani sistem sil $\mathcal{F}$ želimo uravnovesiti s silami podpor. Podpora A je fiksna, B je drsna v ravnini xy, C pa je drsna v smeri $\sin\alpha\vec{\imath} - \cos\alpha\vec{\jmath}$. Sistem sil podpor označimo z $\mathcal{G}$.

Izračunajmo $\vec{R}(\mathcal{F}) = -3\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 4\vec{k}$ in

$$\vec{N}(\mathcal{F}, A) = (-8\vec{\imath} - 4\vec{k}) + (2\vec{\imath} - \vec{\jmath} - 2\vec{k}) + (6\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 4\vec{k}) = -3\vec{\jmath} - 2\vec{k}.$$

Tu smo izbrali pol A zato, da bo moment sistema sil podpor glede na A čim enostavnejši. Ravnovesne enačbe so tako

$$\vec{R}(\mathcal{G}) = -\vec{R}(\mathcal{F}) = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath} - 4\vec{k}, \qquad \vec{N}(\mathcal{G}, A) = -\vec{N}(\mathcal{F}, A) = 3\vec{\jmath} + 2\vec{k}.$$

Izračunajmo

$$\vec{R}(\mathcal{G}) = (A_1 + C_1\cos\alpha)\vec{\imath} + (A_2 + C_1\sin\alpha)\vec{\jmath} + (A_3 + B_3 + C_3)\vec{k}$$

in

$$\vec{N}(\mathcal{G}, A) = C_3\vec{\imath} - B_3\vec{\jmath} - C_1 \cos\alpha \vec{k}.$$

Upoštevajmo sedaj zahtevane vrednosti za $\vec{N}(\mathcal{G}, A)$. Potem je

$$B_3 = -3, \qquad C_3 = 0, \qquad C_1 = -2/\cos\alpha.$$

Vidimo, da rešitev obstaja za vsak $\alpha \neq \pm\pi/2$. Z besedami, podpora C ne sme biti drsna v smeri, ki je pravokotna na $\overrightarrow{AC}$. Sedaj ko poznamo B_3, C_1 in C_3 brez težav dobimo

$$A_1 = 5, \qquad A_2 = -1 + 2\tan(\alpha), \qquad A_3 = -1.$$

Dani prostorsk sistem sil moremo vedno enolično uravnovesiti s sistemom sil treh podpor, ki ne ležijo na isti premici in od katerih je ena fiksna, druga drsna v ravnini podpor, tretja pa drsna v ravnini v smeri, ki ni pravoktna na zveznico te podpore s fiksno podporo.

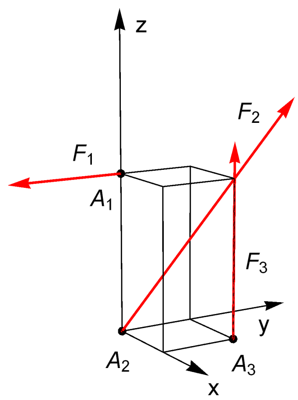
4. Za prostorski sistem sil podan na sliki s silami v smereh stranic in diagonale kvadra dimenzije 1m $\times$1m $\times$2m:

   (a) določi sile in njihova prijemališča;

   (b) izračunaj rezultanto sil in navora glede na pol A_2;

   (c) določi os sistema.

   Velikosti sil so $F_1 = 1\,\text{kN}$, $F_2 = 2/\sqrt{6}\,\text{kN}$, $F_3 = 1\,\text{kN}$.



Rešitev:

(a) Prijemališča sil imajo koordiante $A_1(0,0,2)$, $A_2(0,0,0)$ in $A_3(1,1,0)$, sile pa so $\vec{F}_1 = -\vec{\jmath}\,\text{kN}$, $\vec{F}_2 = \frac{1}{3}(\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k})\,\text{kN}$ in $\vec{F}_3 = \vec{k}\,\text{kN}$. Točka A_2 se sovpada s koordinatnim izhodiščem, zato pišimo v nadaljevanju O namesto A_2.

(b) Rezultanta sil je

$$\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \frac{1}{3}\left(\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 5\vec{k}\right)\,\text{kN},$$

rezultatnta navorov pa

$$\vec{N}(\mathcal{F}, O) = O\vec{A}_1 \times \vec{F}_1 + O\vec{A}_2 \times \vec{F}_2 + O\vec{A}_3 \times \vec{F}_3 = (3\vec{\imath} - \vec{\jmath})\,\text{kNm}.$$

Invarianta sistema je $I(\mathcal{F}) = \vec{R}(\mathcal{F}) \cdot \vec{N}(\mathcal{F}, O) = \frac{5}{3}$. Ker je invarianta različna od nič, sistem sil nima skupnega prijemališča.

(c) Os sistema je taka premica, da je navor s polom v poljubni točki P_0 na tej premici vzporeden rezultanti si. Dobimo jo s formulo

$$\vec{OP_0} = \frac{\vec{R}(\mathcal{F}) \times \vec{N}(\mathcal{F}, O)}{|\vec{R}(\mathcal{F})|^2}.$$

Po krajšem računu tako

$$\vec{OP_0} = \frac{1}{2}(\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + \vec{k})\,\mathrm{m}.$$

2.2.2 Dodatne naloge

1. Podan je prostorski sistem sil $\vec{F_1} = \vec{\imath} - \vec{k}$, $\vec{F_2} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k}$, $\vec{F_3} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$, s prijemališči v točkah $P_1(1, -2, 1)$, $P_2(-1, 0, 2)$, $P_3(1, 0, -1)$.

   (a) Izračunaj rezultanto sistema sil.

   (b) Izračunaj rezultanto navora sistema sil glede na pol v koordinatnem izhodišču.

   (c) Izračunaj invarianto sistema sil.

   (d) Določi os sistema.

   Rešitev: $\vec{R}(\mathcal{F}) = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 3\vec{k}$, $\vec{N}(\mathcal{F}, O) = 2\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} + 3\vec{k}$, $I(\mathcal{F}) = 10$, $\vec{OP_0} = \frac{1}{11}(12\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} + 2\vec{k})$.

2. Podan je sistem sil $\vec{F_1} = F_0(2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k})$, $\vec{F_2} = F_0(\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k})$, $\vec{F_3} = F_0(\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k})$ s prijemališči v točkah $P_1(2a, -2a, a)$, $P_2(-a, -2a, a)$, $P_3(0, 0, 0)$. Dodaj sistemu silo $(P_4, \vec{F_4})$ tako, da razširjeni sistem sil imel skupno prijemališče v točki $P_0(0, a, 0)$.

   Rešitev: $P_4(a, 4a, 0)$, $F_4 = F_0/5(9\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 10\vec{k})$.

3. Dani sistem sil $\vec{F_1} = F_0(-2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath})$, $\vec{F_2} = -2F_0\vec{\imath}$, $\vec{F_3} = F_0(\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k})$ s prijemališči v točkah $P_1(-a, a, a)$, $P_2(-2a, 2a, a)$, $P_3(-2a, -2a, 0)$ uravnovesi s sistemom sil podpor $\vec{A} = A_1\vec{\imath} + A_2\vec{\jmath} + A_3\vec{k}$, $\vec{B} = B_3\vec{k}$, $\vec{C} = C_1\vec{\imath} + C_3\vec{k}$ s prijemališči v točkah $A(0, 0, 0)$, $B(a, a, 0)$ in $C(-a, a, 0)$.

   Rešitev: $\vec{A} = F_0(-3\vec{\imath} + 5\vec{k})$, $\vec{B} = -5F_0\vec{k}$, $\vec{C} = F_0(6\vec{\imath} + \vec{k})$.

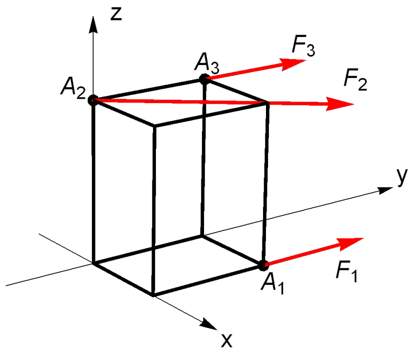
4. Za prostorski sistem sil podan na sliki s silami v smereh stranic in diagonale kvadra dimenzije $3\,\mathrm{m} \times 4\,\mathrm{m} \times 5\,\mathrm{m}$:

   (a) določi sile in njihova prijemališča;

   (b) izračunaj rezultanto sil in navora glede na pol A_2;

   (c) določi os sistema.

   Velikosti sil so $F_1 = 1\,\mathrm{kN}$, $F_2 = 5\,\mathrm{kN}$, $F_3 = 1\,\mathrm{kN}$.



Rešitev:

(a) $A_1(3\,\text{m}, 4\,\text{m}, 0)$, $A_2(0, 0, 5\,\text{m})$, $A_3(0, 4\,\text{m}, 5\,\text{m})$, $F_1 = \text{kN}\vec{\jmath}$, $F_2 = 3\,\text{kN}\vec{\imath} + 4\,\text{kN}\vec{\jmath}$, $F_3 = \text{kN}\vec{\jmath}$.

(b) $\vec{R}(\mathcal{F}) = (3\vec{\imath} + 6\vec{\jmath})\text{kN}$, $\vec{N}(\mathcal{F}, A_2) = (5\vec{\imath} + 3\vec{k})\text{kNm}$.

(c) Os sistema je premica skozi $P_0(2/5\,\text{m}, -1/5\,\text{m}, 13/3\,\text{m})$ v smeri $\vec{R}(\mathcal{F})$.

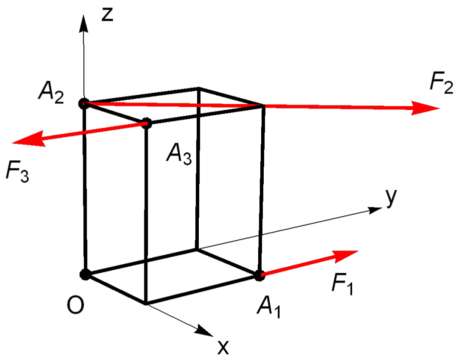
5. Za prostorski sistem sil podan na sliki s silami v smereh stranic in diagonale kvadra dimenzije $3\,\text{m} \times 4\,\text{m} \times 5\,\text{m}$:

   (a) določi sile in njihova prijemališča;

   (b) izračunaj rezultanto sil in navora glede na pol v koordinatnem izhodišču;

   (c) določi os sistema in preveri, da je rezultanta sil vzporedna rezultanti navorov s polom na osi sistema.

   Velikosti sil so $F_1 = 2\,\text{kN}$, $F_2 = 5\,\text{kN}$, $F_3 = 2\,\text{kN}$.



Rešitev:

(a) $A_1(3, 4, 0)\text{m}$, $A_2(0, 0, 5)\text{m}$, $A_3(3, 0, 5)\text{m}$, $F_1 = 2\,\text{kN}\vec{\jmath}$, $F_2 = (3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath})\text{kN}$, $F_3 = -2\,\text{kN}\vec{\jmath}$.

(b) $\vec{R}(\mathcal{F}) = (3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath})\text{kN}$, $\vec{N}(\mathcal{F}, O) = 5(-2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath})\text{kNm}$.

(c) Os sistema je premica skozi $P_0(0, 0, 17/5\,\text{m})$ v smeri $\vec{R}(\mathcal{F})$, $\vec{N}(\mathcal{F}, P_0 = \frac{6}{5}(3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}))\text{kNm}$.

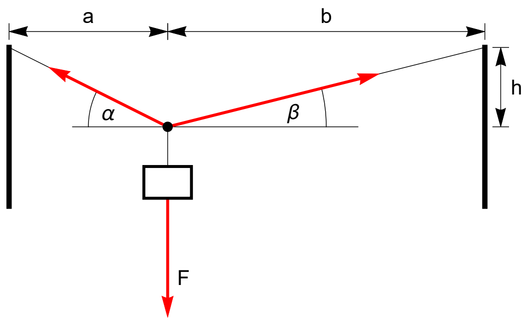
Poglavje 3

Statika togega telesa

3.1 Ravninske naloge

3.1.1 Rešene naloge

1. Na žico med dvema stebroma je obešena utež tako kot kaže skica. Določi sili žic.



Rešitev: Silo leve žice označimo z F_1, desno z F_2. Sistem sil F, F_1 in F_2 ima skupno prijemališče v točki obremenitve. Ravnovesni enačbi sta

$$F_1 \cos\alpha = F_2 \cos\beta, \qquad F_1 \sin\alpha + F_2 \sin\beta = F.$$

Tu sta α in β kota, ki ju žici oklepata z vodoravno smerjo. Potem je $F_2 = F_1 \cos\alpha / \cos\beta$ in

$$F = F_1 (\sin\alpha + \cos\alpha \sin\beta / \cos\beta) = F_1 \sin(\alpha+\beta)/\cos\beta.$$

Sili žic sta tako

$$F_1 = \frac{\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \quad \text{in} \quad F_2 = \frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

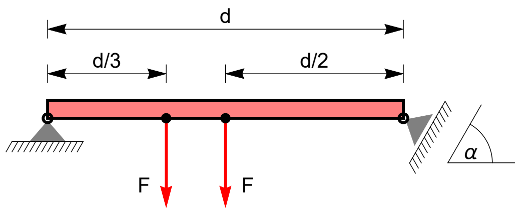
Če upoštevamo, da je

$$\sin\alpha = \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}, \quad \sin\beta = \frac{h}{\sqrt{b^2+h^2}}, \quad \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{b^2+h^2}},$$

dobimo

$$F_1 = \frac{bF\sqrt{a^2+h^2}}{ah+bh}, \qquad F_2 = \frac{aF\sqrt{b^2+h^2}}{ah+bh}.$$

2. Nosilec dolžine d je podprt tako kot kaže skica. Leva podpora je nepomična, desna pa je drsna v smeri ki oklepa kot $\alpha = \pi/3$. Za dano obremenitev določi sile v podporah.



Rešitev: Postavimo koordinatni sistem z izhodiščem v levi podpori in usmerimo os x v smeri nosilca, os y pa navpično navzgor. Silo leve podpore označimo z $\vec{A} = A_1\vec{\imath} + A_2\vec{\jmath}$, silo desne podpore pa z $\vec{B}$. Ker je desna podpora drsna, je smer sile $\vec{B}$ določena, neznana je samo njena velikost. Sila $\vec{B}$ oklepa z navpičnico kot α. Potem je $\vec{B} = B(-\sin\alpha\vec{\imath} + \cos\alpha\vec{\jmath})$. Nosilec je obremenjen v točkah $P_1(d/3, 0)$ in $P_2(d/2, 0)$.

Sile podpor določimo iz ravnovesnih enačb. Rezultanta navorov sistema sil s polom v desni podpori je enak nič. Velja torej

$$-dA_2 + \frac{d}{2}F + \frac{2d}{3}F = 0.$$

Od tod sledi $A_2 = \frac{7}{6}F$. Rezultanta navorov s polom v levi podpori je prav tako enaka nič. Potem

$$-\frac{d}{3}F - \frac{d}{2}F + B\cos\alpha = 0.$$

Rešitev je

$$B = \frac{5F}{6\cos\alpha} = \frac{5F}{3}.$$

Komponento A_1 določimo iz ravnovesnega pogoja, da je vsota vseh sil v vodoravni smeri enaka nič.

$$A_1 - B\sin\alpha = 0 \Longrightarrow A_1 = B\sin\alpha = \frac{5F}{6}\tan\alpha = \frac{5\sqrt{3}}{6}F.$$

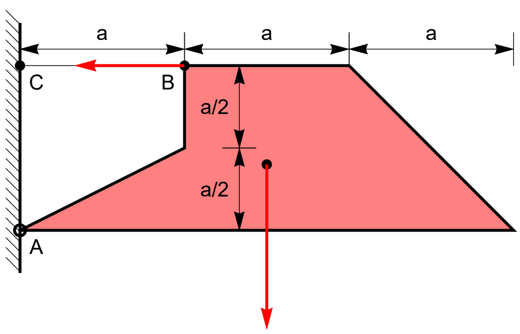
Za kontrolo lahko še preverimo, da je tudi vsota sil v navpični smeri enaka nič. Res,

$$A_2 - F - F + B\cos\alpha = \frac{7}{6}F - 2F + \frac{5F}{6} = 0.$$

3. Homogena plošča s površinsko gostoto ρ, glej skico, je v točki A vpeta na steno s tečajem A, v točki B pa je pripeta z vodoravno vrvico BC.

   (a) Izračunaj koordinati masnega središča plošče.

   (b) Določi silo podpore v A in silo vrvice BC.



Rešitev: Postavimo izhodišče koordinatnega sistemav točko A. Plošča je sestavljena iz treh likov, levi trikotnik, kvadrat in desni trikotnik. Za izračun masnega središča sestavimo tabelo:

Lik	x_*	y_*	A
Levi trikotnik	$\frac{2}{3}a$	$\frac{1}{6}a$	$\frac{1}{4}a^2$
Kvadrat	$\frac{3}{2}a$	$\frac{1}{2}a$	a^2
Desni trikotnik	$\frac{7}{3}a$	$\frac{1}{3}a$	$\frac{1}{2}a^2$

Ploščina lika je $\frac{7}{4}a^2$, koordinati masnega središča pa sta

$$x_* = \frac{4}{7a^2}\left(\frac{2}{3}a\frac{1}{4}a^2 + \frac{3}{2}aa^2 + \frac{7}{3}a\frac{1}{2}a^2\right) = \frac{34}{21}a$$

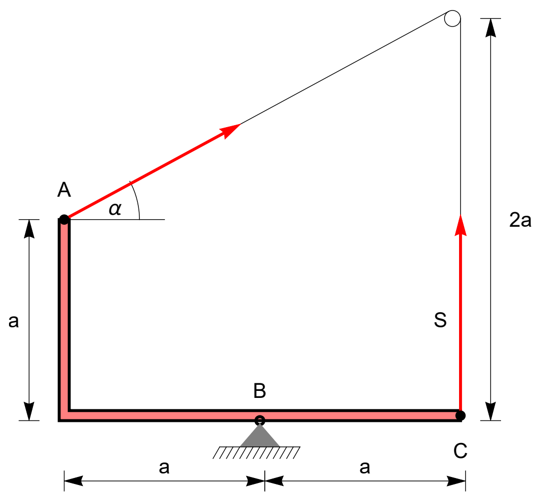
in

$$y_* = \frac{4}{7a^2}\left(\frac{1}{6}a\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}aa^2 + \frac{1}{3}a\frac{1}{2}a^2\right) = \frac{17}{42}a.$$

Določimo sedaj iskane sile. Označimo z A_x in A_y komponenti sile podpore v A v smeri osi x in y, z F pa silo vrvice. Sila teže je $F_g = mg = \rho A g = \frac{7}{4}\rho a^2 g$, kjer je ρ ploščinska gostota. Para sil $\{A_x\vec{\imath}, -F\vec{\imath}\}$ in $\{A_y\vec{\jmath}, -F_g\vec{\jmath}\}$ sta dvojici. Potem je $A_x = F$, $A_y = F_g$. Nadalje iz ravnovesja navora v točki A sledi $aF - x_* F_g = 0$. Potem $F = \frac{17}{6}\rho g a^2$ in tako

$$A_x = \frac{17}{6}\rho g a^2, \qquad A_y = \frac{7}{4}\rho a^2 g.$$

4. L nosilec z dolžinsko gostoto ρ, je v točki B členkasto vpet in na svojih krajiščih preko majhnega škripca povezan z raztegljivo vrvico, glej skico. Določi silo v podpori in silo vrvice.



Rešitev: V vogal nosilca postavimo izhodišče koordinatnega sistema. Sila teže nosilca ima prijemališče v njenem masnem središču. Nosilec je sestavljen iz dveh pravokotnih palic. Masa pokončne palice je $m_1 = \rho a$, njeno masno središče pa je $P_1^* = (0, a/2)$. Masa vodoravne palice je $m_2 = 2\rho a$ z $P_2^* = (a, 0)$. Masno središče L nosilca je tako

$$P_* = \frac{1}{m_1 + m_2}(m_1 P_1^* + m_2 P_2^*) = \frac{a}{6}(4, 1).$$

Sila vrvice v krajišču $A(0, a)$ je $\vec{S}_1 = S(\cos\alpha\,\vec{\imath} + \sin\alpha\,\vec{\jmath})$, v desnem krajišču $C(2a, 0)$ pa $\vec{S}_2 = S\vec{\jmath}$. Tu smo upoštevali, da vrvica teče preko škrica in je tako velikost sile vrvice na obeh koncih enaka. Momentna enačba s polom v podpori $B(a, 0)$ določa velikost sile S. Velja

$$\frac{a}{3}3a\rho g + aS - aS\cos\alpha - aS\sin\alpha = 0.$$

Od tod sledi

$$S = \frac{a\rho g}{\cos\alpha + \sin\alpha - 1}.$$

Iz slike vidimo, da je $\cos\alpha = 2/\sqrt{5}$ in $\sin\alpha = 1/\sqrt{5}$. Vstavimo v zgornjo enačbo. Tako je

$$S = \frac{1}{4}\left(5 + 3\sqrt{5}\right) a\rho g.$$

Določimo še silo $\vec{B} = B_1\vec{\imath} + B_2\vec{\jmath}$ v členku B. Ravnovesni pogoj je

$$-3a\rho g\vec{\jmath} + \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + B_1\vec{\imath} + B_2\vec{\jmath} = 0.$$

Potem po kratkem računu

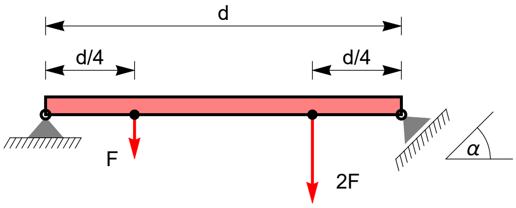
$$B_1 = -\frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{5}\right) ag\rho, \qquad B_2 = -\left(\sqrt{5} - 1\right) ag\rho.$$

Vidimo, da vrv vleče L nosilec ven iz členka.

3.1.2 Dodatne naloge

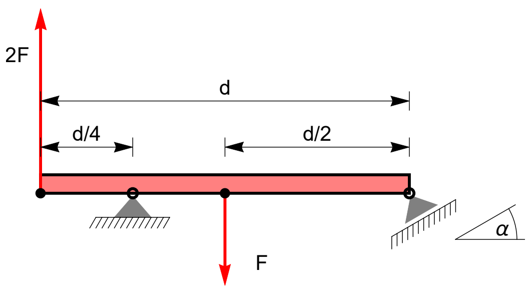
1. Nosilec dolžine d je podprt tako kot kaže skica. Leva podpora je nepomična, desna pa je drsna v smeri ki oklepa kot $\alpha = \pi/4$. Za dano obremenitev določi sile v podporah.

   Rešitev: $A_1 = 7F/4$, $A_2 = 5F/4$, $B = 7F/(2\sqrt{2})$.



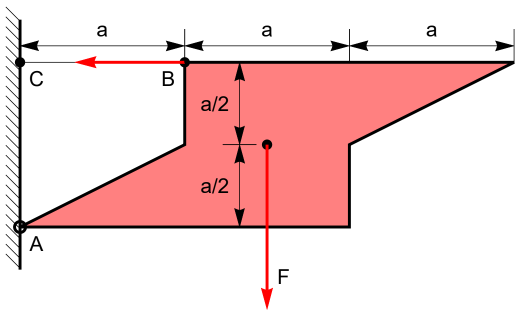
2. Nosilec dolžine d je podprt tako kot kaže skica. Leva podpora je nepomična, desna pa je drsna v smeri ki oklepa kot $\alpha = \pi/6$. Za dano obremenitev določi sile v podporah.

   Rešitev: $A_1 = 7F/\sqrt{3}$, $A_2 = -2F$, $B = 2/\sqrt{3}$.



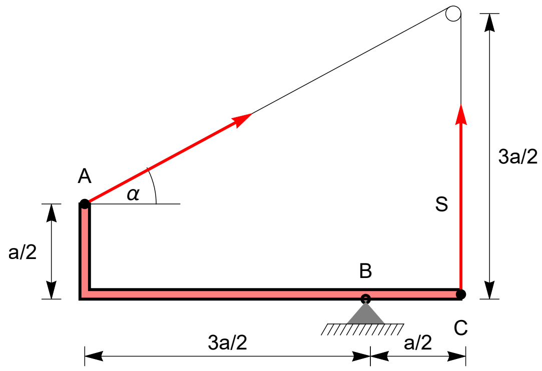
3. Homogena plošča s površinsko gostoto ρ, glej skico, je v točki A vpeta na steno s tečajem A, v točki B pa je pripeta z vodoravno vrvico BC. Določi silo vrvice.

   Rešitev: $F = 9a^2\rho g/4$.



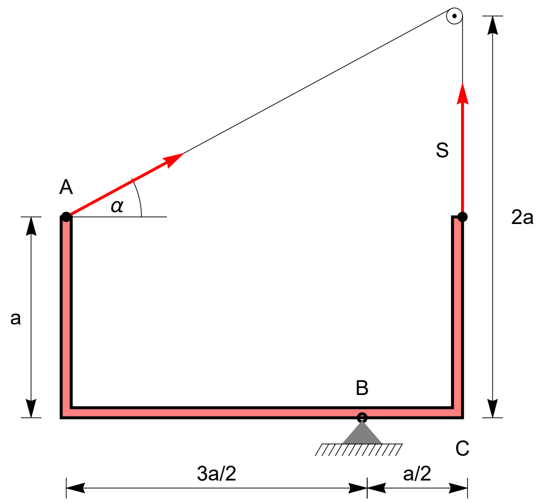
4. L nosilec z dolžinsko gostoto ρ, je v točki B členkasto vpet in na svojih krajiščih preko majhnega škripca povezan z raztegljivo vrvico, glej skico. Določi silo v podpori in silo vrvice.

   Rešitev: $S = \frac{21}{10}\left(1+\sqrt{5}\right) g\rho$, $B_1 = -\frac{21}{25}\left(5+\sqrt{5}\right) g\rho$, $B_2 = \frac{9}{25}\left(5-7\sqrt{5}\right) g\rho$.



5. U nosilec z dolžinsko gostoto ρ, je v točki B členkasto vpet in na svojih krajiščih preko majhnega škripca povezan z raztegljivo vrvico, glej skico. Določi silo v podpori in silo vrvice.

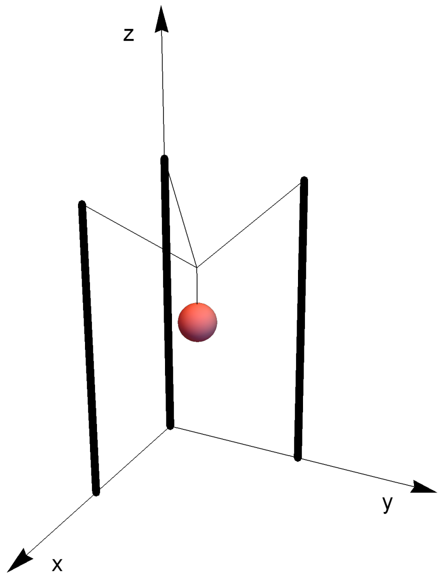
   Rešitev: $S = \frac{2}{11}\left(5+7\sqrt{5}\right) ag\rho$, $B_1 = -\frac{4}{11}\left(7+\sqrt{5}\right) ag\rho$, $B_2 = -\frac{4}{11}\left(4\sqrt{5}-5\right) ag\rho$.



3.2 Prostorske naloge

3.2.1 Rešene naloge

1. S treh enako visokih stebrov, ki tvorijo pravokotni enakokraki trikotnik ja na treh enakih žicah obešena utež z maso m. Izračunaj sile žic, če je poves enak h.



Rešitev: Predpostavili bomo, da je poves manjši od višine stebrov. Postavimo koordinatno izhodišče v vrh enakokrakega trikotnika in usmerimo osi x in y v smeri drugih dveh stebrov. Oz z usmerimo navpično navzgor. Višino stebrov označimo z b, z a pa dolžino kraka enakokrakega trikotnika. Obesišča vrvi imajo potem kordinate $P_1(0,0,b)$, $P_2(a,0,b)$ in $P_3(0,a,b)$. Ker so žice enako dolge, je utež obešena natanko pod središčem očrtanega kroga trikotnika $\triangle P_1P_2P_3$. Obesišče uteži je tako $P_0(a/2, a/2, b-h)$, dolžine žic pa so $l = \sqrt{a^2/2 + h^2}$.

Sile žic so $\vec{F_i} = F_i\overrightarrow{P_0P_i}/l$, kjer so F_i neznane velikosti sil. Potem

$$\vec{F_1} = F_1\left(-\frac{a}{2}\vec{\imath} - \frac{a}{2}\vec{\jmath} + h\vec{k}\right)/l, \quad \vec{F_2} = F_2\left(\frac{a}{2}\vec{\imath} - \frac{a}{2}\vec{\jmath} + h\vec{k}\right)/l, \quad \vec{F_3} = F_3\left(-\frac{a}{2}\vec{\imath} + \frac{a}{2}\vec{\jmath} + h\vec{k}\right).$$

Sistem sil žic in sile teže uteži ima skupno presečišče. Ravnovesna enačba je

$$\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} - mg\vec{k} = \vec{0}.$$

Po krajšem računu dobimo

$$F_1 = 0, \quad F_2 = F_3 = \frac{mg\sqrt{a^2+2h^2}}{2\sqrt{2}h}.$$

2. S treh enako visokih stebrov, ki stojijo v ogliščih pravokotnega enakokrakega trikotnika ja na treh žicah obešena utež z maso m. Dolžina žice s stebra v vrhu enakokrakega trikotnika je $l_1 = a\sqrt{5/8}$, dolžini ostalih dveh žic pa sta enaki $l_2 = l_3 = 3a/\sqrt{8}$. Tu je a dolžina kraka trikotnika. Določi poves in izračunaj sile žic.

   Rešitev: Težji del naloge je določiti obesišče uteži. Označimo s P_1, P_2 in P_3 oglišča trikotnika in postavimo koordinatni sistem tako, da je $P_1(0,0,0)$, $P_2(a,0,0)$ in $P_3(0,a,0)$. Določiti moramo koordinate obesišča $P_0(x,y,z)$. Ker so dolžine žic predpisane, je $|P_0P_i| = l_i$, $i = 1,2,3$. Tako dobimo enačbe

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 5a^2/8, \\ (x-a)^2 + y^2 + z^2 &= 9a^2/8, \\ x^2 + (y-a)^2 + z^2 &= 9a^2/8. \end{aligned}$$

Če odštejemo tretjo enačbo od druge dobimo, da je $x = y$. Vstavimo $y = x$ v prvi dve enačbi. Dobimo

$$2x^2 + z^2 = 5a^2/8, \qquad 2x^2 - 2ax + a^2 + z^2 = 9a^2/8.$$

Odštejemo drugo od prve. Po krajšem računu dobimo $x = a/4$. Potem $y = a/4$ in $z = a/\sqrt{2}$. Poves je torej enak $z = a/\sqrt{2}$. Sedaj nadaljujemo tako kot v prvi nalogi. Sile žic so $\vec{F}_i = F_i\overrightarrow{P_0P_i}/l_i$

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 &= F_1\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\vec{\imath} - \frac{1}{\sqrt{10}}\vec{\jmath} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{k}\right),\\
\vec{F}_2 &= F_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\imath} - \frac{1}{3\sqrt{2}}\vec{\jmath} + \frac{2}{3}\vec{k}\right),\\
\vec{F}_3 &= F_3\left(-\frac{1}{3\sqrt{2}}\vec{\imath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath} + \frac{2}{3}\vec{k}\right),
\end{aligned}$$

sila uteži pa $-mg\vec{k}$. Ravnovesne enačbe so

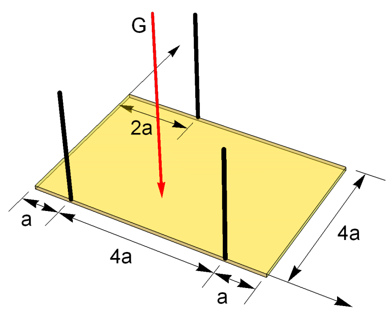
$$\begin{aligned}
-F_1\frac{1}{\sqrt{10}} + F_2\frac{1}{\sqrt{2}} - F_3\frac{1}{3\sqrt{2}} &= 0\\
-F_1\frac{1}{\sqrt{10}} - F_2\frac{1}{3\sqrt{2}} + F_3\frac{1}{\sqrt{2}} &= 0\\
F_1\frac{2}{\sqrt{5}} + F_2\frac{2}{3} + F_3\frac{2}{3} &= mg.
\end{aligned}$$

Če odštejemo od prve enačbe drugo, dobilo $F_2 = F_3$. Vstavimo $F_2 = F_3$ v sistem. Tako dobimo

$$\begin{aligned}
-F_1\frac{1}{\sqrt{5}} + F_2\frac{2}{3} &= 0\\
F_1\frac{2}{\sqrt{5}} + F_2\frac{4}{3} &= mg.
\end{aligned}$$

Rešitev je $F_1 = mg\sqrt{5}/4$, $F_2 = F_3 = 3mg/8$.

3. Pravokotna plošča dimenzije $4a \times 6a$ je vodoravno obešena na tri žice, tako kot kaže skica. Določi točko obremenitve plošče, da bodo sile žic enake.



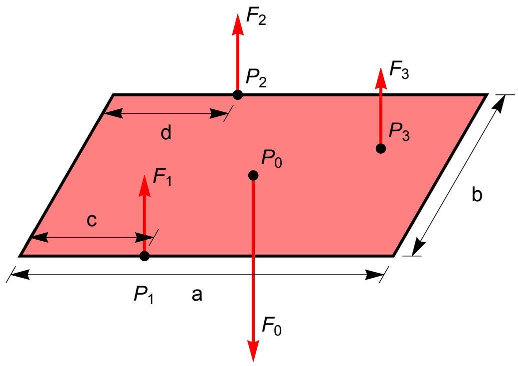
Rešitev: Postavimo koordinatni sistem tako, da plošča leži v ravnini xy. Prijemališča žic na plošči so $P_1(a,0,0)$, $P_2(5a,0,0)$ in $P_3(2a,4a,0)$, sile žic pa so $\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = \vec{F}_3 = F\vec{k}$. Prijemališče obremenitve označimo s $P(x,y,0)$.

Sila obremenitve je $\vec{G} = -G\vec{k}$. Iz ravnovesja sil dobimo takoj, da je velikost sil žic enaka $G/3$. Prijemališče obremenitve določa momentna enačba

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{3} \vec{OP}_i \times \vec{F}_i + \vec{OP} \times \vec{G} = \sum_{i=1}^{3} \vec{OP}_i \times F\vec{k} + (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}) \times G\vec{k} = (4F - yG)\vec{\imath} + (-8F + xG)\vec{\jmath}.$$

Upoštevajmo, da je $F = G/3$. Tako dobimo $x = \frac{8}{3}$ in $y = \frac{4}{3}$. Točka obremenitve je težišče prijemališč sil žic.

4. Homogena pravokotna plošča dimenzije $a \times b$ je vodoravno obešena na tri žice, tako kot kaže skica. Določi prijemališče P_3 sile F_3 tako, da bodo sile žic enake.



Rešitev: Postavimo koordinatni sistem tako, da leži plošča v ravnini xy, z osjo x v smeri stranice a in izhodiščem v levem vogalu plošče. Sila teže plošče F_0 ima prijemališče v masnem središču plošče $P_0(a/2, b/2)$. Žice bodo nosile enako teže, če bo P_0 hkrati tudi težišče točk P_1, P_2 in P_3.

Prijemališče P_3 potem leži na premici, ki gre skozi P_0 in razpolavlja stranico P_1P_2. Potemtakem ima P_3 koordinati $x = (c + d)/2 + \lambda$ in $y = b/2$. Določiti moramo parameter λ. P_0 leži hkrati tudi na premici, ki gre skozi P_2 in razpolavlja stranico P_1P_3. Potemtakem je $P_0 = P_2 + \mu\vec{d}$, kjer je $\mu \in \mathbb{R}$, $\vec{d}$ pa je vektor v smeri od P_2 do razpolovišča stranice P_1P_3. Torej

$$\vec{d} = \left(\frac{1}{2}(x + c) - d\right)\vec{\imath} + \left(\frac{1}{2}y - b\right)\vec{\jmath}.$$

Tako dobimo sistem

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\mu(3c - 3d + 2\lambda) + d &= \frac{a}{2} \\ b - \frac{3b\mu}{4} &= \frac{b}{2}. \end{aligned}$$

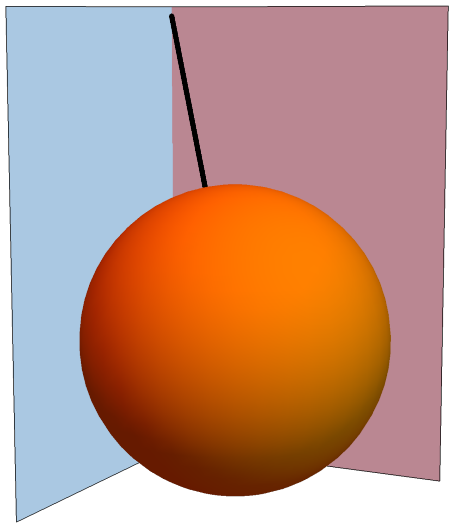
Rešitev sistema je $\lambda = \frac{3}{2}(a - c - d)$ in $\mu = \frac{2}{3}$. Potem je

$$P_3(\frac{3a}{2} - c - d, \frac{b}{2}).$$

Pogoj, da je P_3 res znotraj plošče je $0 < \frac{3a}{2} - c - d < a$. Torej

$$\frac{a}{2} \leq c + d \leq \frac{3a}{2}.$$

5. Homogena krogla s polmerom a in z maso m visi pripeta na vrvico dolžine l v vogalu med dvema pravokotnima stenama tako kot kaže skica. Določi silo vrvice.



Rešitev: Postavimo koordinatni sistem z osjo z navpično navzdol v smeri sile teže, osi x in y pa v smeri sten. Na kroglo deluje sila teža $\vec{F}$, sila vrvice $\vec{S}$ in sili sten $\vec{A}_1$ in $\vec{A}_2$. Sili sten sta pravokotni na steni. Očitno ima ta sistem sil skupno prijemališče, ki je v središču krogle. Ravnovesni pogoj iz katerega bomo določili silo vrvice je pogoj, da je vsota vseh sil enaka nič. Koordinatni zapis sil je $\vec{F} = mg\vec{k}$, $\vec{A}_1 = A_1\vec{\jmath}$, $\vec{A}_2 = A_2\vec{\imath}$. Zapisati moramo še silo vrvice.

Ta je v smeri od središča krogle $P_0(a, a, \sqrt{(l+a)^2 - 2a^2})$ do koordinatnega izhodišča O, kjer je vrvica pripeta v vogal. Pri določitvi središča krogle smo upštevali, da je razdalja od središča krogle do O enaka $l + a$. Sila vrvice je potem enaka

$$\vec{S} = -\frac{S}{l+a}(a\vec{\imath} + a\vec{\jmath} + \sqrt{(l+a)^2 - 2a^2}\,\vec{k}).$$

Iz pogoja $\vec{F} + \vec{S} + \vec{A}_1 + \vec{A}_2 = \vec{0}$ dobimo sistem

$$\begin{aligned} A_2 - \frac{aS}{l+a} &= 0 \\ A_1 - \frac{aS}{l+a} &= 0 \\ mg - \frac{S}{l+a}\sqrt{(l+a)^2 - 2a^2} &= 0. \end{aligned}$$

Rešitev je

$$S = mg\frac{l+a}{\sqrt{(l+a)^2 - 2a^2}}, \qquad A_1 = A_2 = mg\frac{a}{\sqrt{(l+a)^2 - 2a^2}}.$$

Vidimo, krajša je vrvica, večje so sile. V limiti $l \to a(\sqrt{2} - 1)$ gredo sile čez vse meje.

3.2.2 Dodatne naloge

1. S treh enako visokih stebrov, ki tvorijo enakostranični trikotnik ja na treh enakih žicah obešena utež z maso m. Izračunaj sile žic, če je poves enak h.

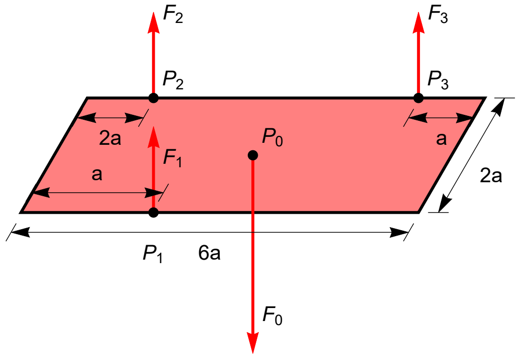
   Rešitev: Sile žic so vse enake in imajo vrednost $\frac{mg\sqrt{h^2+a^2/3}}{3h}$, kjer je a dolžina stranice trikotnika.

2. S treh enako visokih stebrov, ki stojijo v ogliščih enakostraničnega trikotnika z dolžino stranice a ja na treh žicah dolžine $l_1 = a/2$, $l_2 = l_3 = a\sqrt{3}/2$ obešena utež z maso m. Določi obesišče in izračunaj sile žic.

Rešitev: V koordinatnem sistemu z izhodiščem v središču trikotnika ima obesišče koordinate $P_0(a/2\sqrt{3}, 0, -a/\sqrt{6})$. Velikosti sil žic so $F_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}mg$, $F_2 = F_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}mg$.

3. Homogena pravokotna plošča dimenzije $6a \times 2a$ je vodoravno obešena na tri žice, tako kot kaže skica. Določi sile žic, če ima sila $\vec{F}_0$ prijemališče v masnem središču plošče.

   Rešitev: $F_1 = F_0/2$, $F_2 = F_0/8$, $F_3 = 3F_0/8$.

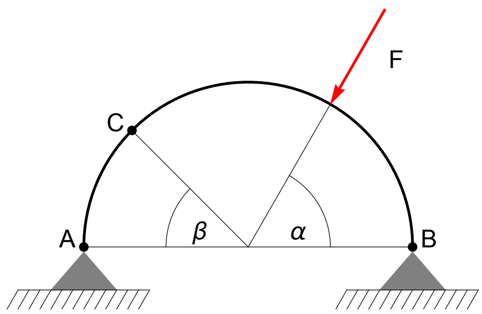


Poglavje 4

Statika sistema togih teles

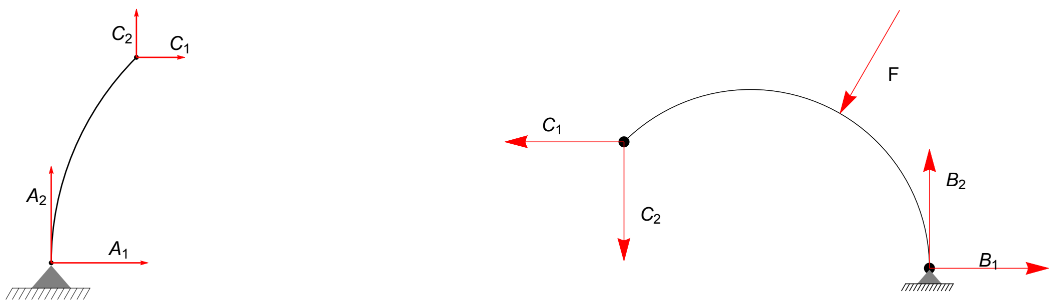
4.1 Rešene naloge

1. Točleni lok s polmerom R sestavljen iz lokov AC in CB je obremenjen tako kot kaže skica. Določi sile podpor.

   Rešitev: Lok razdelimo na dva loka, glej skico. Za vsak lok veljajo ravnotežne enačbe. Za levi velja

$$\begin{aligned} 0 &= A_1 + C_1, \\ 0 &= A_2 + C_2, \\ 0 &= R(1 - \cos\beta)C_2 - R\sin\beta C_1. \end{aligned}$$



Slika 4.1: Sile na levi in desni lok.

Drugi sklop enačb so ravnotežne enačbe za desni lok. Namesto le teh pa raje zapišimo ravnovesne enačbe za celotni tročleni lok, saj če so izpolnjene ravnovesne enačbe za levi lok in celotni tročleni lok, so izpolnjene tudi za desni lok. Ravnovesne enačbe za celotni tročleni lok so namreč nekoliko enostavnejše kot enačbe za desni lok.

$$\begin{aligned} 0 &= A_1 + B_1 - F\cos\alpha, \\ 0 &= A_2 + B_2 - F\sin\alpha, \\ 0 &= -RA_2 + RB_2. \end{aligned}$$

Tu smo uporabili momentno enačbo s polom v središču loka. Sistem rešimo. Prvo dobimo, da je $A_2 = B_2$ in od tod $A_2 = B_2 = \frac{1}{2}F\sin\alpha$. Nadalje je

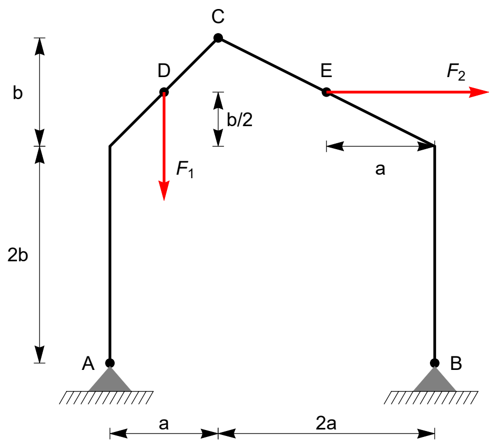
$$C_1 = \frac{1-\cos\beta}{\sin\beta}C_2 = \tan\frac{1}{2}\beta\, C_2 = -\frac{1}{2}\sin\alpha\tan\frac{1}{2}\beta\, F.$$

Tako dobimo še

$$A_1 = -C_1 = \frac{1}{2}\sin\alpha\tan\frac{1}{2}\beta\, F \quad B_1 = F\cos\alpha - A_1 = \left(\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha\tan\frac{1}{2}\beta\right)F.$$

Dobljena formula sil v podporah velja tudi, če je tročleni lok obremenjen v členku. V tem primeru lahko silo obremenitve $\vec{F}$ zapišemo v obliki $\vec{F} = \lambda\vec{F} + (1-\lambda)\vec{F}$ in nato pri razdelitvi tročlenega loka na levi in desni lok upoštevamo, da je levi lok obremenjen v spojnem členku s silo $\lambda\vec{F}$, desni pa z $(1-\lambda)\vec{F}$. Rezultat izračuna sil v podporah je neodvisen od števila λ, sila v spojnem členku pa je, vendar to ni pomembno, saj je v okviru statike pomembno samo to, da je vsota vseh sil na členek enaka nič.

2. Tročleni okvir sestavljen iz levega dela AC in desnega CB je členkasto nepomično podprt v A in B, glej skico. Izračunaj sile v podporah za primer $F_1 = F$, $F_2 = 2F$ in $a = b$.



Rešitev: Izhodišče koordinatnega sistema postavimo v A, osj x v vodoravni smeri, os y pa v navpični smeri. Na okvir deluje sistem sil, sila leve podpore $\vec{A} = A_1\vec{\imath} + A_2\vec{\jmath}$, desne podpore $\vec{B} = B_1\vec{\imath} + B_2\vec{\jmath}$, obremenitev na levi lok $\vec{F_1} = -F\vec{\jmath}$ in desni lok $\vec{F_2} = 2F\vec{\imath}$. Prijemališča sil so točke $A(0,0)$, $B(3a,0)$, $P_1(a, 5a/2)$ in $P_2(2a, 5a/2)$. Tu smo s P_1 in P_2 označili prijemališči sil F_1 in F_2.

Sedaj okvir razstavimo na levi in desni del, ki sta spojena v členku C. Označimo z $\vec{C} = C_1\vec{\imath} + C_2\vec{\jmath}$ silo levega dela na desni del. Ravnovesne enačbe za levi del so tako

$$A_1 + C_1 = 0, \quad A_2 + C_2 - F = 0, \quad -\frac{a}{2}F - 3aC_1 + aC_2 = 0, \tag{4.1}$$

kjer je zadnja enačba momentna enačba s polom v A. Sedaj zapišimo še ravnovesne enačbe za celotni okvir

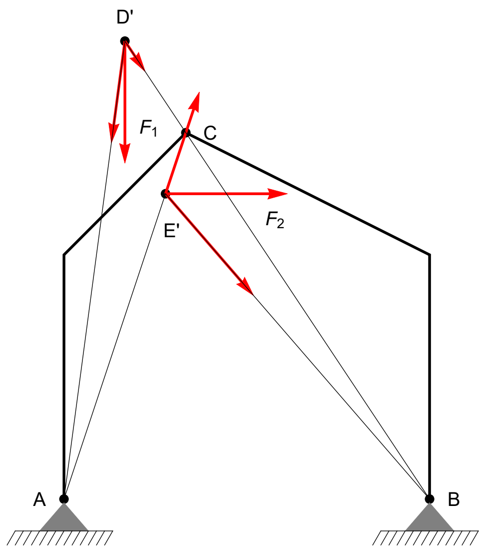
$$A_1 + B_1 + 2F = 0, \quad A_2 + B_2 - F = 0, \quad -\frac{a}{2}F - \frac{5a}{2}2F + 3aB_2 = 0. \tag{4.2}$$

Tudi tokrat smo zapisali momentno enačbo s polom v A. Dobili smo sistem šestih enačb s šestimi neznankami A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 in C_2. Rešimo ga. Iz enačbe (4.2) dobimo takoj $B_2 = \frac{11}{6}F$ in nato iz (4.1) $A_2 = -\frac{5}{6}F$. Če odštejemo drugo enačbo (4.2) od druge enačbe (4.1) dobimo še $C_2 = B_2$. Potem iz tretje enačbe (4.2) sledi $C_1 = \frac{4}{9}F$ in nato končno

$$A_1 = -C_1 = -\frac{4}{9}F \quad \text{in} \quad B_1 = -2F - A_1 = -\frac{14}{9}F.$$

Nalogo lahko rešimo tudi na sledeči način. Privzemimo, da je $\vec{F}_2 = \vec{0}$. Potegnimo premico p_{CB} skozi točki C in B ter premico skozi D v smeri sile F_1. Presečišče označimo z D'. Sedaj potegnimo še premico $p_{D'A}$ skozi D' in A. Po polznosti prijemališče sile F_1 prenesemo v D' in jo razstavimo na komponenti v smeri premic p_{CB} in $p_{D'A}$. Potem $\vec{F}_1 = \alpha_1\vec{e}_1 + \beta_1\vec{f}_1$, kjer je $\vec{e}_1$ enotski vektor v smeri premice p_{CB}, $\vec{f}_1$ pa v smeri $p_{D'A}$. Po polznosti prenesemo prijemališče sile $\beta_1\vec{f}_1$ v točko A. Za levi del okvirja se ravnovesna enačba s polom v C glasi

$$\overrightarrow{CA} \times \beta_1\vec{f}_1 + \overrightarrow{CA} \times \vec{A} = \vec{0}.$$



Od tod sledi, da je vsota sil $\beta_1\vec{f}_1 + \vec{A}$ vzporedna vektorju $\overrightarrow{CA}$. Označimo z $\vec{g}_1$ enotski vektor v tej smeri. Potem $\beta_1\vec{f}_1 + \vec{A} = \gamma_1\vec{g}_1$. Desni del okvirja je prav tako v ravnovesju. Iz momentne enačba za desni del okvirja s polom v C

$$\overrightarrow{CB} \times \vec{B} = \vec{0}$$

potem sledi, da je sila $\vec{B}$ v smeri vektorja $\vec{e}_1$, $\vec{B} = \delta_1\vec{e}_1$. Vsota vseh zunanjih sil na okvir je enaka nič

$$\vec{0} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{F}_1 = \vec{A} + \delta_1\vec{e}_1 + \alpha_1\vec{e}_1 + \beta_1\vec{f}_1 = \gamma_1\vec{g}_1 + (\delta_1 + \alpha_1)\vec{e}_1.$$

Vektorja $\vec{e}_1$ in $\vec{g}_1$ sta med seboj neodvisna, zato je $0 = \gamma_1$ in $0 = \delta_1 + \alpha_1$. Potemtakem je

$$\vec{A} = -\beta_1\vec{f}_1 \quad \text{in} \quad \vec{B} = -\alpha_1\vec{e}_1.$$

Vidimo, da sili podpor dobimo z razstavitvijo sile $\vec{F}_1$ na smeri $\vec{e}_1$ in $\vec{f}_1$. Podobno naredimo tudi v primeru, ko je $\vec{F}_1 = \vec{0}$ in $\vec{F}_2 \neq \vec{0}$. Tako sta sili podpor

$$\vec{A} = -\beta_1\vec{f}_1 - \beta_2\vec{f}_2 \quad \text{in} \quad \vec{B} = -\alpha_1\vec{e}_1 - \alpha_2\vec{e}_2.$$

Opisana metoda omogoča določitev sil podpor na grafični način.

Potrdimo ugotovljeno z računom. Koordinate točke D' so $(\frac{a}{2}, \frac{15a}{4})$, smerna vektorja pa sta

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{13}}(2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}), \quad \vec{f}_1 = -\frac{1}{\sqrt{229}}(2\vec{\imath} + 15\vec{\jmath}).$$

Komponenti sile $\vec{F}_1$ sta

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{13}}{18}F, \qquad \beta_1 = \frac{\sqrt{229}}{18}F.$$

Koordinate točke E' so $(\frac{5a}{6}, \frac{5a}{2})$, smerna vektorja pa

$$\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{394}}(13\vec{\imath} - 15\vec{\jmath}), \quad \vec{f}_2 = -\frac{1}{\sqrt{10}}(\vec{\imath} + 3\vec{\jmath})$$

koeficienta pa sta

$$\alpha_2 = \frac{\sqrt{394}}{9}F, \qquad \beta_2 - \frac{5\sqrt{10}}{9}.$$

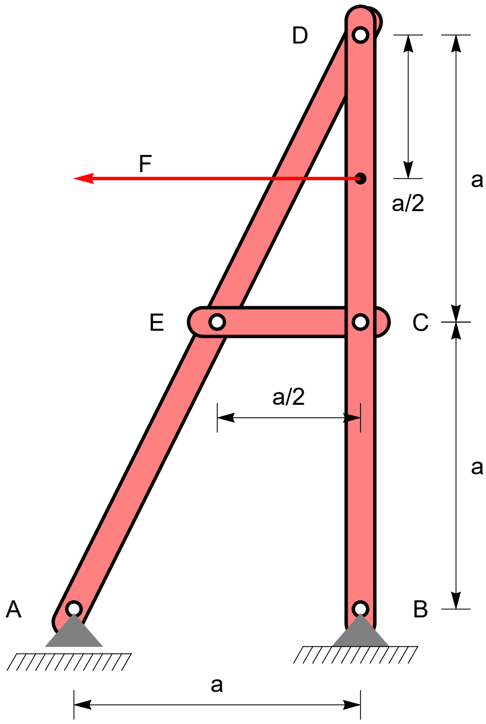
Potem

$$\vec{A} = -\beta_1\vec{f}_1 - \beta_2\vec{f}_2 = -(\frac{4}{9}\vec{\imath} + \frac{5}{6}\vec{\jmath})F$$

$$\vec{B} = -\alpha_1\vec{e}_1 - \alpha_2\vec{e}_2 = (-\frac{14}{9}\vec{\imath} + \frac{11}{6}\vec{\jmath})F,$$

kar se ujema z že znanim rezultatom. Vidimo pa, da je ta drugi način računsko manj primeren.

3. Togo telo je sestavljeno iz treh ploščatih togih elementov in obremenjeno tako kot kaže skica. Določi sile v podporah in členkih.



Rešitev: Telo je sestavljeno iz treh togih teles AD, BD in CE, ki so med seboj spojena s členki C, D in E. Določimo prvo sile v podporah. V ta namen postavimo izhodišče koordinatnega sistema v podporo A z osjo x v vodoravni smeri in osjo y navpično navzgor. Sili podpor sta $\vec{A} = A_2\vec{\jmath}$ in $\vec{B} = B_1\vec{\imath} + B_2\vec{\jmath}$, zunanja sila, ki ima prijemališče v točki $P(a, 3a/2)$ pa je $\vec{F} = -F\vec{\imath}$. Iz ravnovesja momentov v polu B sledi, da je $A_2 = 3F/2$, iz ravnovesja momentov v polu A pa $B_2 = -3F/2$. Nadalje je $B_1 = F$, saj mora biti vsota sil v vodoravni smeri biti enaka nič. Razdelimo sedaj togo telo na tri prosta toga telesa AD, BD in CE, glej skico. Pri zapisu sil v členkih smo upoštevali tretji Newtonow zakon o medsebojnem delovanju sil med dvema telesoma.

Ravnovesne enačbe za levi del so:

$$D_1 + E_1 = 0, \qquad D_2 + E_2 + A_2 = 0, \qquad -aD_1 + \frac{a}{2}D_2 - \frac{a}{2}A_2 = 0.$$

Tu smo za pol momentne enačbo izbrali točko E. Ravnovesne enačbe za srednji del so:

$$-C_1 - E_1 = 0, \qquad -C_2 - E_2 = 0, \qquad -aC_2 = 0,$$

za desni pa

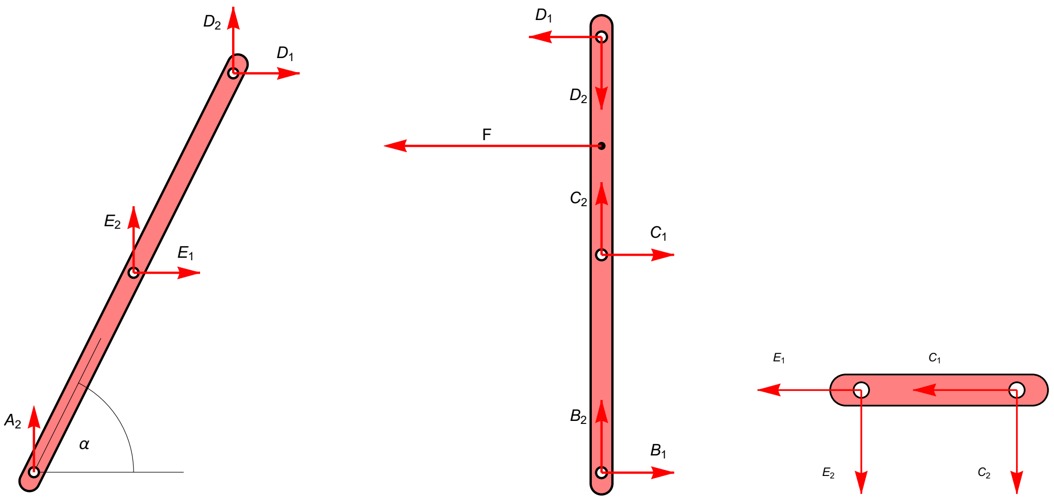
$$B_1 + C_1 - D_1 - F = 0, \qquad B_2 + C_2 - D_2 = 0, \qquad 2aD_1 + \frac{3a}{2}F - aC_1 = 0.$$

Rešitev sistema je

$$A_2 = \frac{3}{2}F, \quad B_1 = F, \quad B_2 = -\frac{3}{2}F, \quad C_1 = -\frac{3}{2}F, \quad C_2 = 0$$

$$D_1 = -\frac{3}{2}F, \quad D_2 = -\frac{3}{2}F, \quad E_1 = \frac{3}{2}F, \quad E_2 = 0.$$

Nalogo lahko rešimo tudi tako, da prvo določimo sile podpor, nato pa še sile v členkih.



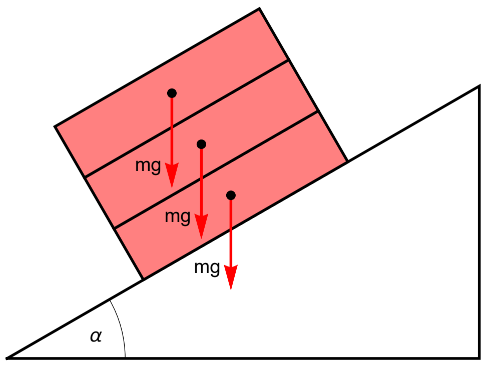
Slika 4.2: Diagram prostih teles, levi del, desni in srednji del.

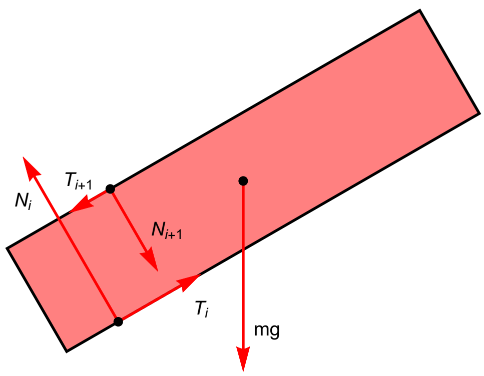
4. Na strmini z naklonskim kotom α so položene ena na drugo tri enake plošče, glej skico. Dolžina plošče je a, višina pa h. Stične ploskve so hrapave s koeficientom trenja $k > \tan\alpha$. Ugotovi ali se plošče prevernejo.

   Rešitev: Sistem je sestavljen iz treh plošč. Izolirajmo i-to ploščo kot prosto telo, glej skico. Na i-to ploščo delujejo sile teže $m\vec{g}$, sila spodnje plošče $\vec{F}_1 = \vec{N}_i + \vec{T}_i$ in sila zgornje plošče $\vec{F}_2 = -\vec{N}_{i+1} + \vec{T}_{i+1}$. Če je i-ta plošča zgornja plošča, $i = 3$, je $\vec{T}_4 = \vec{N}_4 = \vec{0}$. Za komponentni zapis sil postavimo koordinatni sistem v spodnji vogal prve plošče in usmerimo os x v smer strmine navzgor, os y pa pravoktno na ploščo, prav tako navzgor. Potem je

$$
\begin{aligned}
m\vec{g} &= mg(-\sin\alpha\,\vec{\imath} - \cos\alpha\,\vec{\jmath}),\\
\vec{T}_i &= T_i\vec{\imath},\\
\vec{N}_i &= N_i\vec{\jmath},\\
\vec{T}_{i+1} &= -T_{i+1}\vec{\imath},\\
\vec{N}_{i+1} &= -N_{i+1}\vec{\jmath}.
\end{aligned}
$$

   Določiti moramo še prijemališča sil. Prijemališče sile teže je masno središče $P_i^*(a/2, (i-1/2)h)$, prijemališče sile $\vec{F}_1$ je $P_i = (x_i, (i-1)h)$, sile $\vec{F}_2$ pa $P_{i+1} = (x_{i+1}, ih)$.





Koordinate x_i so neznane in jih moramo določiti. Ker so P_i na stični ploskvi, mora veljati $0 \leq x_i \leq a$. Sistem se prevrne, če je katerikoli $x_i < 0$. Ravnovesme enačbe i-te plošče so

$$\begin{aligned}
0 &= -mg\sin\alpha + T_i - T_{i+1},\\
0 &= -mg\cos\alpha + N_i - N_{i+1},\\
0 &= -\frac{1}{2}mag\cos\alpha + \frac{1}{2}mgh\sin\alpha + hT_{i+1} + x_iN_i - x_{i+1}N_{i+1}
\end{aligned}$$

Tu je tretja enačba momentna enačba s polom v koordinatnem izhodišču. Prvo rešimo enačbo za zgornjo ploščo, $i = 3$. Vstavimo $T_4 = N_4 = 0$ in rešimo za T_3, N_3 in x_3. Rešitev je

$$T_3 = mg\sin\alpha, \quad N_3 = mg\cos\alpha, \quad x_3 = \frac{1}{2}(a - h\tan\alpha).$$

Vstavimo izračunano v ravnovesni sistem za $i = 2$. Dobimo sistem

$$\begin{aligned}
0 &= T_2 - 2mg\sin\alpha,\\
0 &= N_2 - 2mg\cos\alpha,\\
0 &= mg(2h\sin\alpha - a\cos\alpha) + x_2N_2.
\end{aligned}$$

Rešimo ga za T_2, N_2 in x_2. Rešitev je

$$T_2 = 2mg\sin\alpha, \quad N_2 = 2mg\cos\alpha, \quad x_2 = \frac{1}{2}(a - 2h\tan\alpha).$$

Ravnovesni sistem za spodnjo ploščo $i = 1$ je potem

$$\begin{aligned}
0 &= T_1 - 3mg\sin\alpha,\\
0 &= N_1 - 3mg\cos\alpha,\\
0 &= x_1N_1 - \frac{3}{2}mg(a\cos\alpha - 3h\sin\alpha)
\end{aligned}$$

z rešitvijo

$$T_1 = 3mg\sin\alpha, \quad N_1 = 3mg\cos\alpha, \quad x_1 = \frac{1}{2}(a - 3h\tan\alpha).$$

Sistem se torej ne prevrne, če je

$$\tan\alpha < a/3h.$$

Poglejmo, kako je še s pogojem, da sistem ne zdrsne. Veljati mora $T_i < kN_i$, kjer je k koeficient statičnega trenja med stičnimi ploskvami. Vidimo, da so pogoji za vse plošče enaki, veljati mora $\tan\alpha < k$.

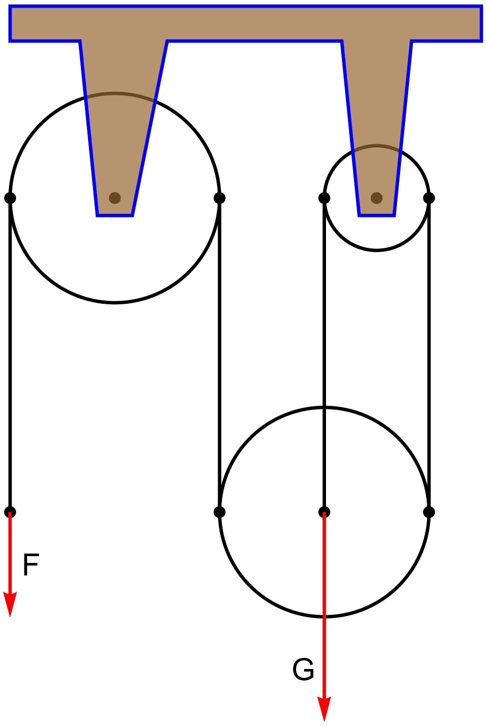
Sedaj ko vemo, da se pri $\tan\alpha < k$ plošče ne speljejo, lahko na sistem plošč gledamo kot na homogeni kvader dolžine a in višine $3h$. Sila teže ima prijemališče v masnem središču $P_0(a/2, 3h/2)$. Kvader se ne prevrne, če smer sile teže ne seka strmine levo od levega spodnjega oglišča kvadra. Iz tega pogoja sledi $\tan\alpha < a/3h$, kar se seveda ujema z že izračunanim pogojem. Od tod tudi vidimo, da se n plošč ne prevrne, če je $\tan\alpha < a/nh$.

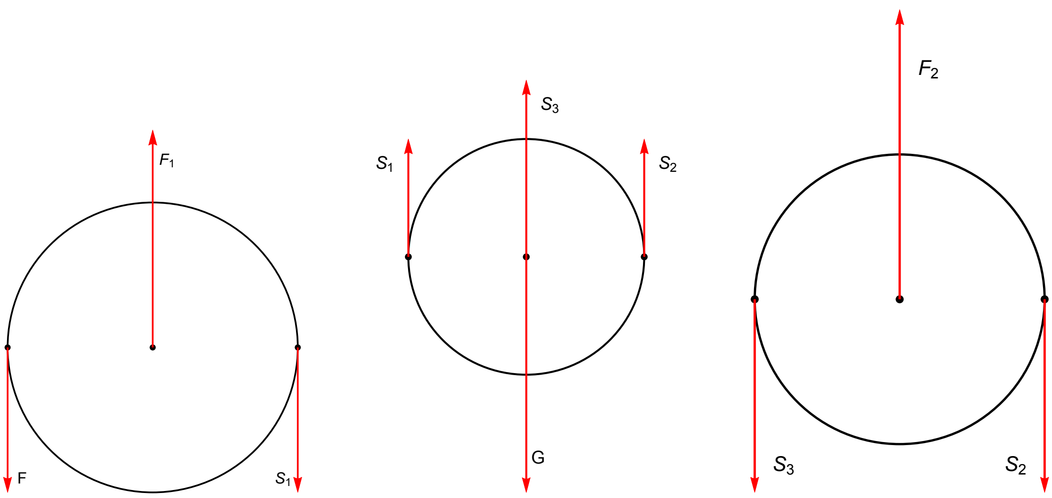
5. Za škripec na skici določi silo F potrebno za enakomerno dvigovanje bremena s težo G. Trenje v ležajih škripca zanemari.

Rešitev: Škripec je sestavljen iz treh kolutov, ki jih povezujejo vrvi, glej skico razčlenitve na prosta telesa. Polmere kolutov označimo z r_1, r_2 in r_3. Za vsak kolut posebej veljajo ravnotežne enačbe. Ker nas ne zanimajo sile v ležajih, je dovolj za vpeta koluta napisati samo momentno enačbo. Ravnovesne momentne enačbe so tako $r_1F - rS_1 = 0$ za levi zgornji kolut, $-r_2S_1 + r_2S_2 = 0$ za spodnji kolut in $r_3S_3 - r_3S_2 = 0$ za desni zgornji kolut. Iz teh enačb sledi $S_1 = S_2 = S_3 = F$. Zapišimo sedaj ravnotežno enačbo za sile za spodnji kolut. Enačba je

$$S_1 + S_2 + S_3 - G = 0.$$

Od tod sledi $3F = G$. Sila F, ki zagotavlja enakomerno dvigovanje(spuščanje) bremena je tako $G/3$.

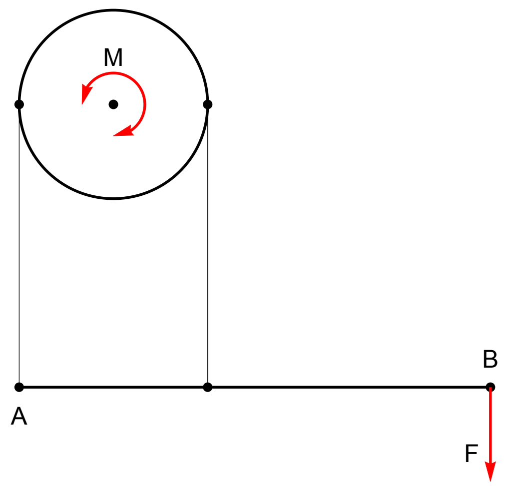


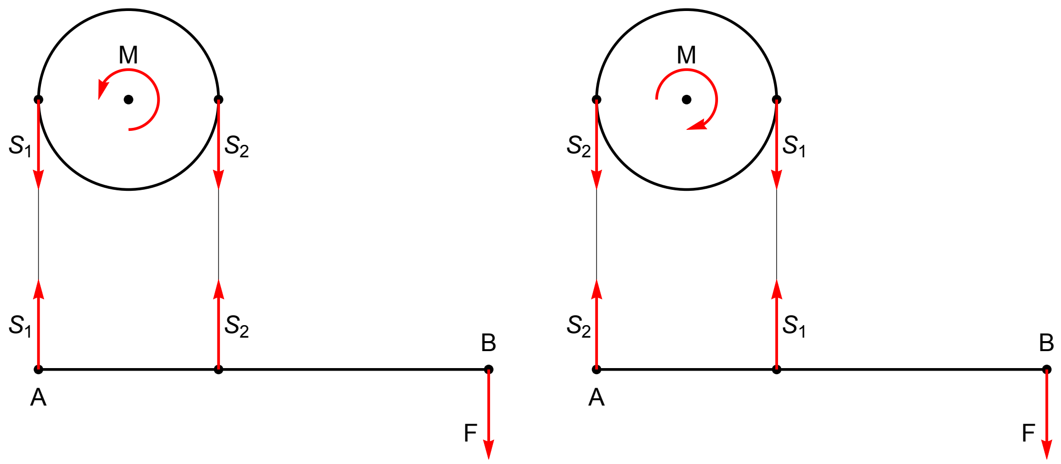


Slika 4.3: Diagram sil na kolute škripca, levi, spodnji, desni kolut.

6. Za tračno zavoro na skici, z ročico AB dolžine l in polmerom koluta r, določi silo F na ročico, ki bo uravnovesila navor M na kolut. Ločeno obravnavaj primera sournega in protiurnega delovanja navora M.

   Rešitev: Tračna zavora je sestavljena iz ročice, koluta in vrvi, ki drsi po kolutu. Sila trenja vrvi na kolutu je $S_2 = S_1\,\mathrm{e}^{k\varphi}$, kjer je k koeficient trenja vrvi na kolutu, φ pa je ovojni kot vrvi na kolutu. Pri tem sila S_2 kaže v smer drsenja vrvi. To pomeni, da moramo ločiti primera sournega in protiurnega vrtenja koluta.





Slika 4.4: Tračna zavora, protiurna in sourna rotacija koluta.

Poglejmo prvo primer protiurnega vrtenja. Ker ne bomo računali sil na ležaj koluta in ročice, je dovolj, da uporabimo samo momentno enačbo za kolut in ročico. Momentna enačba za kolut je $M + rS_1 - rS_2 = 0$. Od tod, z upoštevanjem sile trenja na kolutu sledi

$$M = rS_1\left(\mathrm{e}^{k\pi} - 1\right). \tag{4.1}$$

Momentna enačba za ročico je $-lF + 2rS_2 = 0$. Potem z upoštevanjem zgornje enačbe

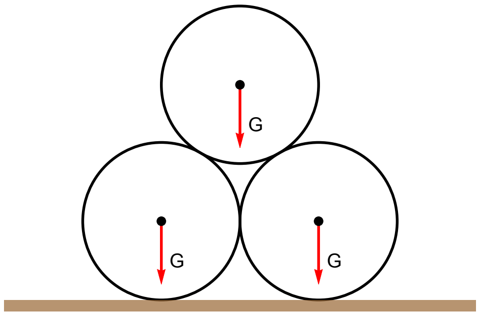
$$F = \frac{2R}{l}S_2 = \frac{2R}{l}S_1\,\mathrm{e}^{k\pi} = \frac{2M\,\mathrm{e}^{k\pi}}{l\,(\mathrm{e}^{k\pi} - 1)}.$$

V primeru sournega vrtenja dobimo ponovno (4.1), za ročico pa $-lF + 2rS_1 = 0$. Potem

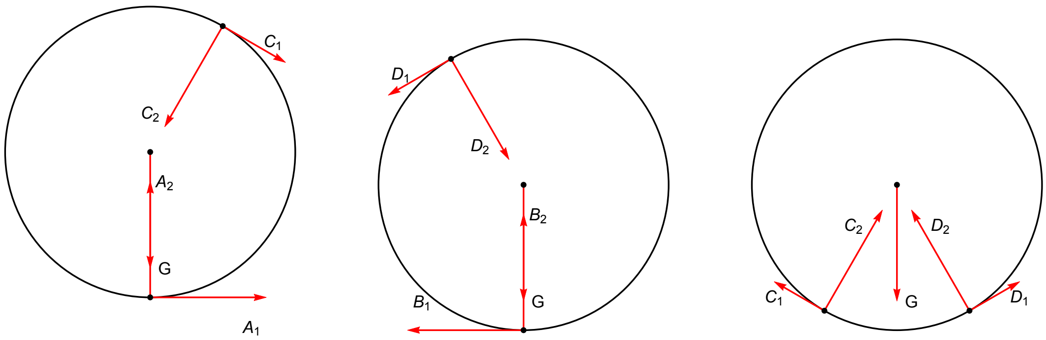
$$F = \frac{2R}{l}S_1 = \frac{2M}{l\,(\mathrm{e}^{k\pi} - 1)}.$$

Vidimo, da je v tem primeru sila ročice potrebna za faktor $\mathrm{e}^{k\pi}$ manjša sila.

7. Trije enaki valji so naloženi drug na drugega tako kot kaže skica. Določi koeficient lepenja med valji in valji in tlemi, ki zagotavlja ravnovesje. Kaj se zgodi, če obodna sila na valju preseže maksimalno dopustno vrednost?



Rešitev: Koeficient trenja označimo s k. nalogo bomo rešili na dva načina. Poglejmo prvega. Sistem je sestavljen iz treh valjev. Za vsak valj posebej narišimo diagram sil, glej skico.



Slika 4.5: Diagram sil na prosta telesa, levi, desni in zgornji valj.

Na levi spodnji valj delujejo sila tal $\vec{A} = A_1\vec{\imath} + A_2\vec{\jmath}$, sila zgornjega valja $\vec{C} = -C_1\vec{e}_\phi(\pi/3) - C_2\vec{e}_r(\pi/3)$ in sila teže $\vec{G} = -G\vec{\jmath}$. Tu sta $\vec{e}_r(\alpha) = \cos\alpha\vec{\imath} + \sin\alpha\vec{\jmath}$ radialni, $\vec{e}_\phi(\alpha) = -\sin\alpha\vec{\imath} + \cos\alpha\vec{\jmath}$ pa obodni bazni vektor, ki oklepa kot α s osjo x. Silo $\vec{C}$ smo namenoma zapisali po komponentah v radialni in obodni smeri, da bomo kasneje lažje določili pogoj na koeficient trenja. Sile na desni spodnji valj so sila tal $\vec{B} = B_1\vec{\imath} + B_2\vec{\jmath}$, sila zgornjega valja $\vec{D} = -D_1\vec{e}_r(2\pi/3) + D_2\vec{e}_\phi(2\pi/3)$ in sila teže $\vec{G}$. Na zgornji valj delujeta sili spodnjih valjev $-\vec{C}$, $-\vec{D}$ in sila teže $\vec{G}$. Ravnovesne enačbe so

$$0 = A_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_1 - \frac{1}{2}C_2, \quad 0 = A_2 - \frac{1}{2}C_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}C_2 - G, \quad 0 = rA_1 - rC_1,$$

za levi valj,

$$0 = -B_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}D_1 + \frac{1}{2}D_2, \quad 0 = B_2 - \frac{1}{2}D_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}D_2 - G, \quad 0 = -rB_1 + rD_1,$$

za desni valj in

$$0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}C_1 + \frac{1}{2}C_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}D_1 - \frac{1}{2}D_2, \quad 0 = \frac{1}{2}C_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_2 + \frac{1}{2}D_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}D_2 - G, \quad 0 = -rC_1 + rD_1$$

za zgornji valj. Imamo sistem devetih enačb z osmimi neznankami. Sistem sil na zgornji valj ima ne glede na velikosti sil vedno skupno prijemališče, zato je momentna enačba odveč. Kljub temu pa jo bomo uporabili, saj je nismo zapisali s polom v prijemaliču sil in zato ni trivialna. V nadaljevanju pa bomo videli, da je ena enačba odveč. Iz momentnih enačb sledi takoj, da je $A_1 = B_1 = C_1 = D_1$. Potem

$$0 = (1 + \frac{\sqrt{3}}{2})A_1 - \frac{1}{2}C_2, \quad 0 = A_2 - \frac{1}{2}A_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}C_2 - G,$$

$$0=-(1+\frac{\sqrt{3}}{2})A_1+\frac{1}{2}D_2, \quad 0=B_2-\frac{1}{2}A_1-\frac{\sqrt{3}}{2}D_2-G,$$
$$0=\frac{1}{2}C_2-\frac{1}{2}D_2, \quad 0=A_1+\frac{\sqrt{3}}{2}C_2+\frac{\sqrt{3}}{2}D_2-G.$$

Vidimo, in to na dva načina, da je $C_2=D_2=(2+\sqrt{3})A_1$. Ostane nam sistem

$$0=-\sqrt{3}A_1+A_2-G, \quad 0=B_2-(2+\sqrt{3})A_1-G, \quad 0=2(2+\sqrt{3})A_1-G.$$

Rešitev je

$$A_1=B_1=C_1=D_1=\frac{G}{2(2+\sqrt{3})}, \quad A_2=B_2=\frac{3}{2}G, \quad C_2=D_2=\frac{G}{2}.$$

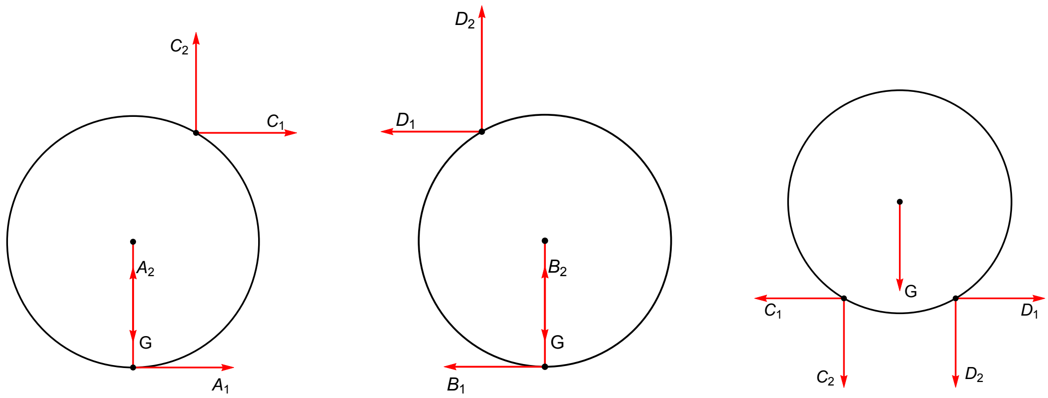
Tvorimo sedaj kvociente

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{2}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\doteq 0.089$$

in

$$\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}\doteq 0.268.$$

Da ne pride do zdrsa mora biti tako med valji koeficient lepenja večji od $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$, med valjem in tlemi pa večji od $\frac{2}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}$. Če pogoja nista izpolnjena, sistem ni v ravnovesju in se prične gibati.



Slika 4.6: Diagram sil na prosta telesa, levi, desni in zgornji valj.

Sedaj bomo nalogo rešili še na drugi način. Sistem razstavimo na prosta telesa tako kot kaže skica. Opazimo, da smo sedaj sile medsebojnega vpliva med valji razstavili na horinzotalno in vertikalno komponento. Začnimo z zgornjim valjem. Ravnovesne enačbe so

$$C_1-D_1=0, \quad C_2+D_2+G=0, \quad rD_2-rC_2=0.$$

Rešitev je $D_1=C_1$ in $D_2=C_2=-G/2$. Za levi valj se ravnotežne enačbe glasijo

$$A_1+C_1=0, \quad A_2+C_2-G=0, \quad \frac{1}{2}rC_2-r(1+\frac{\sqrt{3}}{2})C_1=0.$$

Tako dobimo

$$A_1=\frac{G}{2(2+\sqrt{3})}, \quad A_2=\frac{3G}{2}, \quad C_1=\frac{C_2}{2+\sqrt{3}}=-\frac{G}{2(2+\sqrt{3})}.$$

Za A_1 in A_2 smo dobili enak rezultat kot prej. Pogoj, da ne pride do zdrsa zgornjega valja je, da je tangentna komponenta sile $\vec{C}$ po absolutni vrednosti manjša od absolutne vrednosti normalne komponente krat koeficient trenja. Torej

$$(C_1\vec{\imath} + C_2\vec{\ }) \cdot \vec{t} < k(C_1\vec{\imath} + C_2\vec{\jmath}) \cdot \vec{n},$$

kjer je $\vec{t} = \cos\pi/6\vec{\imath} - \sin\pi/6\vec{\jmath}$ enotski tangentni vektor v obodni smeri v točki C, $\vec{n} = -\cos\pi/3\vec{\imath} - \sin\pi/3\vec{\jmath}$ enotski vektor v smeri normale. Izračunamo posebej

$$C_t = (C_1\vec{\imath} + C_2\vec{\jmath}) \cdot \vec{t} = \left(-\frac{G}{2(2+\sqrt{3})}\vec{\imath} - \frac{G}{2}\vec{\jmath}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\imath} - \frac{1}{2}\vec{\jmath}\right) = \frac{G}{2(2+\sqrt{3})}$$

in

$$C_n = (C_1\vec{\imath} + C_2\vec{\jmath}) \cdot \vec{t} = \left(-\frac{G}{2(2+\sqrt{3})}\vec{\imath} - \frac{G}{2}\vec{\jmath}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\vec{\imath} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}\right) = -\frac{G}{2}.$$

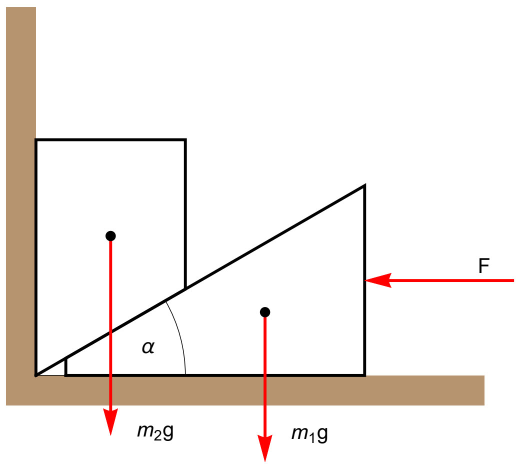
Tako dobimo

$$\frac{C_t}{C_n} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} < k$$

kar se seveda ujema s pogojem, ki smo ga dobili pri reševanju naloge na prvi način.

8. Zagozdo z maso m_1 potiskamo s silo F pod omaro z maso m_2 tako kot kaže skica. Med zagozdo in tlemi, omaro in steno in med zagozdo in omaro je hrapava površina s koeficientom trenja k.

   - Določi silo F, ki enakomerno dviga omaro.
   - Določi pogoj na k in kot α tako, da bo dvigovanje z zagozdo samozaporno.

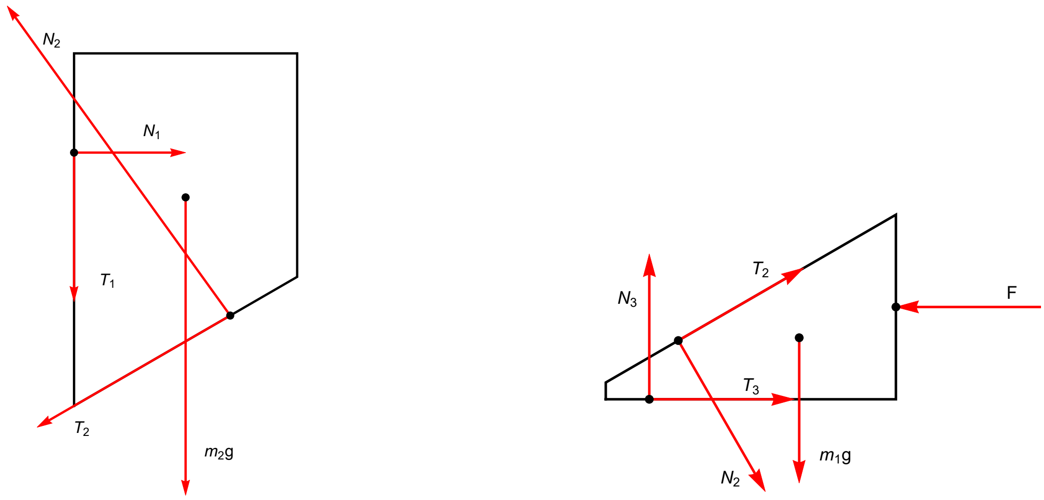


Rešitev: Imamo sistem dveh togih teles, zagozdo in omaro. Sistem razdelimo na prosti telesi, glej skico. Ker je med stičnimi ploskvami trenje in ker nas ne zanimajo prijemališča sil na stiku, imamo za vsako prosto telo en par ravnovesnih enačb, vsota sil v vodoravni in navpični smeri mora biti enaka nič.

Pri dvigovanju na omaro delujejo sile $\vec{F}_1 = \vec{N}_1 + \vec{T}_1 = N_1\vec{\imath} - T_1\vec{\jmath}$, $\vec{F}_2 = \vec{N}_2 + \vec{T}_2 = N_2(-\sin\alpha\,\vec{\imath} + \cos\alpha\,\vec{\jmath}) + T_2(-\cos\alpha\,\vec{\imath} - \sin\alpha\,\vec{\jmath})$ ter sila teže $-m_2g\vec{\jmath}$. Po Coulombovem zakonu trenja je $T_1 = kN_1$ in $T_2 = kN_2$. Pri spuščanju sili trenja $\vec{T}_1$ in $\vec{T}_2$ obrneta smer. Da bomo lahko enotno rešili problem dvigovanja in spuščanja, bomo zapisali sili trenja v obliki $\vec{T}_1 = -aT_1\vec{\imath}$ in $\vec{T}_2 = -aT_2(\cos\alpha\,\vec{\imath} + \sin\alpha\,\vec{\jmath})$, kjer ima konstanta a vrednost $a = 1$ pri dvigovanju in $a = -1$ pri spuščanju.

Ravnovesne enačbe za omaro so tako $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + m\vec{g} = \vec{0}$ oziroma po komponentah

$$\begin{aligned} 0 &= N_1 - N_2\sin\alpha - akN_2\cos\alpha, \\ 0 &= -akN_1 - m_2g + N_2\cos\alpha - akN_2\sin\alpha. \end{aligned}$$



Slika 4.7: Diagram sil na prosti telesi.

Iz prve enačbe izrazimo N_1, vstavimo v drugo in rešimo na N_2. Tako dobimo

$$N_2 = \frac{m_2 g}{(1-k^2)\cos\alpha - 2ak\sin\alpha}.$$

Na zagozdo delujejo sile $\vec{F} = \vec{N}_3 + \vec{T}_3 = N_3\vec{\jmath} + aT_3\vec{\imath}$, sila omare na zagozdo $-\vec{F}_2$, sila teže $-m_1 g\vec{\jmath}$ in neznana zunanja sila $\vec{F} = -F\vec{\imath}$. Ravnovesni enačbi po komponentah sta

$$0 = -F + akN_3 + N_2\sin\alpha + akN_2\cos\alpha,$$
$$0 = N_3 - m_1 g - n_2\cos\alpha + akN_2\sin\alpha.$$

Iz druge enačbe dobimo

$$N_3 = m_1 g + N_2(\cos\alpha - ak\sin\alpha).$$

Vstavimo že izračunani N_2. Po krajšem računu dobimo

$$F = akm_1 g + m_2 g\frac{(1-k^2)\tan\alpha + 2ak}{(1-k^2) - 2ak\tan\alpha}.$$

Koeficient trenja izrazimo s tornim kotom $k = \tan\alpha_0$. Potem je

$$F = akm_1 g + m_2 g\frac{\tan\alpha + a\tan 2\alpha_0}{1 - a\tan\alpha\tan 2\alpha_0} = akm_1 g + m_2 g\tan(\alpha + 2a\alpha_0).$$

Sila s katero z zagozdo dvignemo omaro je torej

$$F = km_1 g + m_2 g\tan(\alpha + 2\alpha_0).$$

Poglejmo še pogoj, da je dvigovanje z zagozdo samozaporno. Pri spuščanju je $a = -1$. Sistem je samozaporen, če je za spuščanje potrebno zagozdo vleči ven, torej če je $F < 0$ pri $a = -1$. Veljati mora

$$F = -km_1 g + m_2 g\tan(\alpha - 2\alpha_0) < 0.$$

Pogoj za samozaprtje je

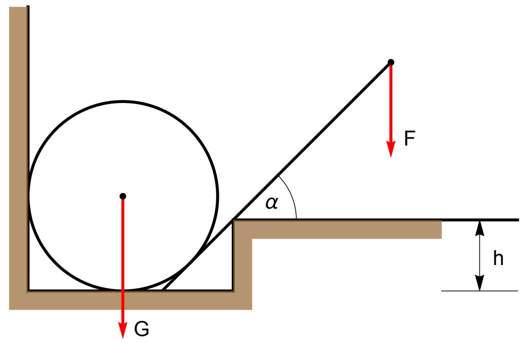
$$\tan(\alpha - 2\alpha_0) < \frac{m_1}{m_2}\tan\alpha_0.$$

Teža zagozde v primerjavi z omero je praviloma zanemarljiva. Potem je za $m_1 = 0$ pogoj za samozapornost

$$\alpha_0 > \frac{1}{2}\alpha.$$

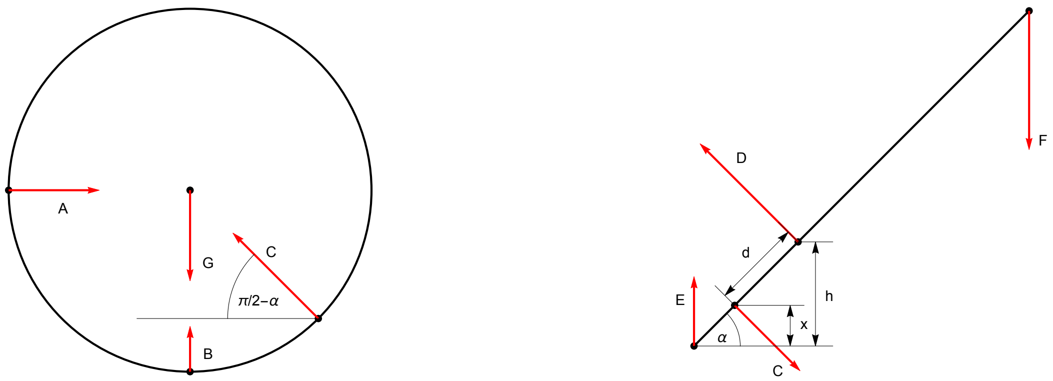
Trenje mora biti dovolj veliko oziroma zagozda ne sme biti prestrma.

9. V kanalu z višino h leži krogla s polmerom r, ki jo poskušamo dvigniti z vzvodom dolžine l, glej skico. Določi silo F, ki dvigne kroglo. Vzvod modeliraj kot tanko gladko palico. Dobljeni rezultat poenostavi za primer $r = h$ in $\alpha = \pi/4$.



Rešitev: Imamo sistem dveh togih teles, krogla in palica. Vsako telo posebej obravnavamo kot togo telo v statičnem ravnovesju. Na kroglo deluje sila stene $\vec{A}$ v vodoravni smeri, sila tal $\vec{B}$, sila palice $\vec{C}$ in sila teže $\vec{G}$, glej skico. Če postavimo koordinatni sistem z osjo x v vodoravni smeri in osjo y navpično navzgor je vektorski zapis sil $\vec{A} = A\vec{\imath}$, $\vec{B} = B\vec{\jmath}$, $\vec{C} = C(-\cos(\pi/2-\alpha)\vec{\imath} + \sin(\pi/2-\alpha)\vec{\jmath}) = C(-\sin\alpha\,\vec{\imath} + \cos\alpha\,\vec{\jmath})$ in $\vec{G} = -G\vec{\jmath}$. Sistem sil na kroglo ima skupno prijemališče v središcu krogle. Ravnovesni enačbi sta tako

$$A - \sin\alpha C = 0, \qquad B + \cos\alpha C - G = 0.$$



Slika 4.8: Diagram sil na prosti telesi.

Poglejmo sedaj vzvod. Ker s silo $\vec{F}$ potiskamo navzdol, deluje na vzvod sila tal $\vec{D}$. Delujeta še sili robnika kanala $\vec{D}$ in sila krogle na palico $-\vec{C}$. Iz diagrama sil takoj vidimo, da je $E = F$ in $C = D$. Iz ravnovesja momentov sledi, da je dvojica sil $\{\vec{D}, \vec{F}\}$ nasprotno enaka $\{\vec{C}, \vec{D}\}$. Od tod sledi

$$l\cos\alpha F = dD,$$

kjer je d razdalja med prijemališčema sil $\vec{C}$ in $\vec{D}$. Iz slike vidimo, da je $\sin\alpha = (h-x)/d$ in $x = r(1-\cos\alpha)$. Tako dobimo

$$d = \frac{h - r(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha}$$

in

$$D = \frac{l}{d}\cos\alpha F = \frac{l\sin\alpha\cos\alpha}{h - r(1-\cos\alpha)}F.$$

Potem je

$$B = G - \cos\alpha C = G - \cos\alpha D = G - \frac{l\sin\alpha\cos^2\alpha}{h - r(1-\cos\alpha)}F.$$

V trenutku dviga je sila tal $\vec{B}$ na kroglo enaka nič. Sila na vzvod, ki dvigne palico je tako enaka

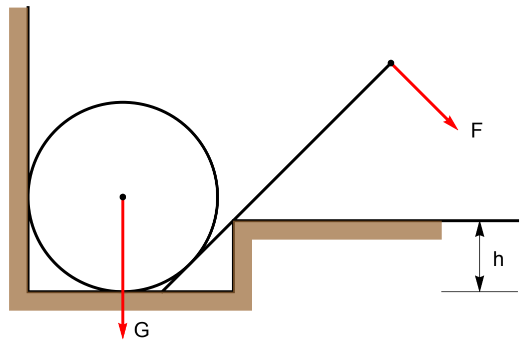
$$F = \frac{h - r(1-\cos\alpha)}{l\sin\alpha\cos^2\alpha}G.$$

Za $r = h$ potem sledi

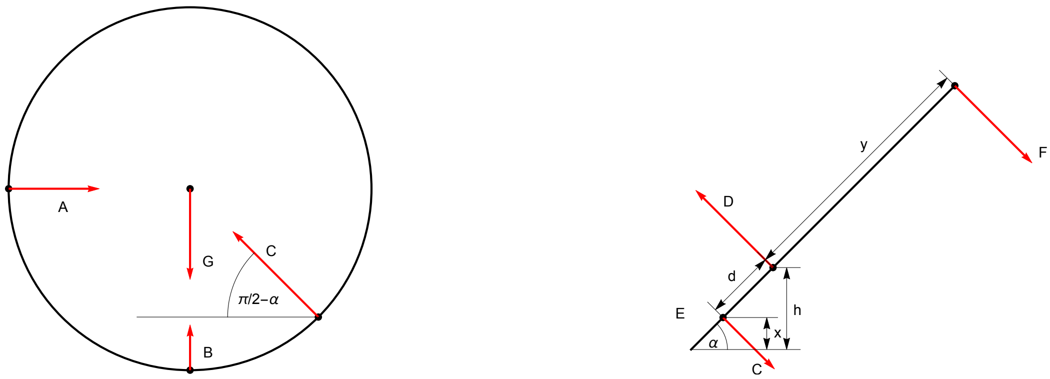
$$F = \frac{2r}{l\sin 2\alpha}G$$

in za $\alpha = \pi/4$ je $F = \frac{2r}{l}G$.

10. Podobno kot v predhodni nalogi tudi sedaj dvigujemo kroglo iz kanala, z razliko, da je tokrat sila $\vec{F}$ pravokotna na vzvod, glej skico. Določi silo F, ki dvigne kroglo. Dobljeni rezultat poenostavi za primer $r = h$ in $\alpha = \pi/4$.



Rešitev: Sistem sil na kroglo je enak kot v predhodni nalogi, sistem sil na drog pa se razlikuje, saj tokrat vzvoda ne potiskamo navzdol in tako ne deluje sila tal na drog, glej skico. Ravnovesni enačbi sta $D - F - C = 0$ in $dC - yF = 0$, kjer je y razdalja med prijemališčema sil $\vec{D}$ in $\vec{F}$. Tako dobimo $C = \frac{y}{d}F$. S pomočjo skice vidimo, da je $y = l - h/\sin\alpha$.



Slika 4.9: Diagram sil na prosti telesi.

Potem je z upoštevanjem ravnovesnih enačb za kroglo in znanih izrazov za d in y sledi

$$B = G - \cos\alpha C = G - \cos\alpha\frac{y}{d}F = G - \cos\alpha\frac{l\sin\alpha - h}{h - r(1-\cos\alpha)}F.$$

V trenutku dviga je sila tal $\vec{B}$ na kroglo enaka nič. Sila na vzvod, ki dvigne palico je tako enaka

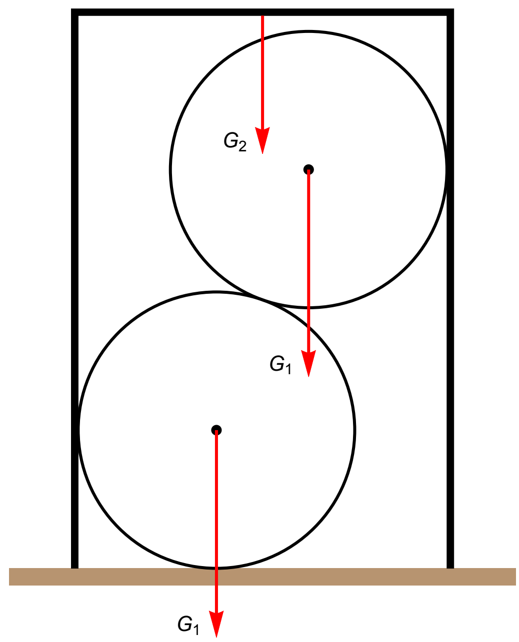
$$F = \frac{h - r(1 - \cos\alpha)}{(l \sin\alpha - h)\cos\alpha} G.$$

Za $r = h$ potem sledi

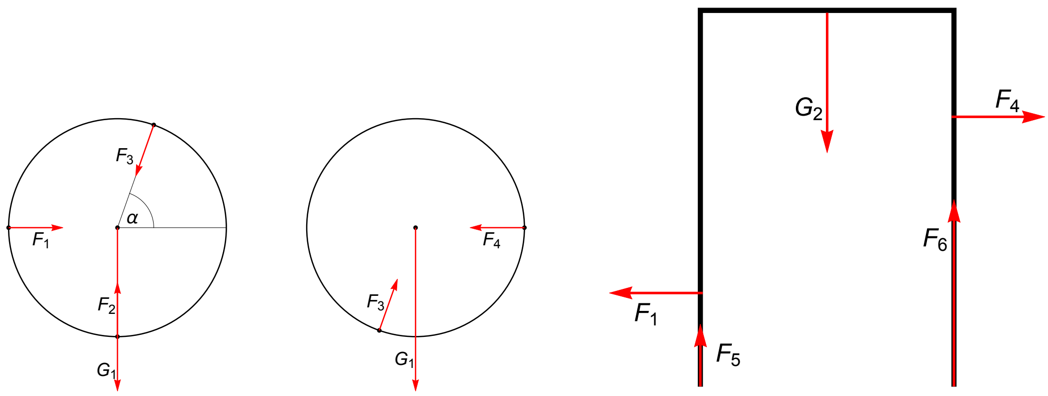
$$F = \frac{r}{l \sin\alpha - r} G$$

in za $\alpha = \pi/4$ je $F = \frac{r}{l/\sqrt{2} - r} G$. Če primerjamo rešitvi, vidimo, da je za visok robnik primernejši prvi način dviga, za nizek pa drugi.

11. Dve enaki krogli s polmerom r in težo G_1 pokrijemo z valjem s polmerom $R(r < R < 2r)$ in težo G_2, glej skico. Določi težo valja, da se valj ne prevrne.



Rešitev: Sistem je sestavljen iz treh togih teles, dveh krogel in valja. Narišimo digram sil prostih teles, glej skico. Na spodnjo kroglo delujejo sila leve stene $\vec{F}_1$, sila tal $\vec{F}_2$, sila teže $\vec{G}_1$ in sila zgornje krogle $\vec{F}_3$. Na zgornjo kroglo delujejo sila spodnje krogle $-\vec{F}_3$, sila desne stene $\vec{F}_4$ in sila teže $\vec{G}_1$. Na valjasto posodo pa sili tal $\vec{F}_5$ in $\vec{F}_6$, sili krogel $-\vec{F}_1$ in $-\vec{F}_4$ in sila teže $\vec{G}_2$. Za vektorski zapis sile postavimo koordinatni sistem z osjo x v vodoravni smeri in osjo y v navpični smeri. Kot ki ga oklepa os x z zveznico med središčema krogel označimo z α. Vektorski zapis sil je potem



Slika 4.10: Diagram sil na prosta telesa.

$$\vec{F}_1 = F_1\vec{\imath}, \quad \vec{F}_2 = F_2\vec{\jmath}, \quad \vec{F}_3 = -F_3(\cos\alpha\vec{\imath} + \sin\alpha\vec{\jmath}), \quad \vec{F}_4 = -F_4\vec{\imath}, \quad \vec{F}_5 = F_5\vec{\jmath}, \quad \vec{F}_6 = F_6\vec{\jmath}.$$

Na krogli deluje sistem sil s skupnim prijemališčem, zato je ravnovesna momentna enačba trivialno izpolnjena. Ravnovesna pogoja sta tako $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{G}_1 = \vec{0}$ za prvo kroglo in $-\vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \vec{G}_1 = \vec{0}$ za drugo. Komponentni zapis je

$$F_1 - F_3 \cos\alpha = 0 \quad F_2 - F_3 \sin\alpha - G_1 = 0, \quad F_3 \cos\alpha - F_4 = 0, \quad F_3 \sin\alpha - G_1 = 0.$$

Sistem ima štiri neznanke in štiri enačbe. Rešitev je

$$F_1 = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} G_1, \quad F_2 = 2G_1, \quad F_3 = \frac{1}{\sin\alpha} G_1, \quad F_4 = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} G_1.$$

Pri ravnovesju valja moramo upoštevati tudi momentno enačbo. Za pol si izberimo točko na tleh, ki leži na simetrali valja. Tako za izračun navora potrebujemo y koordinati y_1 in y_4 prijemališč sil $-\vec{F}_1$ in $-\vec{F}_4$ na valj. Očitno je $y_1 = r$, za y_4 pa iz definicije kota α vidimo, da je $y_4 = r(1 + 2\cos\alpha)$. Ravnovesne enačbe za valj se tako v komponentnem zapisu glasijo

$$F_5 + F_6 - G_2 = 0, \quad -F_1 + F_4 = 0, \quad -RF_5 + RF_6 + rF_1 - r(1 + 2\sin\alpha)F_4 = 0.$$

Druga enačba je že izpolnjena. Iz prve enačbe dobimo $F_6 = G_2 - F_5$ in to vstavimo v tretjo in upoštevajmo že izračunane vrednosti za F_1 in F_4. Potem

$$0 = R(G_2 - 2F_5) - 2rG_1 \cos\alpha.$$

in od tod

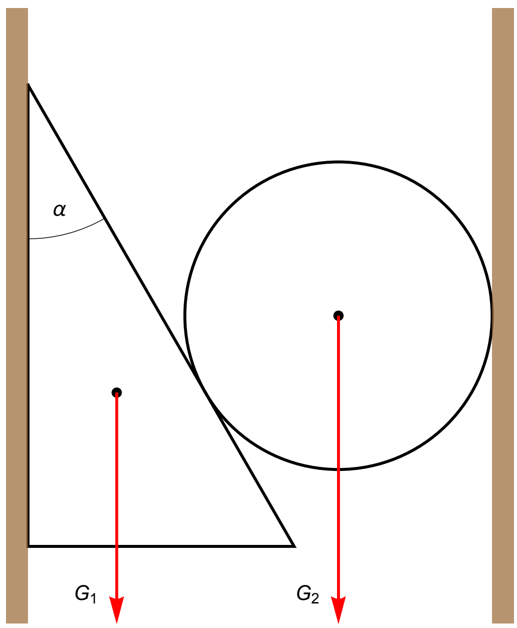
$$F_5 = \frac{1}{2} G_2 - \frac{r}{R} G_1 \cos\alpha.$$

Določimo sedaj kot α. Iz slike vidimo, da je $2R = r + 2r\cos\alpha + r$. Torej $\cos\alpha = (R - r)/r$. Vstavimo to v izraz za F_5 in dobimo

$$F_5 = \frac{1}{2} G_2 - G_1(1 - r/R).$$

Valj se ne prevrne, če je $F_5 \geq 0$. Pogoj, da se valj ne preverne je tako $G_2 \geq 2(1 - r/R)G_1$.

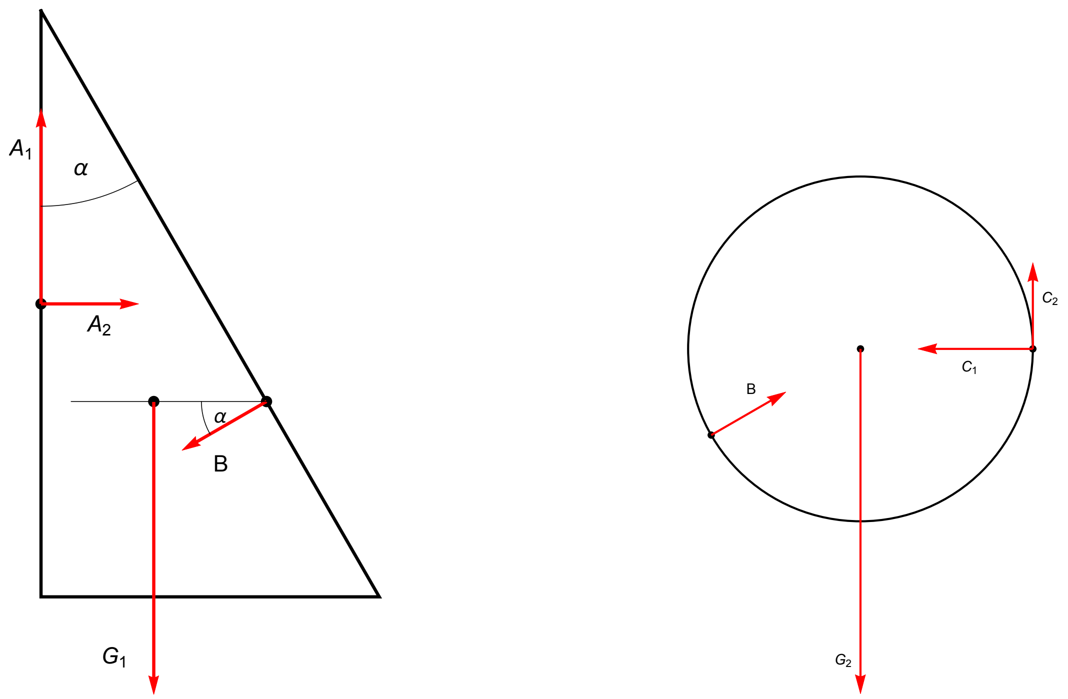
12. Med dvema vzporednima stenama sta zagozdena zagozda in valj, glej skico. Naklonski kot zagozde je α, polmer valja je r, teža zagozde G_1, valja pa G_2. Med zagozdo in valjem ni trenja, koeficient lepenja med steno in zagozdo oziroma valjem pa je k. Določi najmanjšo težo valja, ki drži zaporo.



Rešitev: Sistem je sestavljen iz dveh togih teles, zagozde in valja. Narišimo digram sil prostih teles, glej skico. Na zagozdo deluje sila stene $\vec{A} = A_1\vec{\imath} + A_2\vec{\jmath}$, sila teže $\vec{G}_1$ in sila valja na zagozdo $\vec{B} = -B(\cos\alpha\vec{\imath} + \sin\alpha\vec{\jmath})$. Tu smo kot običajmo postavili koordinatni sistem z osjo x v vodoravni smeri in y v navpični. Prijemališče sile stene določa momentni ravnovesni pogoj. Ker za našo nalogo to ni pomembno, ga ne bomo določili in tako tudi ne bomo uporabili momentno enačbo.

Ravnovesni enačbi za zagozdo sta

$$A_1 - B\cos\alpha = 0, \qquad A_2 - G_1 - B\sin\alpha = 0.$$



Slika 4.11: Diagram sil na prosta telesa.

Poglejmo sedaj kroglo na katero delujejo sile $-\vec{B} = B(\cos\alpha\vec{\imath} + \sin\alpha\vec{\jmath})$,$\vec{G}_2$ in $\vec{C} = C_1\vec{\imath} + C_2\vec{\jmath}$. Ravnovesne enačbe so

$$-C1 + B\cos\alpha = 0, \quad C_2 + B\sin\alpha - G_2 = 0, \quad rC_2 = 0.$$

Od tod sledi

$$C_2 = 0, \quad B = \frac{1}{\sin\alpha}G_2, \quad C_1 = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}G_2.$$

Iz ravnovesnih enačb za zagozdo potem sledi

$$A_1 = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}G_2, \quad A_2 = G_1 + B\sin\alpha = G_1 + G_2.$$

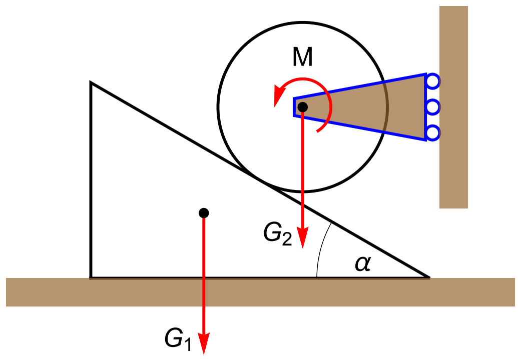
Pogoj, da klada ne zdrsne je $A_2 < kA_1$. Vstavimo izračunane vrednosti. Potem

$$G_1 + G_2 < k\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}G_2.$$

Od tod dobimo pogoj

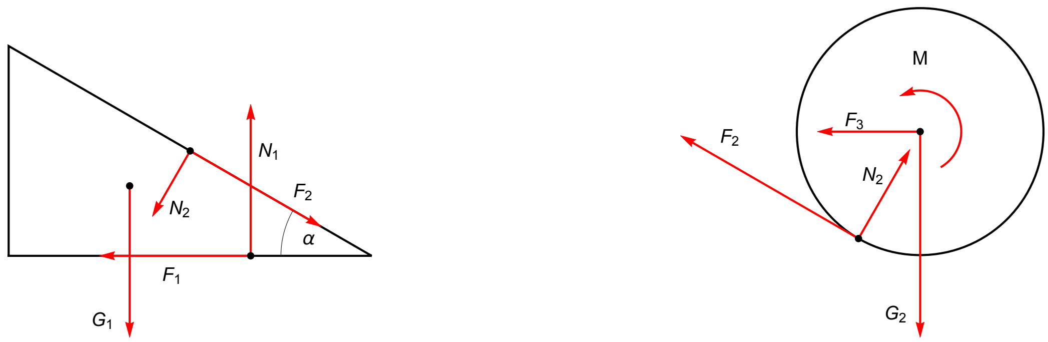
$$\frac{\sin\alpha G_1}{k\cos\alpha - \sin\alpha} < G_2.$$

13. Valj s polmerom r in težo G_2, ki je vertikalno prosto gibljiv, drsi po podstavljeni zagozdi s težo G_1, glej skico. Vrtenje valja poganja navor M. Koeficient trenja med tlemi in zagozdo je k_1, med zagozdo in valjem pa k_2. Določi navor M in zvezo med koeficientoma, da bo vrtenje valja enakomerno pomikalo zagozdo proti desni.



Rešitev: Sistem je sestavljen iz dveh togih teles, zagozde in valja. Narišimo digram sil prostih teles, glej skico.

Na zagozdo deluje sila teže $\vec{G}_1 = -G_1\vec{\jmath}$, sila tal $F_1\vec{\imath} + N_1\vec{\jmath}$ in sila valja $F_2\vec{e}_1 + N_2\vec{e}_2$, kjer je $vece_1$ v smeri strmine zagozde, torej $\vec{e}_1 = \cos\alpha\vec{\imath} - \sin\alpha\vec{\jmath}$, $\vec{e}_2$ pa je pravokoten na strmino, $\vec{e}_2 = -\sin\alpha\vec{\imath} - \cos\alpha\vec{\jmath}$. Na valj delujejo sila teže $\vec{G}_2 = -G_2\vec{\jmath}$, sila zagozde na valj $-F_2\vec{e}_1 - N_2\vec{e}_2$ in sila ležaja $-F_3\vec{\imath}$.



Slika 4.12: Diagram sil na prosti telesi, zagozda in valj.

Ravnovesni enačbi za zagozdo sta

$$F_2\cos\alpha - F_1 - N_2\sin\alpha = 0, \quad -F_2\sin\alpha - G_1 - N_2\cos\alpha + N_1 = 0. \tag{4.1}$$

Tu smo upoštevali samo ravnovesje sil, saj prijemališča sile podlage ne poznamo. Ravnovesne enačbe za valj pa so

$$-F_2\cos\alpha - F_3 + N_2\sin\alpha = 0, \quad F_2\sin\alpha - G_2 + N_2\cos\alpha = 0, \quad M - F_2 r = 0. \tag{4.2}$$

Pri drsenju zagozde in valja velja $F_1 = k_1 N_1$ in $F_2 = k_2 N_2$. Vstavimo to v prvi dve enačbi (4.1). Tako dobimo dve enačbe za neznanki N_1 in N_2. Rešitev je

$$N_1 = \frac{G_1(\sin\alpha - k_2\cos\alpha)}{\sin\alpha + k_1 k_2\sin\alpha + (k_1 - k_2)\cos\alpha}, \tag{4.3}$$

$$N_2 = -\frac{G_1 k_1}{\sin\alpha + k_1 k_2\sin\alpha + (k_1 - k_2)\cos\alpha}. \tag{4.4}$$

Drugo enačbo v (4.2) preoblikujemo v

$$N_2(\cos\alpha + k_2\sin\alpha) = G_2.$$

Upoštevajmo sedaj izraz za N_2. Tako dobimo enačbo, ki povezuje koeficienta trenja k_1 in k_2. Če jo rešimo na k_2, dobimo

$$k_2 = \frac{\tan\alpha + (1 + G_1/G_2)\, k_1}{1 - (1 + G_1/G_2)\, k_1 \tan\alpha}.$$

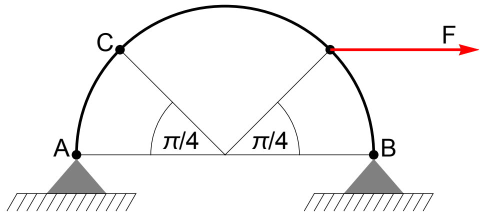
Za konec izračunajmo še navor M. Iz tretje enačbe (4.2) sledi

$$M = rF_2 = rk_2N_2 = r\,(G_2 \sin\alpha + (G_1 + G_2)\, k_1 \cos\alpha)\,.$$

4.2 Dodatne naloge

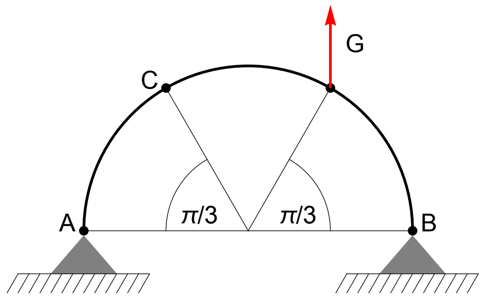
1. Tročleni lok s polmerom R sestavljen iz lokov AC in CB je obremenjen tako kot kaže skica. Določi sile podpor.

   Rešitev: $A_1 = \frac{1}{4}(-2+\sqrt{2})F$, $A_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}F$, $B_1 = -\frac{1}{4}(2+\sqrt{2})F$, $B_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}F$.



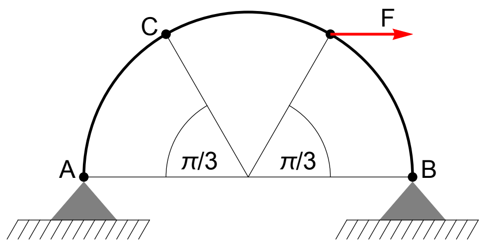
2. Tročleni lok s polmerom R sestavljen iz lokov AC in CB je obremenjen tako kot kaže skica. Določi sile podpor.

   Rešitev: $A_1 = -\frac{1}{4\sqrt{3}}G$, $A_2 = -\frac{1}{4}G$, $B_1 = \frac{1}{4\sqrt{3}}G$, $B_2 = -\frac{3}{4}G$.



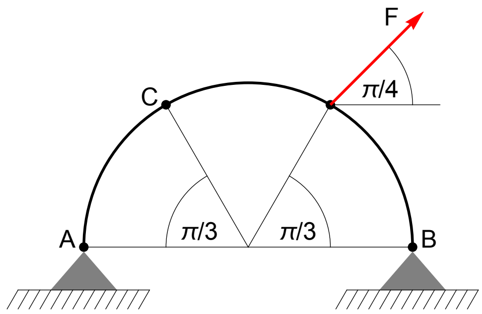
3. Tročleni lok s polmerom R sestavljen iz lokov AC in CB je obremenjen tako kot kaže skica. Določi sile podpor.

   Rešitev: $A_1 = -\frac{1}{4}F$, $A_2 = -\frac{\sqrt{3}}{4}F$, $B_1 = -\frac{3}{4}F$, $B_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}F$.



4. Tročleni lok s polmerom R sestavljen iz lokov AC in CB je obremenjen tako kot kaže skica. Določi sile podpor in pokaži, da lahko nalogo rešiš tudi s kombinacijo rešitev prdhodnih nalog.

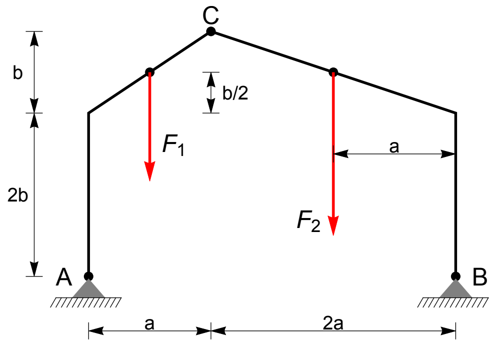
   Rešitev: $A_1 = -\frac{(3+\sqrt{3})F}{12\sqrt{2}}$, $A_2 = -\frac{1}{4}\sqrt{2+\sqrt{3}}F$, $B_1 = \frac{(-9+\sqrt{3})F}{12\sqrt{2}}$, $B_2 = \frac{(-3+\sqrt{3})F}{4\sqrt{2}}$.



5. Tročleni okvir sestavljen iz levega dela AC in desnega CB je členkasto nepomično podprt v A in B, glej skico. Izračunaj sile v podporah za primer $F_1 = F$, $F_2 = 2F$.

Rešitev:

$$A_1 = \frac{aF}{3b}, \quad A_2 = \frac{3F}{2},$$
$$B_1 = -\frac{aF}{3b}, \quad B_2 = \frac{3F}{2} A_1.$$



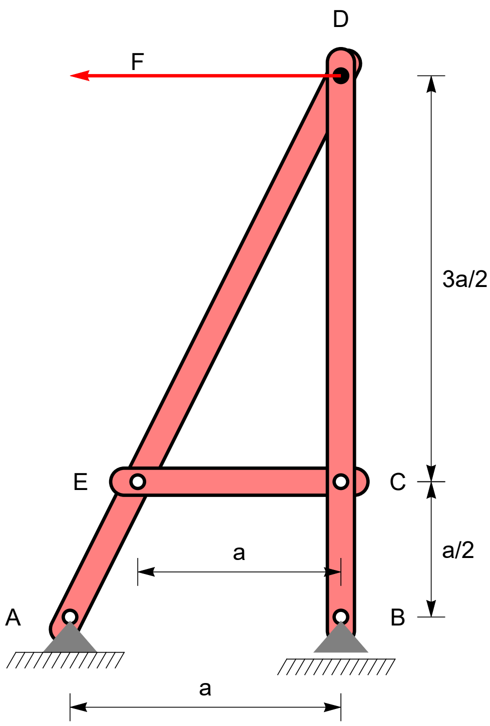
6. Togo telo je sestavljeno iz treh togih elementov in obremenjeno tako kot kaže skica. Določi sile v podporah in členkih. Pri tem obravnavaj primera:

- sila F deluje na element AD;
- del sile λF deluje na AD, del $(1-\lambda)F$ pa na element BD.

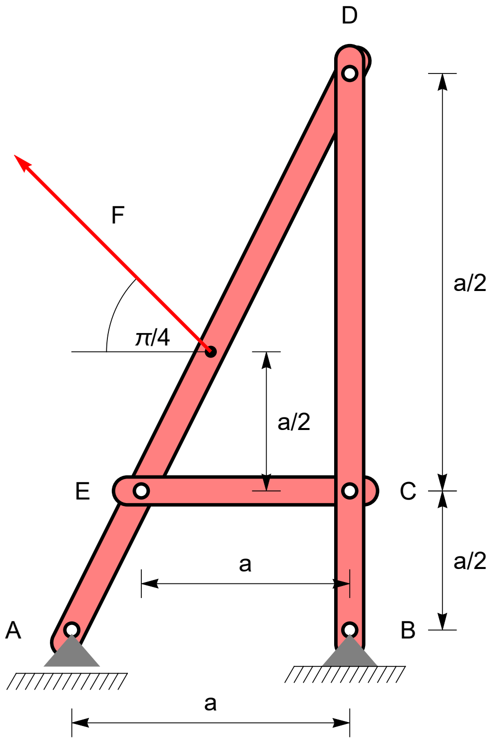
Rešitev:

- $A_1 = F$, $A_2 = 2F$, $B_2 = -2F$, $C_1 = C_2 = E_1 = E_2 = 0$, $D_1 = -F$, $D_2 = -2F$.
- Enako kot prej, z razliko $D_1 = (\lambda - 1)F$, $D_2 = -2F$.

Velja splošno, če je obremenitev v členku, sila v D ni enolično določena. Sile podpor pa so seveda neodvisne od delitve obremenitve F.



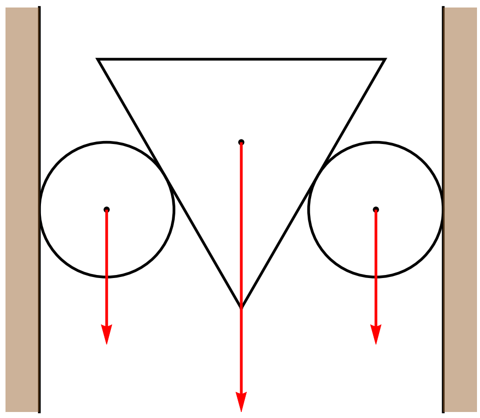
7. Togo telo je sestavljeno iz treh togih elementov in obremenjeno tako kot kaže skica. Določi sile v podporah in členkih.



Rešitev:

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \frac{F}{2\sqrt{2}}, \\
B_1 &= \frac{F}{\sqrt{2}}, \\
B_2 &= -\frac{3F}{2\sqrt{2}}, \\
C_1 &= -\frac{2\sqrt{2}F}{3}, \\
C_2 &= 0, \\
D_1 &= -\frac{F}{3\sqrt{2}}, \\
D_2 &= -\frac{3F}{2\sqrt{2}}, \\
E_1 &= \frac{2\sqrt{2}F}{3}, \\
E_2 &= 0
\end{aligned}
$$

8. Med navpičnima stenama je zapora iz zagozde in dveh enakih valjev, glej skico. Polmer valjev je R, kot v vrhu zagozde pa $\pi/3$. Masi valjev sta m, zagozde pa $M = 2m$. Vse stične ploskve imajo enak koeficient trenja k.



   (a) Identificiraj vse zunanje sile.

   (b) Razstavi sistem na prosta telesa in nariši njihove diagrame sil.

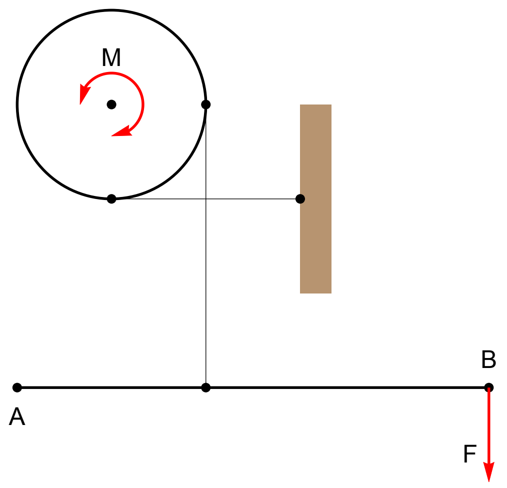
   (c) Za vsako prosto telo posebej napiši ravnovesne enačbe.

   (d) Reši ravnovesne enačbe (tu upoštevaj simetrijo naloge).

   (e) Določi pogoj na koeficient trenja, da zapora ne zdrsne.

Rešitev: Pogoj je $\frac{1}{1+\sqrt{3}} < k$.

9. Za tračno zavoro na skici, z ročico AB dolžine l in polmerom koluta r, določi silo F na ročico, ki bo uravnovesila navor M na kolut. Ločeno obravnavaj primera sournega in protiurnega delovanja navora M.



Rešitev: Protiurno vrtenje

$$F = \frac{2M\,\mathrm{e}^{3k\pi/2}}{l\left(\mathrm{e}^{3k\pi/2} - 1\right)},$$

sourno

$$F = \frac{2M}{l\left(\mathrm{e}^{3k\pi/2} - 1\right)}.$$

10. Tri enake krogle s polmerom r in težo G_1 pokrijemo z valjem s polmerom $R(r < R < 2r)$ in težo G_2, glej skico za primer dveh krogel. Določi težo valja, da se valj ne prevrne.

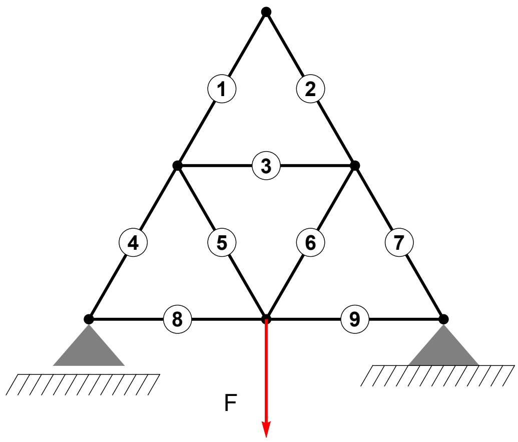
Rešitev: Velja enak pogoj kot za dve krogli.

Poglavje 5

Paličje

5.1 Rešene naloge

1. Za paličje sestavljeno iz enakostraničnih trikotnikov na sliki izračunaj sile palic.



Rešitev: Označimo levo podporo z A, desno z B in postavimo koordinatni sistem z osjo x v vodoravni smeri in osjo y v navpični. Sili podpor sta $\vec{A} = A\vec{\jmath}$ in $\vec{B} = B_1\vec{\imath} + B_2\vec{\jmath}$. Iz simetrije naloge takoj sledi $B_1 = 0$ in $A = B_2 = F/2$. Ker je vrh paličja neobremenjen, sta sili palic v vrhu enaki nič, $F_1 = F_2 = 0$. Nadalje zaradi simetrije sledi, da je $F_4 = F_7$, $F_5 = F_6$ in $F_8 = F_9$. Sile F_3, F_6, F_7 in F_9 določimo z vozliščno metodo. Iz ravnovesja sil v desni podpori

$$\frac{1}{2}F + \frac{\sqrt{3}}{2}F_7 = 0, \qquad -F_9 - \frac{1}{2}F_7 = 0$$

sledi

$$F_7 = -\frac{1}{\sqrt{3}}F, \qquad F_9 = \frac{1}{2\sqrt{3}}F.$$

Iz ravnovesja v presečišču palic 2, 3, 6 in 7

$$-F_3 - \frac{1}{2}F_6 + \frac{1}{2}F_7 = 0, \qquad -\frac{\sqrt{3}}{2}F_6 - \frac{\sqrt{3}}{2}F_7 = 0$$

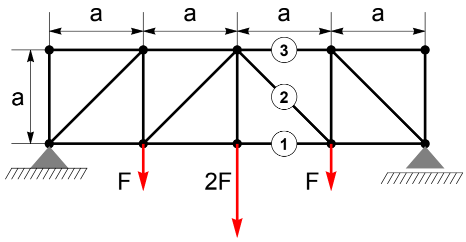
dobimo

$$F_6 = \frac{1}{\sqrt{3}}F, \qquad F_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}F.$$

2. Za paličje na sliki izračunaj:

   (a) sile v podporah A in B;

   (b) sile označenih palic $1, 2, 3$.



   Rešitev: Prvo določimo sile podpor. Sili podpor v vertikalni smeri označimo z A in B. Momentna enačba s polom v A je

$$4aB - F(a + 4a + 3a) = 0.$$

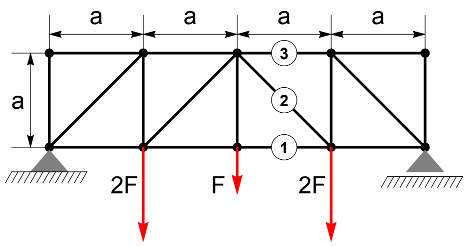
   Od tod $B = 2F$ in zaradi simetrije problema $A = B = 2F$. Horizontalna komponenta v podpori je enaka nič.

   Sile palic bomo izračunali s prerezno metodo. Zapisali bomo ravnovesne enačbe za desni del paličja. Momentna enačba v presečišču prve in druge palice je $aF_3 + aB = 0$. Potem $F_3 = -B = -2F$. Momentna enačba v presečišču druge in tretje palice je $-aF_1 - aF + 2aB = 0$. Od tod $F_1 = -F + 2B = 3F$. Silo F_2 druge palice dobimo iz ravnovesja sil v navpični smeri. Velja $B - F + \frac{1}{\sqrt{2}}F_2 = 0$ in tako $F_2 = -\sqrt{2}F$.

3. Za paličje na sliki izračunaj:

   (a) sile v podporah A in B;

   (b) sile označenih palic $1, 2, 3$.



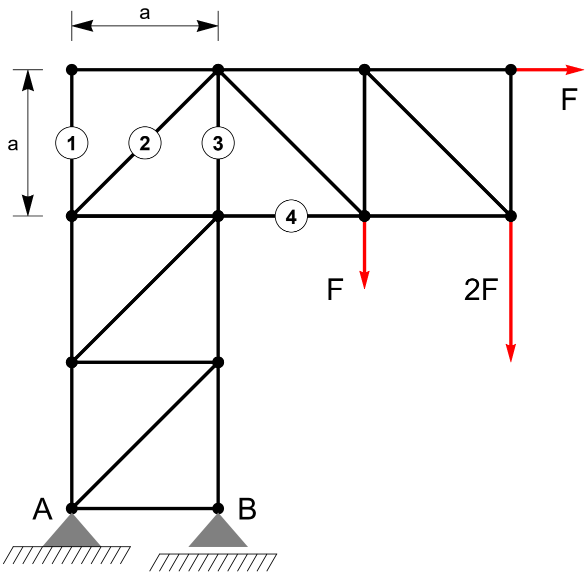
   Rešitev: Prvo določimo sile podpor. Sili podpor v vertikalni smeri označimo z A in B. Momentna enačba s polom v A je

$$-4aB + F(2a + 2a + 6a) = 0.$$

   Od tod $B = \frac{5}{2}F$ in zaradi simetrije $A = B = \frac{5}{2}F$. Horizontalna komponenta v podpori je enaka nič.

   Sile palic bomo izračunali s prerezno metodo. Zapisali bomo ravnovesne enačbe za desni del paličja. Momentna enačba v presečišču prve in druge palice je $aF_3 + aB = 0$. Potem $F_3 = -\frac{5}{2}F$. Momentna enačba v presečišču druge in tretje palice je $-aF_1 - 2aF + 2aB = 0$. Od tod $F_1 = 3F$. Silo F_2 druge palice dobimo iz ravnovesja sil v navpični smeri. Velja $B - 2F + \frac{1}{\sqrt{2}}F_2 = 0$ in tako $F_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}F$. Pravilnost izračuna sil lahko preizkusimo z zapisom ravnovesja sil v vodoravni smeri za desni del paličja. Izračunajmo $F_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}F_2 + F_3 = 3F - \frac{1}{2}F + \frac{5}{2}F = 0$. Vsota je enaka nič. Ravnovesni pogoj v vodoravni smeri je res izpolnjen.

4. Za dano paličje na skici določi sile označenih palic.



Rešitev: Prvo izračunamo sili podpor. Silo podpore v A označimo z $\vec{A} = A_1\vec{\imath} + A_2\vec{\jmath}$, v B pa z $\vec{B} = B_2\vec{\jmath}$. Iz ravnovesne enačbe v vodoravni smeri sledi $A_1 = -F$. Momentna enačba s polom v A je

$$a \times B_2 - 2a \times F - 3a \times 2F - 3a \times F = 0$$

in tako $B_2 = 11F$. Momentna enačba s polom v B pa je

$$-a \times A_2 - a \times F - 2a \times 2F - 3a \times F = 0.$$

Rešitev je $A_2 = -8F$. Preizkus $A_2 + B_2 = -3F$ potrdi pravilnost izračuna.

Sledi izračun sil palic. Prvo opazimo, da je $F_1 = 0$, saj je levo zgornje vozliče, ki je povezano z dvema palicama neobremenjeno. To pomeni, da lahko sile palic izračunamo s prerezno metodo, ki navidezno prereže paličje skozi palice 2, 3 in 4. Zapisali bomo ravnovesne enačbe za zgornji del paličja. Momentna enačba s polom v presečišču 2. in 3. palice je

$$-a \times F_4 - a \times F - 2a \times 2F = 0 \qquad \Longrightarrow F_4 = -5F,$$

momentna enačba s polom v presečišču 2. in 4. palice je

$$-a \times F_3 - 2a \times F - 3a \times 2F - a \times F = 0 \qquad \Longrightarrow F_3 = -9F,$$

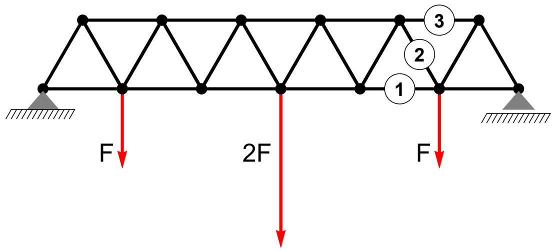
momentna enačba s polom v presečišču 3. in 4. palice pa je

$$\frac{a}{\sqrt{2}} \times F_2 - a \times F - 2a \times 2F - a \times F = 0 \qquad \Longrightarrow F_2 = 6\sqrt{2}F.$$

5. Podano je paličje sestavljeno iz enakostraničnih trikotnikov.

   (a) Določi sile v podporah.

   (b) Izračunaj označene sile palic.



Rešitev:

(a) Označimo z a dolžino stranice trikotnika, z A levo in z B desno podporo. Ker so obremenitve samo v navpični smeri, sta sili podpor tudi samo v navpični smeri. Iz momentne enačbe s polom v A sledi

$$-aF - 3a \times 2F - 5aF + 6aB = 0.$$

Od tod $B = 2F$. Iz momente enačbe s polom v B pa dobimo

$$-6aA + 5aF + 3a \times 2F + aF = 0 \Longrightarrow A = 2F.$$

Za kontrolo $A + B - 4F = 0$. Sili podpor lahko dobimo tudi takoj z upoštevanjem simetrije problema.

(b) Sile določimo s prerezno metodo. Sile palic bomo določili s pomočjo ravnovesnih enačb za desni del paličja. Iz momentne enačbe s polom v presečišču prve in druge palice sledi

$$\frac{\sqrt{3}}{2}aF_3 + aB = 0 \Longrightarrow F_3 = -\frac{2}{\sqrt{3}}B = -\frac{4}{\sqrt{3}}F.$$

Iz momentne enačbe s polom v presečišču druge in tretje palice sledi

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}aF_1 - \frac{1}{2}aF + \frac{3}{2}aB = 0 \Longrightarrow F_1 = \frac{5}{\sqrt{3}}F.$$

Silo druge palice določimo z upoštevanjem ravnovesne enačbe v vodoravni smeri. Imamo

$$\frac{1}{2}F_2 + F_1 + F_3 = 0 \Longrightarrow F_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}}F.$$

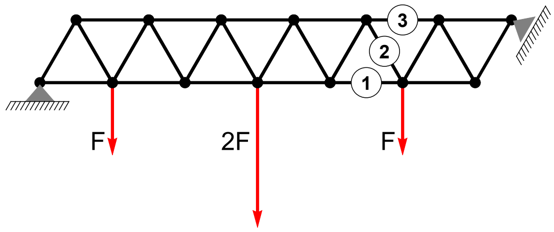
Za kontrolo

$$\frac{\sqrt{3}}{2}F_2 - F + B = 0.$$

6. Podano je paličje sestavljeno iz enakostraničnih trikotnikov.

   (a) Določi sile v podporah.

   (b) Izračunaj označene sile palic.



Rešitev:

(a) Označimo z a dolžino stranice trikotnika, z A levo in z B desno podporo. Postavimo koordinatni sistem z izhodiščem v A in usmerimo os x v vodoravno smer os y pa v navpično. Sila leve podpore je $\vec{A} = A_1\vec{\imath} + A_2\vec{\jmath}$, desne podpore pa $\vec{B} = B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\imath} + \frac{1}{2}\vec{\jmath}\right)$. Primejališče sile desne podpore je točka B s koordinatami $a\left(\frac{13}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
Silo desne podpore dobimo iz momentne enačba ravnovesja s polom v točki A. Moment sile podpore je

$$a\left(\frac{13}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}\right) \times B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\imath} + \frac{1}{2}\vec{\jmath}\right) = 4aB\vec{k}.$$

Momentna enačba v semri osi z se tako glasi

$$0 = -aF - 6aF - 5aF + 4aB.$$

Od tod $B = 3F$ in

$$\vec{B} = 3F\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\imath} + \frac{1}{2}\vec{\jmath}\right).$$

Silo podpore A dobimo iz ravnovesja sil v vodoravni in navpični smeri. Rešitev je

$$\vec{A} = F\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\vec{\imath}, \frac{5}{2}\vec{\jmath}\right).$$

(b) Sile določimo s prerezno metodo. Sile palic bomo določili s pomočjo ravnovesnih enačb za levi del paličja. Iz momentne enačbe s polom v presečišču prve in druge palice dobimo silo tretje palice

$$F_3 = -3\sqrt{3}F.$$

Momentna enačba s polom v presečišču druge in tretje palice nam da silo prve palice

$$F_1 = \frac{5}{\sqrt{3}}F.$$

Silo druge palice

$$\vec{F_2} = F_2\left(\frac{1}{2}\vec{\imath} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}\right)$$

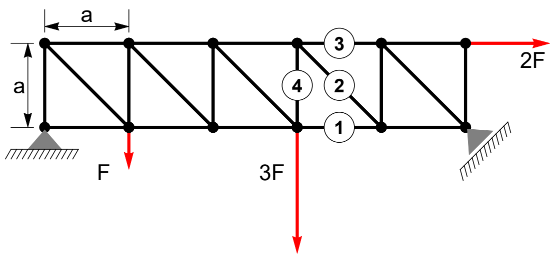
določimo iz ravnovesja sil. Po krajšem računu dobimo

$$F_2 = -\frac{F}{\sqrt{3}}.$$

7. Za podano paličje na sliki, desna podpora je drsna pod kotom $\pi/4$:

   (a) določi sile v podporah;

   (b) izračunaj označene sile palic.



Rešitev:

(a) Silo desne podpore zapišemo v obliki $\vec{B} = B(-\vec{\imath} + \vec{\jmath})/\sqrt{2}$, sila leve podpore pa je $\vec{A} = A_1\vec{\imath} + A_2\vec{\jmath}$. Momentna enačba s polom v levi podpori se glasi

$$-aF - 9aF + \frac{5aB}{\sqrt{2}} - 2aF = 0 \Rightarrow B = \frac{12\sqrt{2}F}{5},$$

momentna enačba s polom v desni podpori pa

$$-5aA_2 + 4aF + 6aF - 2aF = 0 \Rightarrow A_2 = \frac{8F}{5}.$$

Ravnovesna enačba sil v vodoravni smeri je

$$A_1 - \frac{B}{\sqrt{2}} + 2F = 0 \Rightarrow A_1 = \frac{2F}{5}.$$

(b) Sile palic 1,2 in 3 dobimo s prerezno metodo. Zapišimo ravnovesne pogoje za desni del paličja. Ravnovesje momentov s polom v presečišču palice 2 in 3 je

$$aF_1 + 2aF + aA_1 - 3aA_2 \Rightarrow F_1 = \frac{12F}{5}.$$

Ravnovesje momentov s polom v presečišču palice 1 in 2 je

$$-aF_3 + 3aF + 3aF - 4aA_2 \Rightarrow F_3 = -\frac{2F}{5}.$$

Iz ravnovesja sil v navpični smeri potem sledi

$$F_2 = -\frac{12F\sqrt{2}}{5}.$$

Sedaj, ko poznamo v presečišču palice 2 in 3 sili F_2 in F_3 lahko določimo tudi F_4.

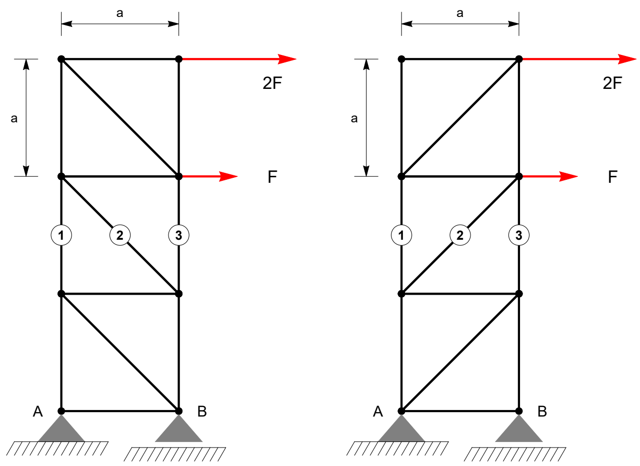
$$F_4 + \frac{1}{\sqrt{2}}F_2 = 0 \Rightarrow F_4 = \frac{12F}{5}.$$

8. Podani sta dve paličji, glej skico.

   (a) Izračunaj sile v podporah.

   (b) Določi sile označenih palic.

   (c) Ugotovi, katero paličje ima manjše kompresibilne sile označenih palic.



Rešitev:

(a) Prvo izračunamo sile podpor. Ker sta obe paličji enako obremenjeni, imata enake sile podpor. Sila v levi podpori je $\vec{A} = A_1\vec{\imath} + A_2\vec{\jmath}$, v desni pa $\vec{B} = B_2\vec{\jmath}$. Vsota sil v vodoravni smeri je nič. Potem $A_1 = -3F$. Iz momentne enačbe s polom v B sledi $-a \times A_2 - 2a \times F - 3a \times 2F = 0$ in od tod $A_2 = -8F$. Nadalje velja $A_2 + B_2 = 0$ in tako $B_2 = -A_2 = 8F$.

(b) Izračunajmo sedaj sile označenih palic levega paličja. Paličje navidezno prerežemo skozi označene palice. Zgornji odrezani del je pod vplivom označenih palic v ravnovesju. Postavimo pol momentne enačbe v presek prve in druge palice. Potem $0 = -a \times F_3 - a \times 2F$ in tako $F_3 = -2F$. Sedaj pol momentne enačbe v presek druge in tretje palice. Potem $0 = a \times F_1 - a \times F - 2a \times 2F$ in $F_1 = 5F$. Vsota sil v vodoravni smeri mora biti enaka nič. Torej $0 = F_2/\sqrt{2} + F + 2F$ in $F_2 = -3\sqrt{2}F$. Za kontrolo preverimo, če je vsota v navpični smeri tudi enaka nič. Izračunajmo $-F_1 - F_2/\sqrt{2} - F_3 = -5F + 3F + 2F = 0$. Tako smo za levo paličje dobili

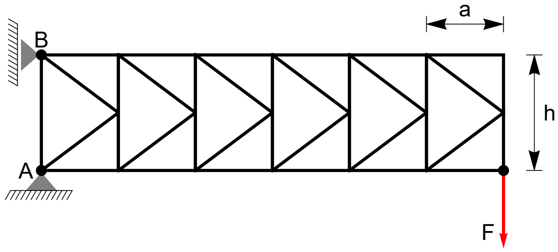
$$F_1 = 5F, \quad F_2 = -3\sqrt{2}F, \quad F_3 = -2F.$$

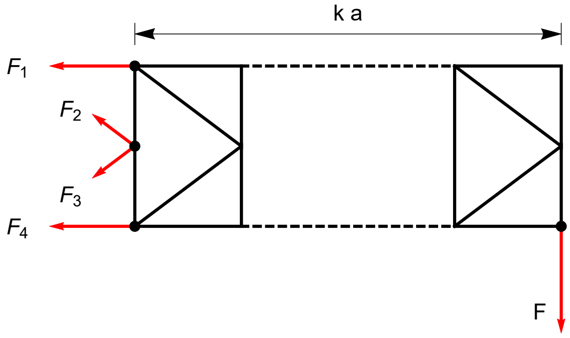
Poglejmo sedaj še drugo paličje. Postavimo pol v presečišče prve in druge palice. Potem $0 = -a \times F_3 - a \times F - 2a \times 2F$ in $F_3 = -5F$.Za presečišče druge in tretje palice velja $0 = a \times F_1 - a \times 2F$. Torej $F_1 = 2F$. Ravnovesna enačba v vodoravni smeri je $0 = -F/\sqrt{2} + F + 2F$ in tako $F_2 = 3\sqrt{2}F$. Za kontrolo $-F_1 - F_2/\sqrt{2} - F_3 = -2F - 3F + 5F = 0$. Sile desnega paličja so

$$F_1 = 2F, \quad F_2 = 3\sqrt{2}F, \quad F_3 = -5F.$$

(c) Ker je $-5 < -3\sqrt{2}$, ima desno paličje večje kompresibilne sile označenih palic, zato je leva postavitev boljša.

9. Za K paličje na sliki izračunaj sile palic.

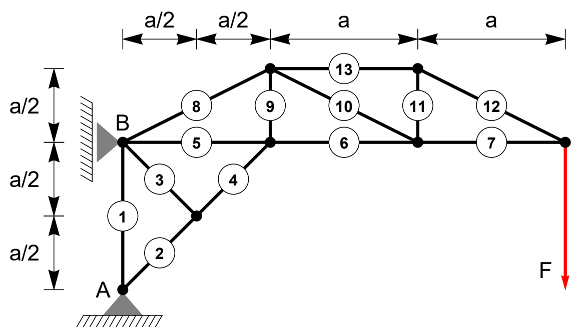




Rešitev: Paličje navidezno prerežemo tako kot kaže skica. Prerez seka štiri palice. V splošnem v takem primeru ne moremo uporabiti prerezne metode, v posebnem primeru pa jo kljub temu lahko. Iz ravnovesja sil v presečišču sile F_2 in F_3 sledi, da je $F_3 = -F_2$. S to dodatno zvezo imamo sedaj štiri neznanke in štiri enačbe s katerimi lahko določimo sile palic na preseku. Iz ravnovesja sil v vodoravni smeri potem sledi $F_1 + F_4 = 0$, iz momentne enačbe s polom v presečišču druge in tretje sile pa dobimo $hF_1/2 - hF_4/2 = kaF$. Dobili smo dve enačbi za neznanki F_1 in F_4. Rešitev je $F_1 = kaF/h$ in $F_4 = -kaF/h$.

Določiti moramo še F_2. Enačba ravnovesja v navpični smeri je $0 = F_2 \sin\alpha - F_3 \sin\alpha - F = 0$, kjer je α kot med drugo palico in vodoravno smerjo. Rešitev enačbe je $F_2 = F/2 \sin\alpha$ in potem $F_3 = -F/2 \sin\alpha$. Kot α določimo iz slike. Velja $\sin\alpha = h/\sqrt{4a^2 + h^2}$. Vidimo, da so sile poševnih palic neodvisne od preseka. Sile spodnjih palic so kompresijske, zgornje pa natezne. Sile palic so ekstremalne pri podporah.

10. Za paličje na sliki izračunaj kompresijske sile palic.

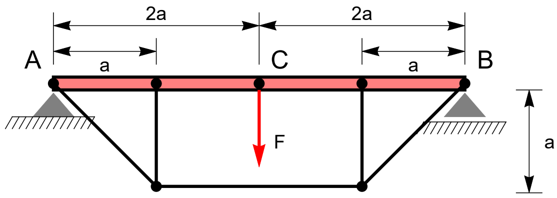


Rešitev: Sile palic označimo z F_i. Očitno je F_2 kompresijska in tudi F_4, saj je $F_2 = F_4$. V stiku palic 4, 5, 6, 9 mora palica 9 prevzeti kompresijsko komponento v vertikalni smeri, zato je tudi F_9 kompresijska. Nadalje je F_7 kompresijska in ker je F_{12} natezna, je kompresijska tudi F_{11}. Ker je F_{12} natezna, je natezna tudi F_{13}. Ker je F_{11} kompresijska, je F_{10} natezna in končno, ker je F_7 kompresijska in F_{10} natezna, je F_6 tudi kompresijska. Kompresijske so tako sile F_2, F_4, F_6, F_7, F_9 in F_{11}.

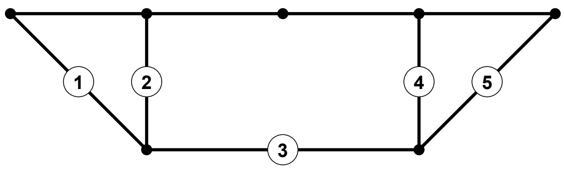
Označimo kot med palico 1 in 2 z α. Očitno je $\alpha = \pi/4$. Kot palico med 7 in 12 palico označimo z β. Hitro vidimo, da je $\sin\beta = 1/\sqrt{5}$ in $\cos\beta = 2/\sqrt{5}$. Določimo prvo sile podpore $\vec{A} = A_1\vec{\imath} + A_2\vec{\jmath}$ in $\vec{B} = B_1\vec{\imath}$. Iz momentne enačbe s polom v A sledi $B_1 = -3F$. Potem $A_1 = 3F$ in iz ravnovesja sil v navpični smeri $A_2 = F$. Iz ravnovesja sil v A v vodoravni smeri sledi $3F + F_2/\sqrt{2} = 0$. Potem $F_2 = F_4 = -3\sqrt{2}F$. Iz ravnovesja v presečišču palic 4, 5, 6 in 9 potem sledi $F_9 - F_2/\sqrt{2} = 0$ in tako $F_9 = -3F$. Iz ravnovesja na stiku 7 in 12 palice dobimo $F_7 = -2F$ in $F_{12} = \sqrt{5}F$. Potem je $F_{11} = -F$. Uporabimo še momentno enačbo s polom v preseku palice 10 in 13 za desni del paličja. Dobimo $-aF_6/2 - 2aF = 0$ in od tod $F_6 = -4F$. Tako smo dobili

$$F_2 = F_4 = -3\sqrt{2}F, \quad F_6 = -4F, \quad F_7 = -2F, \quad F_9 = -3F, \quad F_{11} = -4F.$$

11. Dva nosilca sta členkasto speta v točki C, enostavno podprta na svojih krajiščih in spojena s paličjem tako kot kaže skica. Izračunaj sile palic.



Rešitev: Prvo izračunamo sili podpor. Iz simetrije naloge takoj sledi, da sta sili podpor enaki $A = B = F/2$.
Za izračun sil palic, palice prvo označimo, tako kot kaže skica. Palico 3 navidezno prerežemo s prerezom skozi točko C. Na desni del konstrukcije deluje sila desne podpore, levi del konstrukcije s silo $\vec{C}$ v točki C, obtežba $\vec{F}$ in sila palice $\vec{F_3}$.



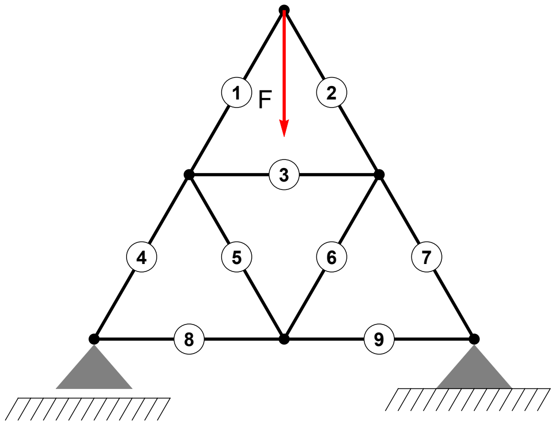
Obtežbo $\vec{F}$ lahko v celoti pripišemo levemu ali desnemu delu, lahko pa jo tudi proporcionalno razdelimo med deloma. Kot bomo kmalu videli, kako obtežbo razdelimo, ne vpliva na sile palic. Ravnotežna enačba momenta s polom v točki C je $2a\frac{1}{2}aF - aF_3 = 0$ in tako $F_3 = F$. V spoju palic 3, 4 in 5 je vsota sil palic enaka nič. Iz ravnovesja v vodoravni smeri dobimo $F_5 = \sqrt{2}F$ in nato še v navpični $F_4 = -F$. Zaradi simetrije so sile palic na levi in desni enake, velja $F_1 = F_5$ in $F_2 = F_4$.

5.2 Dodatne naloge

1. Za paličje sestavljeno iz enakostraničnih trikotnikov na sliki izračunaj sile palic.

   Rešitev:

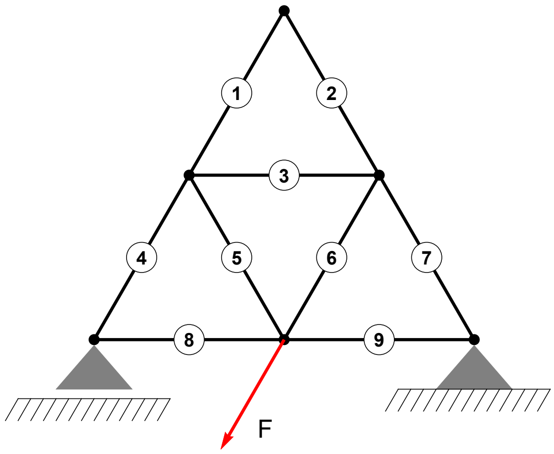
   $F_1 = -F/\sqrt{3}$, $F_2 = -F/\sqrt{3}$,
   $F_3 = 0$, $F_4 = -F/\sqrt{3}$,
   $F_5 = 0$, $F_6 = 0$,
   $F_7 = -F/\sqrt{3}$, $F_8 = F/2\sqrt{3}$,
   $F_9 = F/2\sqrt{3}$, $A = F/2$,
   $B_1 = 0$, $B_2 = F/2$.



2. Za paličje sestavljeno iz enakostraničnih trikotnikov na sliki izračunaj sile palic.

   Rešitev:

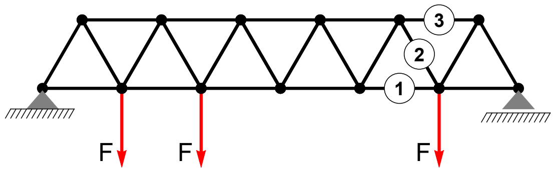
   $F_1 = 0$, $F_2 = 0$,
   $F_3 = -F/2$, $F_4 = -F/2$,
   $F_5 = F/2$, $F_6 = F/2$,
   $F_7 = -F/2$, $F_8 = F/4$,
   $F_9 = 3F/4$, $A = \sqrt{3}F/4$,
   $B_1 = F/2$, $B_2 = \sqrt{3}F/4$.



3. Za paličje sestavljeno iz enakostraničnih trikotnikov izračunaj sile označenih palic.

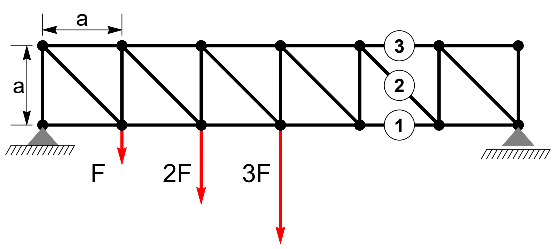
   Rešitev:

   $F_1 = \sqrt{3}F$, $F_2 = -2F/3\sqrt{3}$,
   $F_3 = -8F/3\sqrt{3}$.



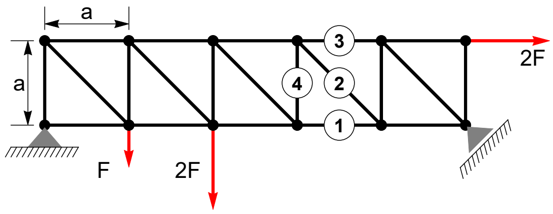
4. Za podano paličje na sliki izračunaj sile označenih palic.

   Rešitev:
   $F_1 = 14/3F$, $F_2 = -7\sqrt{2}/3F$,
   $F_3 = -7/3F$.



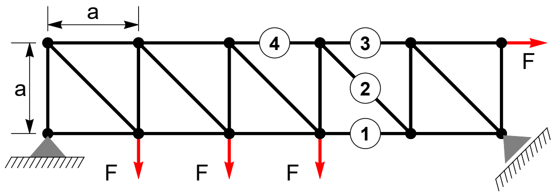
5. Za podano paličje na sliki izračunaj sile označenih palic. Desna podpora je pod kotom $\pi/4$.

   Rešitev:
   $F_1 = 7F/5$, $F_2 = -7\sqrt{2}F/5$,
   $F_3 = 3F/5$, $F_4 = -4F/5$.



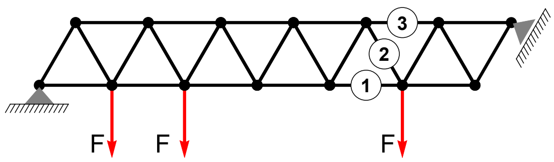
6. Za podano paličje na sliki izračunaj sile označenih palic. Desna podpora je pod kotom $\pi/4$.

   Rešitev:
   $F_1 = 7F/5$, $F_2 = -7\sqrt{2}F/5$,
   $F_3 = -2F/5$, $F_4 = -9F/5$.



7. Za podano paličje na sliki izračunaj sile označenih palic.

   Rešitev:
   $F_1 = \sqrt{3}F$, $F_2 = 0$, $F_3 = -2\sqrt{3}F$.



Poglavje 6

Nosilci

6.1 Točkovno obremenjeni nosilci

6.1.1 Rešene naloge

1. Enostavno podprti nosilec dolžine l je vertikalno točkovno obremenjen v točkah a_i, $i = 1, \ldots, n$ s silami $\vec{F}_i$.

   (a) Določi potek prečne sile.

   (b) Določi potek upogibnega momenta.

   (c) Skiciraj poteka za primer $n = 3$, $l = 4\,\mathrm{m}$, $a_1 = 1\,\mathrm{m}$, $a_2 = 2\,\mathrm{m}$, $a_3 = 3\,\mathrm{m}$, $\vec{F}_i = F_i\vec{k}$, $F_1 = 1\,\mathrm{kN}$, $F_2 = 1/2\,\mathrm{kN}$, $F_3 = 1\,\mathrm{kN}$.

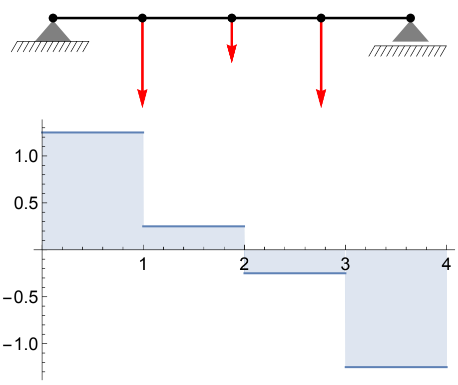
Rešitev: Nalogo rešimo v treh korakih. Prvo določimo sile podpor, nato potek prečne sile in na koncu še potek upogibnega momenta.

(a) Podporo v levem krajišču označimo z A, v desnem z B. Določimo jih iz enačbe ravnovesja navorov. Velja $\sum_{i=1}^{n} a_i F_i = lB$ in $\sum_{i=1}^{n}(l - a_i)F_i = lA$. Tako dobimo:

$$A = \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{n}(l - a_i)F_i,$$

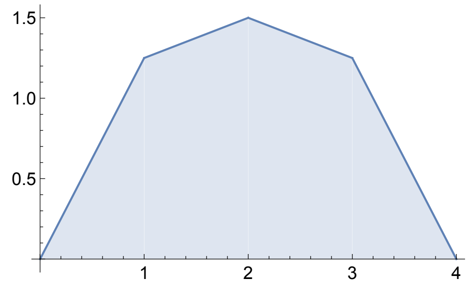
$$B = \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{n} a_i F_i.$$

V konkretnem primeru je $A = B = 5/4\,\mathrm{kN}$.



Brezdimenzijski potek prečne sile.

(b) Za enostavno podprti nosilec vemo, da je prečna sila Q v levem krajišču enaka sili podpore A, v desnem pa $-B$. Nadalje je prečna sila odsekoma konstantna s skoki v točkah obremenitve, ki so enaki obremenitvam.
Upogibni moment M je pri enostavno podprtem nosilcu v krajiščih enak nič, med točkami obremenitve pa poteka linearno. Iz enačbe $\frac{dM}{dt} = Q$ sledi, da je strmina enaka vrednosti prečne sile.



Brezdimenzijski potek upogibnega momenta.

V konkretnem primeru je maksimalen upogibni moment pri $x = 2\,\mathrm{m}$ z vrednostjo

$$M_{max} = Q_1 a_1 + Q_2(a_2 - a_1) = 3/2\,\mathrm{kNm}.$$

2. Previsni nosilec dolžine l je podprt na levem krajišču in v oddaljenosti d od levega krajišča. Nosilec je točkovno obremenjen v točkah a_i, $i = 1, \ldots, n$ s silami $\vec{F}_i$.

   (a) Določi potek prečne sile.

   (b) Določi potek upogibnega momenta.

   (c) Skiciraj poteka za primer $n = 3$, $l = 6\,\mathrm{m}$, $d = 4\,\mathrm{m}$, $a_1 = 1\,\mathrm{m}$, $a_2 = 2\,\mathrm{m}$, $a_3 = 6\,\mathrm{m}$, $\vec{F}_i = F_i\vec{k}$, $F_1 = 1\,\mathrm{kN}$, $F_2 = 1/2\,\mathrm{kN}$, $F_3 = 1\,\mathrm{kN}$.

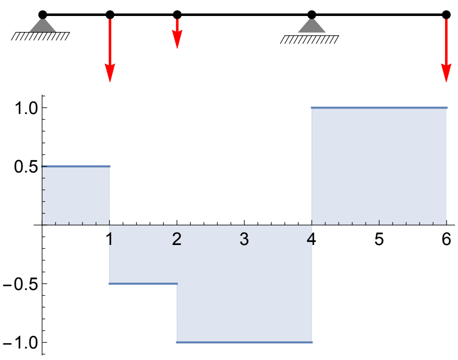
Rešitev: Nalogo rešimo v treh korakih. Prvo določimo sile podpor, nato potek prečne sile in na koncu še potek upogibnega momenta.

(a) Podporo v levem krajišču označimo z A, v desnem z B. Določimo jih iz enačbe ravnovesja navorov. Velja $\sum_{i=1}^{n} a_i F_i = dB$ in $\sum_{i=1}^{n}(d - a_i)F_i = dA$. Tako dobimo:

$$A = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{n}(d - a_i)F_i,$$

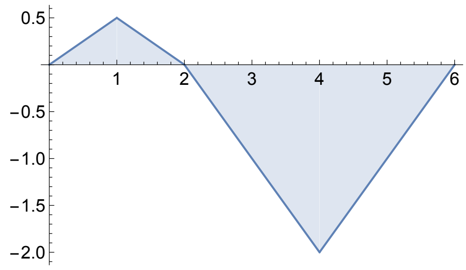
$$B = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{n} a_i F_i.$$

V konkretnem primeru je $A = 1/2\,\mathrm{kN}$, $B = 2\,\mathrm{kN}$.



Brezdimenzijski potek prečne sile.

(b) Za previsni nosilec vemo, da je prečna sila Q v levem krajišču enaka sili podpore A, nato pa ima v vsaki točki obremenitve skok, ki je enak obremenitvi. Tu moramo kot točkovno obremenitev upoštevati tudi desno podporo, kjer ima prečna sila skok podpore.
Upogibni moment M je na krajiščih enak nič, med točkami obremenitve pa poteka linearno. Iz enačbe $\frac{dM}{dt} = Q$ sledi, da je strmina enaka vrednosti prečne sile.



Brezdimenzijski potek upogibnega momenta.

V konkretnem primeru je ekstremalni upogibni moment v desni podpori $x = 4\,\mathrm{m}$ z vrednostjo

$$M_{max} = Q_1 a_1 + Q_2(a_2 - a_1) + Q_3(a_3 - a_2) = -4\,\mathrm{kNm}.$$

3. Konzolni nosilec dolžine l je konzolno vpet v levem krajišču in je točkovno obremenjen v točkah a_i, $i = 1, \ldots, n$ s silami $\vec{F}_i$.

   (a) Določi potek prečne sile.

   (b) Določi potek upogibnega momenta.

   (c) Skiciraj poteka za primer $n = 2$, $l = 4\,\mathrm{m}$, $a_1 = 1\,\mathrm{m}$, $a_2 = 3\,\mathrm{m}$, $\vec{F}_i = F_i\vec{k}$, $F_1 = 1\,\mathrm{kN}$, $F_2 = 1/2\,\mathrm{kN}$.

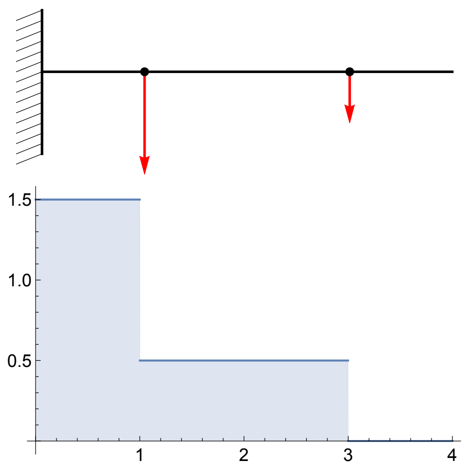
Rešitev: Nalogo rešimo v treh korakih. Prvo določimo sile in navor v konzolnem vpetju, nato potek prečne sile in na koncu še potek upogibnega momenta.

(a) Levo podporo označimo z A. Reakcijo v podpori določimo iz ravnovesja sil in navorov. Velja

$$A = \sum_{i=1}^{n} F_i, \quad \text{in}$$

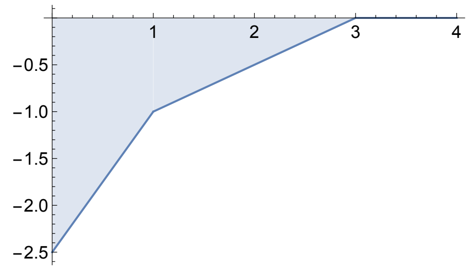
$$M_A = \sum_{i=1}^{n} a_i F_i.$$

V konkretnem primeru je je $A = 3/2\,\mathrm{kN}$ in $M_A = -5/9\,\mathrm{kNm}$.
Prečna sila Q je v levem krajišču enaka sili podpore A, nato pa ima v vsaki točki obremenitve skok, ki je enak obremenitvi.



Brezdimenzijski potek prečne sile.

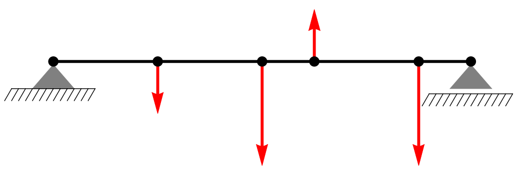
(b) Upogibni moment M je v levem krajišču enak $-M_A$, nato pa med točkami obremenitve pa poteka linearno. Iz enačbe $\frac{dM}{dt} = Q$ sledi, da je strmina enaka vrednosti prečne sile. Upogibni moment je ekstremalen v konzolnem vpetju, $M_{min} = -5/9\,\mathrm{kNm}$.



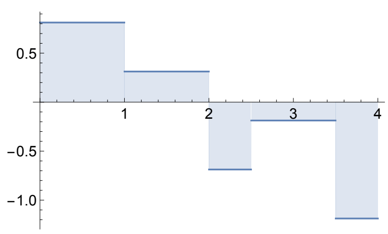
Brezdimenzijski potek upogibnega momenta.

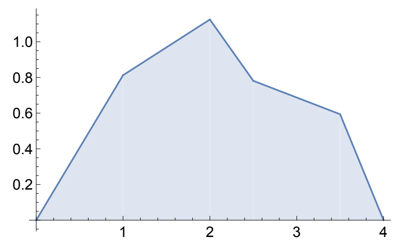
6.1.2 Dodatne naloge

1. Za enostavno podprti nosilec dolžine $l = 4\,\mathrm{m}$, ki je točkovno obremenjen v točkah $a_1 = 1\,\mathrm{m}$, $a_2 = 2\,\mathrm{m}$, $a_3 = 5/2\,\mathrm{m}$, $a_4 = 7/2\,\mathrm{m}$ s silami v vertikalni smeri $F_1 = 1/2\,\mathrm{kN}$, $F_2 = 1\,\mathrm{kN}$, $F_3 = -1/2\,\mathrm{kN}$, $F_4 = 1\,\mathrm{kN}$ določi potek prečne sile in upogibnega momenta.

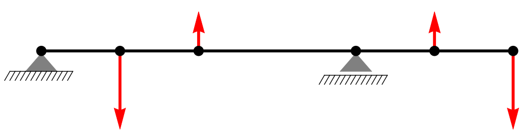


Rešitev: $A = 13/16\,\mathrm{kN}$, $B = 19/16\,\mathrm{kN}$, $M_{max} = 9/8\,\mathrm{kNm}$.

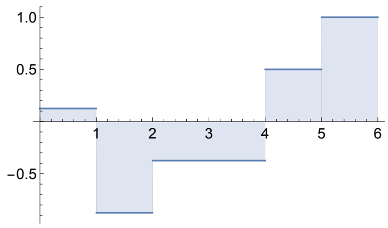


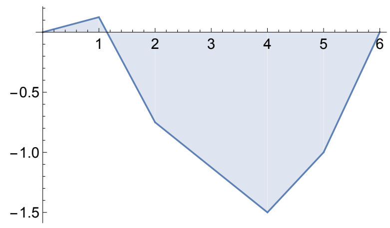


2. Previsni nosilec dolžine $l = 6\,\mathrm{m}$ je podprt na levem krajišču in v oddaljenosti $d = 4\,\mathrm{m}$ od levega krajišča v točkah $a_1 = 1\,\mathrm{m}$, $a_2 = 2\,\mathrm{m}$, $a_3 = 5\,\mathrm{m}$, $a_4 = 6\,\mathrm{m}$ s silami v vertikalni smeri $F_1 = 1\,\mathrm{kN}$, $F_2 = -1/2\,\mathrm{kN}$, $F_3 = -1/2\,\mathrm{kN}$, $F_4 = 1\,\mathrm{kN}$. Določi potek prečne sile in upogibnega momenta.

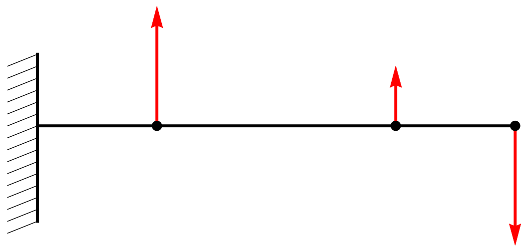


Rešitev: $A = 1/8\,\mathrm{kN}$, $B = 7/8\,\mathrm{kN}$, $M_{min} = -3/2\,\mathrm{kNm}$.

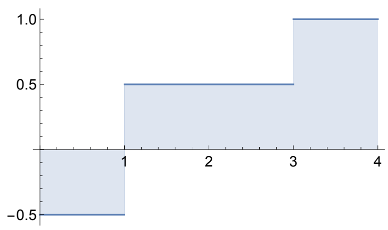


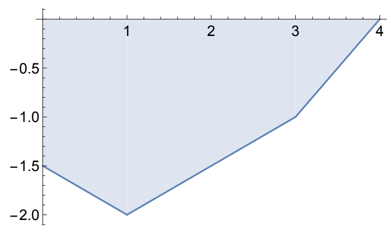


3. Konzolni nosilec dolžine $l = 4\,\mathrm{m}$ je konzolno vpet v levem krajišču in je točkovno obremenjen v točkah $a_1 = 1\,\mathrm{m}$, $a_2 = 3\,\mathrm{m}$ in $a_3 = 4\,\mathrm{m}$ s silami $F_1 = -1\,\mathrm{kN}$, $F_2 = -1/2\,\mathrm{kN}$, $F_3 = 1\,\mathrm{kN}$. Določi potek prečne sile in upogibnega momenta.



Rešitev: $A = -1/2\,\mathrm{kN}$, $M_A = 3/2\,\mathrm{kNm}$, $M_{min} = -2\,\mathrm{kNm}$.





6.2 Linijsko obremenjeni nosilci

6.2.1 Rešene naloge

1. Enostavno podprti nosilec dolžine l je linijsko vertikalno obremenjen s silo z gostoto $q(x) = q_0 + \alpha(l - x)$.
   (a) Določi sili podpor.
   (b) Določi potek prečne sile.
   (c) Določi potek upogibnega momenta.
   (d) Skiciraj poteka za primer $l = 4\,\mathrm{m}$, $q_0 = 1/2\,\mathrm{N/m}$, $\alpha = 1/4\,\mathrm{N/m^2}$.

   Rešitev:

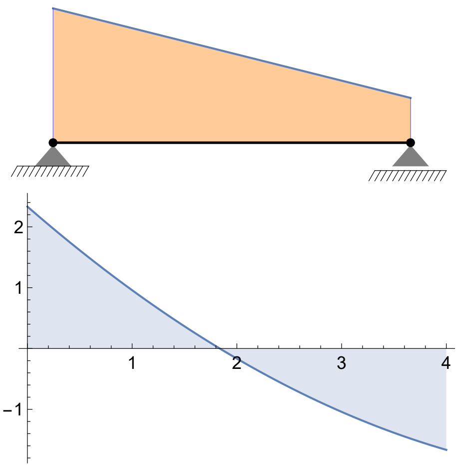
(a) Linijski obremenitvi je ekvipolentna točkovna obremenitev z rezultanto

$$F = \int_0^l q(x)\,dx = q_0 l + \frac{1}{2}\alpha l^2 = 4\,\mathrm{kN}.$$

Vrednost sile F je enaka vsoti površini pravokotnika $l \times q_0$ in trikotnika z osnovno stranico dolžine l in višine αl. Sila ima prijemališče v masnem središču sestavljenega lika

$$x_* = \frac{q_0 l + \alpha l^2/3}{2(q_0 + \alpha l)} = \frac{5}{3}\mathrm{m}.$$

Iz momentne enačbe s polom v levi podpori potem sledi $-x_* F + lB = 0$ in tako $B = \frac{x_*}{l}F = 5/3\,\mathrm{kN}$. Sila desne podpore je potem $A = F - B = 7/3\,\mathrm{kN}$.



Brezdimenzijski potek prečne sile.

(b) Prečno silo določimo iz zveze $dQ/dx = -q(x) = -q_0 - \alpha(l - x)$. Rešitev enačbe je

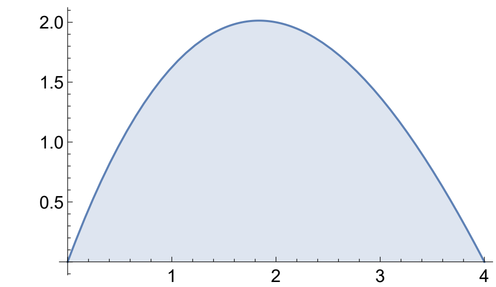
$$Q(x) = -q_0 x + \frac{1}{2}\alpha(l - x)^2 + C_1.$$

Konstanto C_1 lahko določimo iz vrednosti prečne sile na levi podpori $x = 0$. Vemo, da je $Q(x = 0) = A$, kjer je A sila leve podpore. Potem je $C_1 = A - \frac{1}{2}\alpha l^2 = 1/3\,\mathrm{kN}$. Videli pa bomo, da lahko konstanto C_1 lažje določimo iz robnih vrednosti upogibnega momenta.

(c) Upogibni moment M dobimo iz zveze $M = dQ/dx$. Potem je

$$M = -\frac{1}{2}q_0 x^2 - \frac{1}{6}\alpha(l-x)^3 + C_1 x + C_2.$$

Nosilec je enostavno podprt, zato je upogibni moment na krajiščih enak nič, $M(0) = M(l) = 0$. Potem $0 = M(0) = -l^3/6 + C_2$ in $C_2 = \alpha l^3/6$. Iz $0 = M(l)$ potem dobimo $C_1 = q_0 l/2 - \alpha l^2/6$. Tako smo dobili



Brezdimenzijski potek upogibnega momenta.

$$\begin{aligned} M &= -\frac{1}{2}q_0 x^2 - \frac{1}{6}\alpha(l - x)^3 + (q_0 l/2 - \alpha l^2/6)x + \alpha l^3/6 \\ &= \frac{1}{6}x(l - x)\,(2\alpha l + 3q_0 - \alpha x) \\ &= \left(\frac{x^3}{24} - \frac{3x^2}{4} + \frac{7x}{3}\right)\mathrm{kNm}. \end{aligned}$$

Pri zvezi linijski obremenitvi je upogib ekstremalen, ko je $0 = dM/dx = Q$. Iskani x je rešitev kvadratne enačbe

$$\frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{3} = 0.$$

Rešitev je $x = \frac{2}{3}\left(9-\sqrt{39}\right)$ m. Maksimalna vrednost momenta je potem $M_{max} = 2.04$ kNm.

2. Enostavno podprti nosilec dolžine $l = 4$ m. ki je obremenjen s konstantno linijsko obremenitev z gostoto $q_0 = 1/2$ N/m je točkovno obremenjen v točki $a_1 = 1$ m z vertikalno silo navzdol $F_1 = 1$ kN.

   (a) Določi potek prečne sile in upogibnega momenta.

   (b) Izračunaj sile podpor.

Rešitev: Nalogo bomo reševali v brezdimenzijski obliki. Končne vrednosti bomo pomnožili z ustreznimi dimenzijami.

(a) Nosilec razdelimo v dve polji $0 \leq x < 1$ in $1 < x \leq 4$. Prečno silo in upogibni moment na prvem polju označimo z Q_1 in M_1, na drugem pa z Q_2 in M_2. Na obeh poljih je linijska obremenitev zvezna, zato velja zveza $dQ/dx = -q$ na vsakem polju posebej. Potem

$$Q_1 = -\frac{1}{2}x + C_1, \qquad Q_2 = -\frac{1}{2}x + C_2$$

in

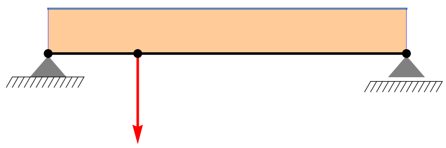
$$M_1 = -\frac{1}{4}x^2 + C_1 x + C_3,$$

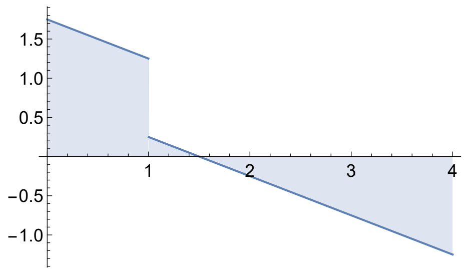
$$M_2 = -\frac{1}{4}x^2 + C_2 x + C_4.$$

Konstante C_1, C_2, C_3 in C_4 določimo iz pogojev, da ima prečna sila v točki obremenitve skok enak obremenitvi in pogojev, da sta krajišči tečaja, kjer je upogibni moment enak nič. Upoštevamo še dejstvo, da je upogibni moment zvezen v točki obremenitve. Tako dobimo

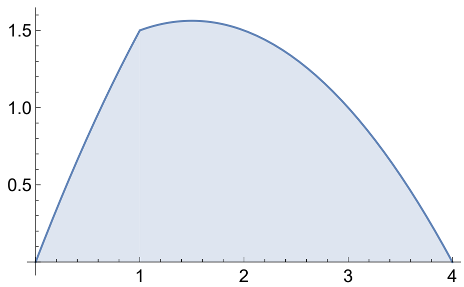
$$Q_1(1) - 1 = Q_2(1), \quad M_1(0) = 0,$$

$$M_2(4) = 0, \quad M_1(1) = M_2(1).$$





Brezdimenzijski potek prečne sile.



Brezdimenzijski potek upogibnega momenta.

Iz enačb sledi

$$C_1 - 1 = C_2, \quad C_3 = 0, \quad 0 = -4 + 4C_2 + C_4, \quad -\frac{1}{4} + C_1 + C_3 = -4 + 4C_2 + C_4.$$

Rešitev je

$$C_1 = \frac{7}{4}, \quad C_2 = \frac{3}{4}, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = 1.$$

in tako

$$Q_1 = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{4}, \qquad Q_2 = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}, \quad M_1 = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{7}{4}x, \qquad Q_2 = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + 1.$$

(b) Določimo še sile podpor. Ker je nosilec enostavno podprt, je sila sila leve podpore enaka enaka prečni sili v levi podpori, sila desne podpore pa je nasprotno enaka prečni sili. Velja torej

$$A = Q_1(0) = C_1 = \frac{7}{4}\text{kN}, \qquad B = -Q_2(l) = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}\text{kN}.$$

Upogibni moment je maksimalen v temenu parabole M_2. Teme je v točki, ko je $Q_2(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4} = 0$, torej pri $x = 3/2$. Vrednost momenta v tej točki je

$$M_{max} = \frac{25}{16}\text{kNm}.$$

3. Nosilec dolžine l, ki je obremenjen s konstantno linijsko obremenitvijo q_0 je členkasto podprt v levem krajišču in v podpori, ki je v razdalji $a < l$ od leve podpore.

   (a) Določi potek prečne sile in upogibnega momenta in skiciraj njuna poteka za primer $l = 6\,\text{m}$, $a = 4\,\text{m}$, $q_0 = 1/2\,\text{N/m}$.

   (b) Določi sile podpor in ekstremalni upogibni moment.

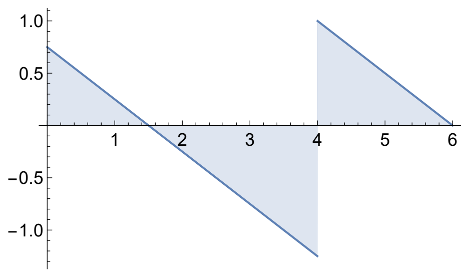
Rešitev:

(a) Nosilec je v točki $x = a$ točkovno podprt, zato ga razdelimo v dve polji, $0 \leq x < a$ in $a < x \leq l$. Za obe polji velja $dQ/dx = -q_0$ in $dM/dx = Q$. Potem je za levem polju

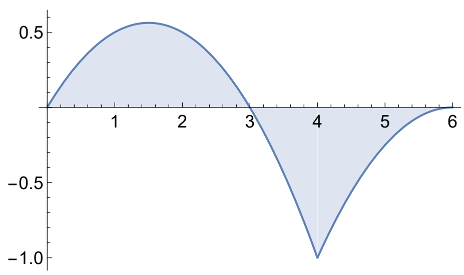
$$Q_1 = -q_0 x + C_1,$$
$$M_1 = -\frac{1}{2}q_0 x^2 + C_1 x + C_3.$$

Na desnem polju pa je

$$Q_2 = -q_0 x + C_2,$$
$$M_2 = -\frac{1}{2}q_0 x^2 + C_2 x + C_4.$$



Brezdimenzijski potek prečne sile.



Brezdimenzijski potek upogibnega momenta.

Konstante C_1, C_2, C_3 in C_4 določimo iz pogojev, da sta upogibna momenta na krajiščih enaka nič, da je prečna sila na desnem krajišču enaka nič in da je upogibni moment zvezen v desni podpori. Tako dobimo enačbe $0 = C_3$,

$$0 = -\frac{1}{2}q_0 l^2 + C_2 l + C_4, \quad 0 = -q_0 l + C_2,$$

$$-\frac{1}{2}q_0 a^2 + C_1 a + C_3 = -\frac{1}{2}q_0 l^2 + C_2 l + C_4.$$

Rešitev sistema je

$$C_1 = \frac{l(2a-l)}{4a}, \quad C_2 = \frac{l}{2}, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = -\frac{l^2}{4}.$$

V brezdimenzijskem zapisu je potem za dane podatke

$$Q_1 = \frac{3}{4} - \frac{x}{2}, \qquad Q_2 = 3 - \frac{x}{2}, \quad M_1 = \frac{3x}{4} - \frac{x^2}{4}, \quad M_2 = -\frac{x^2}{4} + 3x - 9.$$

(b) V levem krajišču je sila podpore enaka $A = Q_1(0) = 3/4\,\mathrm{kN}$, v desnem krajišču pa je $Q_1(a) + B = Q_2(a)$. Potem $B = Q_2(a) - Q_1(a) = 9/4\,\mathrm{kN}$. Upogibni moment je minimalen v desni podpori $M_{min} = -1\,\mathrm{kNm}$, maksimalen pa pri $x = 3/2\,\mathrm{m}$ z vrednostjo $M_{max} = 9/16\,\mathrm{kNm}$.

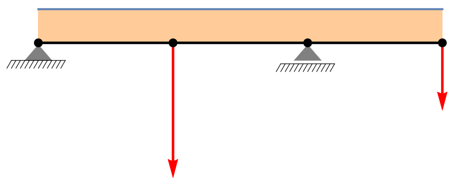
4. Nosilec dolžine l, ki je obremenjen s konstantno linijsko obremenitvijo q_0 je členkasto podprt v levem krajišču in v podpori, ki je v razdalji $a < l$ od leve podpore. Poleg linijske obremenitve je nosilec obremenjen še točkovno v $a_1 \in (0, a)$ in na koncu $a_2 = l$ z vertikalnima silama F_1 in F_2.

   (a) Določi potek prečne sile in upogibnega momenta in skiciraj njuna poteka za primer $l = 6\,\mathrm{m}$, $a = 4\,\mathrm{m}$, $q_0 = 1/2\,\mathrm{N/m}$, $a_1 = 2\,\mathrm{m}$, $F_1 = 1\,\mathrm{kN}$ in $F_2 = 1/2\,\mathrm{kN}$.

   (b) Določi sile podpor in ekstremalni upogibni moment.

Rešitev:

(a) Nalogo bomo rešili v brezdimenzijskem zapisu. Nosilec razdelimo v tri polja, $0 < x < 2$, in $2 < x < 4$ in $4 < x < 6$. Za vsa polja velja $dQ/dx = -q_0$ in $dM/dx = Q$. Potem je



$$Q_i = -q_0 x + C_i,$$

in

$$M_i = -\frac{1}{2} q_0 x^2 + C_i x + C_{3+i}$$

za $i = 1, 2, 3$. Konstante C_i določimo iz pogojev, da sta upogibna momenta na krajiščih enaka nič, da je moment zvezen v $x = a_1$ in točki podpori $x = a$ in da ima prečna sila v $x = a_1$ skok F_1 in vrednost F_2 na desnem krajišču. Z enačbami

$$C_4 = 0, \quad 6C_3 + C_6 - 9 = 0,$$

$$C_1 + C_4 - 1 = 2C_2 + C_5 - 1,$$

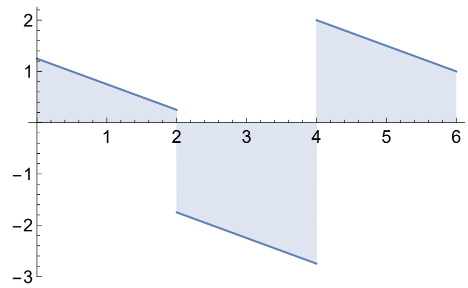
$$4C_2 + C_5 - 4 = 4C_3 + C_6 - 4,$$

$$C_1 - 3 = C_2 - 1, \quad C_3 - 3 = 1.$$

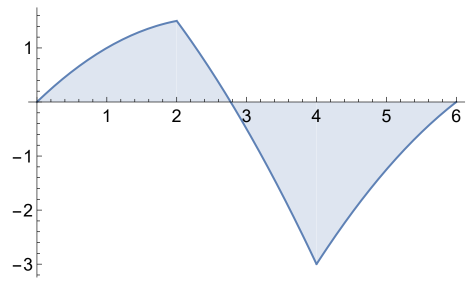
Rešitev sistema je

$$C_1 = \frac{5}{4}, \quad C_2 = -\frac{3}{4}, \quad C3 = 4,$$

$$C_4 = 0, \quad C_5 = 4, \quad C_6 = -15.$$



Brezdimenzijski potek prečne sile.



Brezdimenzijski potek upogibnega momenta.

Potem

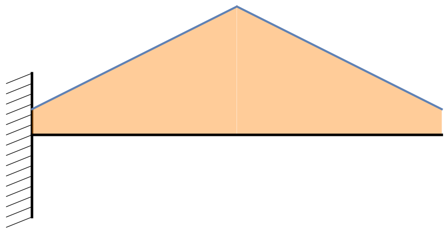
$$Q_1 = \frac{5}{4} - \frac{x}{2}, \quad Q_2 = -\frac{x}{2} - \frac{3}{4}, \quad Q_3 = 4 - \frac{x}{2}$$

in

$$M_1 = \frac{5x}{4} - \frac{x^2}{4}, \quad M_2 = -\frac{x^2}{4} - \frac{3x}{4} + 4, \quad M_3 = -\frac{x^2}{4} + 4x - 15.$$

(b) V levem krajišču je sila podpore enaka $A = Q_1(0) = 5/4\,\mathrm{kN}$, v desnem krajišču pa je $Q_1(a) + B = Q_2(a)$. Potem $B = 19/4\,\mathrm{kN}$. Upogibni moment je minimalen v desni podpori $M_{min} = -3\,\mathrm{kNm}$, maksimalen pa pri $x = 2\,\mathrm{m}$ z vrednostjo $M_{max} = 3/2\,\mathrm{kNm}$.

5. Nosilec dolžine l, ki je konzolno vpet na svojem levem krajišču, je obremenjen na odseku $0 \leq x \leq l/2$ z linijsko obremenitvijo $q(x) = q_0 + \alpha x$, na odseku $l/2 \leq x \leq l$ pa z $q(x) = q_0 - \alpha(x - l)$.



   (a) Določi potek prečne sile in upogibnega momenta in skiciraj njuna poteka za primer $l = 4\,\mathrm{m}$, $q_0 = 1/4\,\mathrm{N/m}$, $\alpha = 1/2\,\mathrm{N/m^2}$.

   (b) Določi silo in moment v konzolnem vpetju.

Rešitev:

(a) Nalogo bomo rešili v brezdimenzijskem zapisu. Nosilec razdelimo na dve polji $0 \leq x \leq 2$ in $2 \leq x \leq 4$. Za obe polji velja $dQ/dx = -q(x)$ in $dM/dx = Q$. Potem je

$$Q_1 = -\frac{1}{2}\alpha x^2 - q_0 x + C_1 = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + C_1,$$
$$Q_2 = \frac{1}{2}\alpha(x - l)^2 - q_0 x + C_2 = \frac{1}{4}(x - 4)^2 - \frac{1}{4}x + C_2.$$

in po krajšem računu

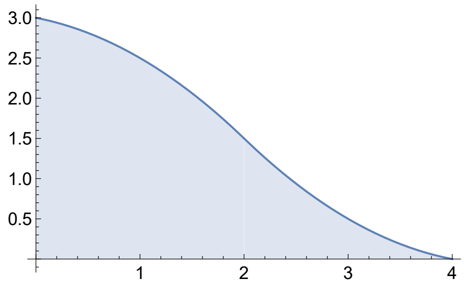
$$M_1 = C_3 + C_1 x - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{12},$$
$$M_2 = C_4 + C_2 x + 4x - \frac{9x^2}{8} + \frac{x^3}{12}.$$

Konstante C_i določimo iz pogojev, da sta prečna sila in upogibni moment zvezna v $x = l/2$ in da je desni konec prost, od koder sledi, da sta prečna sila in upogibni moment enaka nič pri $x = l$. Tako dobimo enačbe

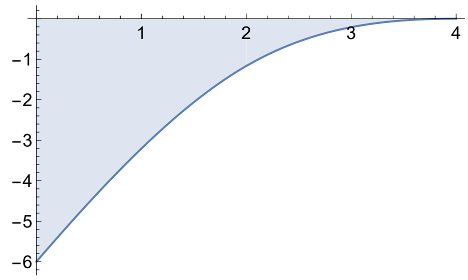
$$Q_1(2) = Q_2(2), \quad M_1(2) = M_2(2), \quad Q_2(4) = 0, \quad M_2(4) = 0$$

oziroma

$$4C_2 + C_4 + \frac{10}{3} = 0, \quad 2C_1 + C_3 - \frac{7}{6} = 2C_2 + C_4 + \frac{25}{6}, \quad C_1 - \frac{3}{2} = C_2 + \frac{1}{2}, \quad C_2 - 1 = 0$$



Brezdimenzijski potek prečne sile.



Brezdimenzijski potek upogibnega momenta.

Rešitev sistema je

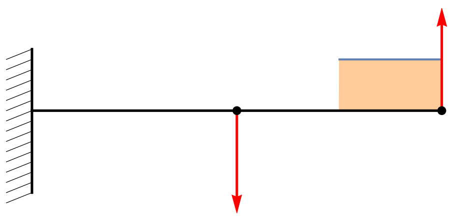
$$C_1 = 3, \quad C_2 = 1, \quad C_3 = -6, \quad C_4 = -\frac{22}{3}.$$

Tako smo dobili

$$Q_1 = -\frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} + 3, \quad Q_2 = \frac{1}{4}(4-x)^2 - \frac{x}{4} + 1$$
$$M_1 = -\frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{8} + 3x - 6, \quad M_2 = \frac{x^3}{12} - \frac{9x^2}{8} + 5x - \frac{22}{3}.$$

(b) V konzolni podpori je sila podpore enaka $A = Q_1(0) = 3\,\mathrm{kN}$, moment pa je $M_A = -M(0) = -6\,\mathrm{kNm}$. Upogibni moment je minimalen v konzolnem vpetju, maksimalen pa na desnem krajišču, kjer je enak nič.

6. Nosilec dolžine $l = 4\,\mathrm{m}$, ki je konzolno vpet na svojem levem krajišču, je linijsko obremenjen na odseku $3\,\mathrm{m} \le x \le 4\,\mathrm{m}$ s konstantno linijsko obremenitvijo $q(x) = q_0 = 1/2\,\mathrm{N/m}$. Na nosilec delujeta še točkovni obremenitvi v $a_1 = 2\,\mathrm{m}$ in $a_2 = 4\,\mathrm{m}$ s silama $F_1 = 1\,\mathrm{kN}$ in $F_2 = -1\,\mathrm{kN}$.



(a) Določi potek prečne sile in upogibnega momenta in skiciraj njuna poteka.

(b) Določi silo in moment v konzolnem vpetju.

Rešitev:

(a) Nalogo bomo rešili v brezdimenzijskem zapisu. Nosilec razdelimo na tri polja $0 < x < 2$, $2 < x < 3$ in $3 < x < 4$. Na poljih velja $dQ/dx = -q(x)$ in $dM/dx = Q$. Potem je

$$Q_1 = C_1, \qquad Q_2 = C_2, \qquad Q_3 = -\frac{1}{2}x + C_4,$$
$$M_1 = C_1 x + C_4, \qquad M_2 = C_2 x + C_5, \qquad M_3 = -\frac{1}{4}x^2 + C_4 x + C_6.$$

Konstante C_i določimo iz pogojev, da je upogibni moment zvezen v $x = 2$ in $x = 3$, da ima prečna sila v $x = 2$ skok enak točkovni obremenitvi in da je zvezna v $x = 3$. Na koncu nosilca je upogibni moment enak nič, prečna sila pa ima ponovno skok. Tako dobimo enačbe

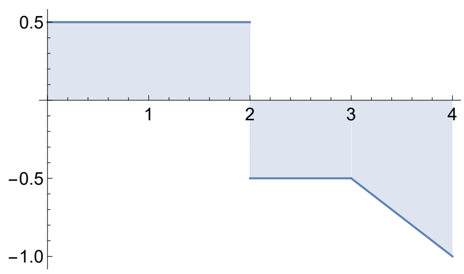
$$M_1(2) = M_2(2), \qquad M_2(3) = M_3(3), \qquad Q_2(2) = Q_1 - 1,$$
$$Q_2(3) = Q_3(3), \qquad M_3(4) = 0, \qquad -Q_3(4) = 1$$

oziroma

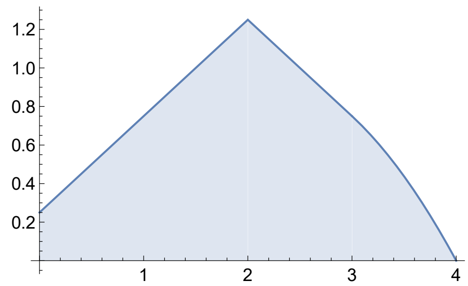
$$2C_1 + C_4 = 2C_2 + C_5, \qquad 3C_2 + C_5 = 3C_3 + C_6 - \frac{9}{4}, \qquad C_2 = C_1 - 1,$$
$$C_2 = C_3 - \frac{3}{2}, \qquad 4C_3 + C_6 - 4 = 0, \qquad -C_3 + 2 = 1.$$

Rešitev sistema je

$$C_1 = \frac{1}{2}, \quad C_2 = -\frac{1}{2}, \quad C_3 = 1, \quad C_4 = \frac{1}{4}, \quad C_5 = \frac{9}{4}, \quad C_6 = 0.$$



Brezdimenzijski potek prečne sile.



Brezdimenzijski potek upogibnega momenta.

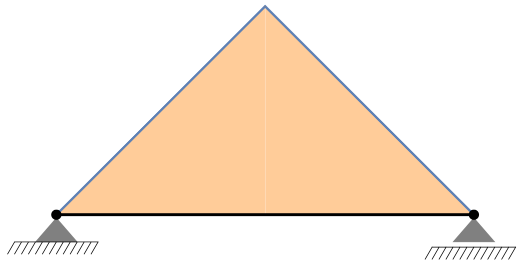
Tako smo dobili

$$Q_1 = \frac{1}{2}, \quad Q_2 = -\frac{1}{2}, \quad Q_3 = 1 - \frac{x}{2}$$
$$M_1 = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}, \quad M_2 = \frac{9}{4} - \frac{x}{2}, \quad M_3 = x - \frac{x^2}{4}.$$

(b) V konzolni podpori je sila podpore enaka $A = Q_1(0) = 1/2\,\mathrm{kN}$, moment pa je $M_A = -M(0) = -1/4\,\mathrm{kNm}$. Upogibni moment je minimalen na prostem koncu, kjer je enak nič, maksimalen pa v točkovni obremenitvi z vrednostjo $M_{max} = 5/4\,\mathrm{kNm}$.

6.2.2 Dodatne naloge

1. Enostavno podprti nosilec dolžine $l = 4\,\mathrm{m}$ je linijsko obrmenjen z odsekoma linearno funkcijo $q(x)$ definirano z $q(x) = x\mathrm{N/m}^2$ za $x \in [0, l/2]$ in $q(x) = 4\mathrm{N/m} - x\mathrm{N/m}^2$ za $x \in [l/2, l]$.

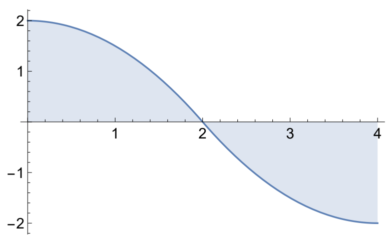


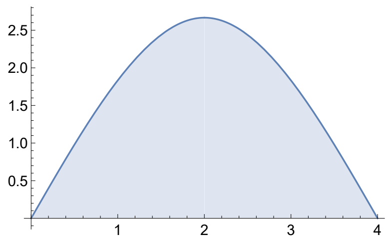
   (a) Skiciraj obremenitev.

   (b) Določi potek prečne sile in upogibnega momenta.

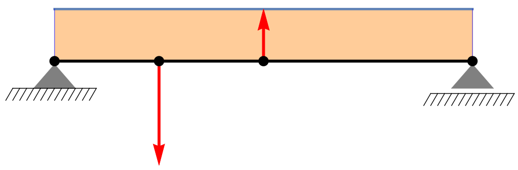
   (c) Izračunaj sile podpor.

   Rešitev: $A = 2\,\mathrm{kN}$, $B = 2\,\mathrm{kN}$, $M_{max} = 8/3\,\mathrm{kNm}$.





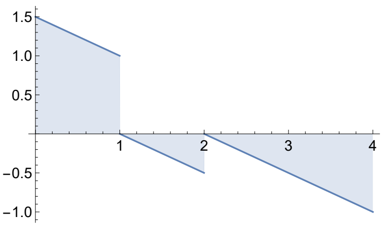
2. Enostavno podprti nosilec dolžine $l = 4\,\mathrm{m}$, ki je obremenjen s konstantno linijsko obremenitev z gostoto $q_0 = 1/2\,\mathrm{N/m}$ je točkovno obremenjen v točkah $a_1 = 1\,\mathrm{m}$ in $a_2 = 2\,\mathrm{m}$ z vertikalno silo navzdol $F_1 = 1\,\mathrm{kN}$ in $F_2 = -1/2\,\mathrm{kN}$.

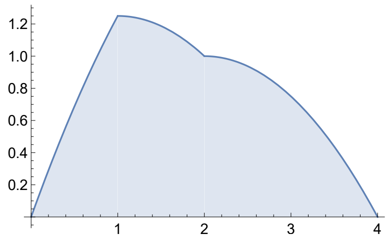


   (a) Določi potek prečne sile in upogibnega momenta.

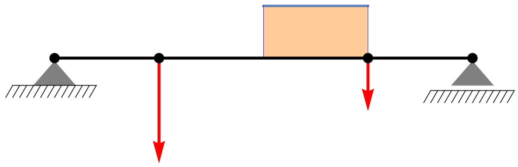
   (b) Izračunaj sile podpor.

   Rešitev: $A = 3/2\,\mathrm{kN}$, $B = 1\,\mathrm{kN}$, $M_{max} = 5/4\,\mathrm{kNm}$.





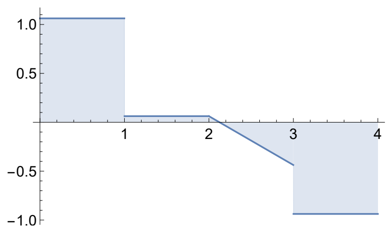
3. Enostavno podprti nosilec dolžine $l = 4\,\mathrm{m}$, ki je obremenjen s konstantno linijsko obremenitev z gostoto $q_0 = 1/2\,\mathrm{N/m}$ od $x = 2\,\mathrm{m}$ do $x = 3\,\mathrm{m}$ je točkovno obremenjen v točkah $a_1 = 1\,\mathrm{m}$ in $a_2 = 3\,\mathrm{m}$ z vertikalno silo navzdol $F_1 = 1\,\mathrm{kN}$ in $F_2 = 1/2\,\mathrm{kN}$.

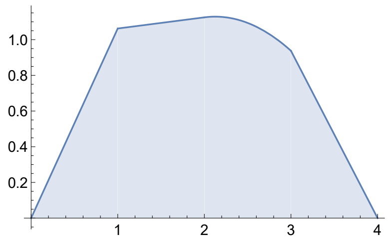


   (a) Določi potek prečne sile in upogibnega momenta.

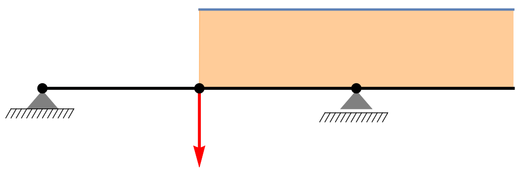
   (b) Izračunaj sile podpor.

   Rešitev: $A = 17/16\,\mathrm{kN}$, $B = 15/16\,\mathrm{kN}$, $M_{max} = 9/8\,\mathrm{kNm}$.





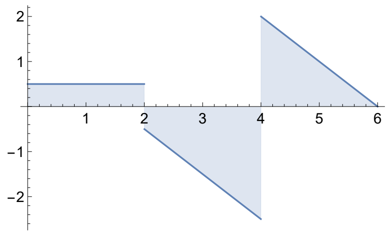
4. Enostavno podprti nosilec dolžine $l = 6\,\mathrm{m}$ s prevesno podporo pri $x = 4\,\mathrm{m}$ je obremenjen s konstantno linijsko obremenitev z gostoto $q_0 = 1\,\mathrm{N/m}$ v razponu od $x = a_1$ in $x = l$. Poleg te linijske obremenitve je nosilec obremenjen še točkovno v $a_1 = 2\,\mathrm{m}$ s silo $F_1 = 1\,\mathrm{kN}$.

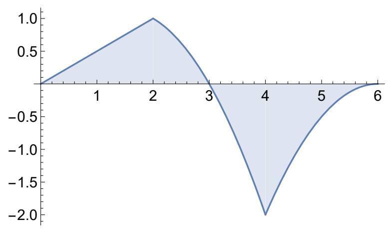


   (a) Določi potek prečne sile in upogibnega momenta.

   (b) Izračunaj sile podpor.

   Rešitev: $A = 1/2\,\mathrm{kN}$, $B = 9/2\,\mathrm{kN}$, $M_{max} = 1\,\mathrm{kNm}$ pri $x = 2\,\mathrm{m}$ in $M_{min} = -2\,\mathrm{kNm}$ pri $x = 4\,\mathrm{m}$.

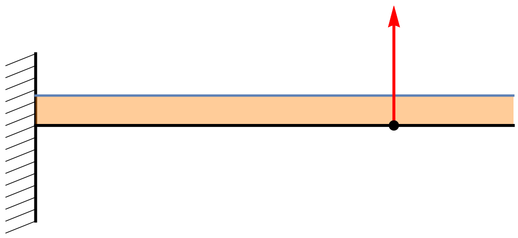




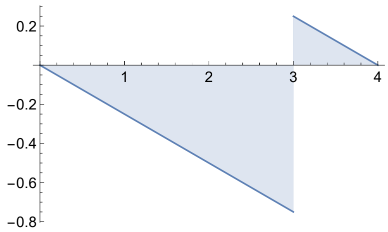
5. Konzolno vpeti nosilec dolžine $l = 4\,\mathrm{m}$ je obremenjen s konstantno linijsko obremenitev z gostoto $q_0 = 1/4\,\mathrm{N/m}$ in točkovno obremenjen v $a_1 = 3\,\mathrm{m}$ s silo $F_1 = 1\,\mathrm{kN}$ navpično navzgor.

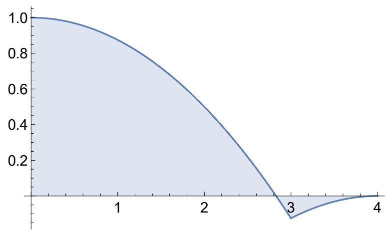
   (a) Določi potek prečne sile in upogibnega momenta.

   (b) Izračunaj reakcijo v konzolni podpori in določi maksimalen ter minimalen upogibni moment.



Rešitev: $A = 0$, $M_A = -1\,\mathrm{kNm}$, $M_{max} = 1\,\mathrm{kNm}$ pri $x = 0$ in $M_{min} = -1/8\,\mathrm{kNm}$ pri $x = 3\,\mathrm{m}$.





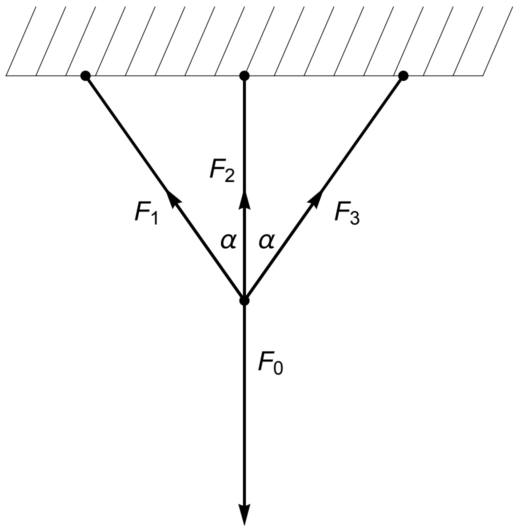
Poglavje 7

Enoosna deformacija in napetost

7.1 Statično nedoločene naloge

7.1.1 Rešene naloge

1. Paličje na sliki je sestavljeno iz treh elastičnih palic. Vse tri imajo enak presek A in Youngov modul E. Kot α je $\pi/4$, srednja palica pa ima dolžino 1 m. Palice so pritrjene členkasto na stropu in so v spodnjem členku obremenjene s silo $F_0 = 15\,\mathrm{kN}$. Določi sile v palicah in izračunaj pomik spodnjega členka.



Rešitev: Sistem treh neznanih sil ima skupno prijemališče, zato je naloga statično nedoločena. Za določitev sil palic moramo upoštevati osne deformacije palic. Zaradi simetrije je $F_1 = F_3$. Ravnovesna enačba sil v navpični smeri je

$$2F_1 \cos\alpha + F_2 = F_0.$$

Po Hookovem zakonu je

$$F_1 = AE\frac{\Delta l_1}{l_1}, \qquad F_2 = AE\frac{\Delta l_2}{l_2},$$

kjer sta l_1 in l_2 dolžini leve in sredinske palice, Δl_1 in Δl_2 pa njuna osna pomika. Pri obtežitvi se paličje raztegne v navpični smeri. Po deformaciji velja

$$(l_1 + \Delta l_1)^2 = d^2 + (l_2 + \Delta l_2)^2.$$

Tu je d razdalja med pritrdiščema palic na stropu. Ker je $l_1^2 = d^2 + l_2^2$, sledi da je

$$2l_1\Delta l_1 + (\Delta l_1)^2 = 2l_2\Delta l_2 + (\Delta l_2)^2.$$

Pri predpostavki majhnih deformacij pri kateri velja Hookov zakon smemo zanemariti člena $(\Delta l_1)^2$ in $(\Delta l_2)^2$. Tako dobimo

$$l_1 \Delta l_1 = l_2 \Delta l_2.$$

oziroma $\Delta l_1 = \Delta l_2 l_2 / l_1$. Ravnovesna enačbe se potem glasi

$$F_0 = \frac{2AE\Delta l_2 l_2 \cos\alpha}{l_1^2} + \frac{AE\Delta l_2}{l_2} = \frac{2AE\Delta l_2 l_2^2}{l_1^3} + \frac{AE\Delta l_2}{l_2}.$$

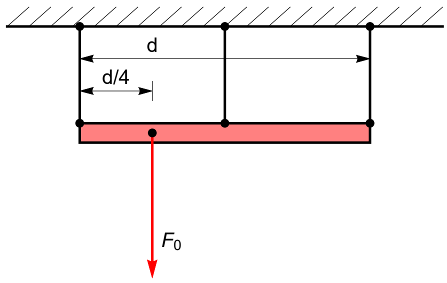
V zadnji enakosti smo upoštevali, da je $\cos\alpha = l_2/l_1$. Rešitev enačbe je

$$\Delta l_2 = \frac{F_0 l_1^3 l_2}{AE\,(l_1^3 + 2l_2^3)}.$$

Sili sta potem

$$F_1 = \frac{F_0 l_1 l_2^2}{l_1^3 + 2l_2^3} = \frac{F_0 \cos^2(\alpha)}{2\cos^3(\alpha) + 1} = 15(1 - 1/\sqrt{2})\mathrm{kN},$$
$$F_2 = \frac{F_0 l_1^3}{l_1^3 + 2l_2^3} = \frac{F_0}{2\cos^3(\alpha) + 1} = 30(1 - 1/\sqrt{2})\mathrm{kN}.$$

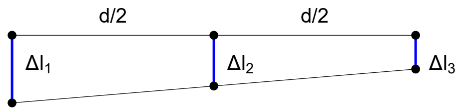
2. S stropa je na treh žici obešen togi nosilec dolžine d, glej sliko. Žice so enako dolge, imajo enak Youngov modul E in presek A. Za obremenitev na skici določi sile žic.



Rešitev: Sile žic označimo z F_1, F_2 in F_3. Sistem vzporednih sil ima skupno prijemališče, zato je sistem statično nedoločen. Ravnovesni enačbi, vsota sil v navpični smeri in ravnovesje momentov sta

$$0 = F_1 + F_2 + F_3 - F_0,$$
$$0 = -\frac{d}{4}F_0 + \frac{d}{2}F_2 + dF_3.$$

Sile žic so osne sile dane s Hookovim zakonom $F_i = AE\Delta l_1/l$, kjer je l nedeformirana dolžina žice, Δl_i pa njen raztezek, glej skico.



Ko obesimo nosilec, se žice raztegnejo in ker je nosilec tog, pritrdišča žic na nosilec ostanejo na isti premici. Smerni koeficient premice je določen s parom dveh točk. Ker je za oba para enak, sledi enačba

$$\frac{\Delta l_2 - \Delta l_1}{d} = \frac{\Delta l_3 - \Delta l_2}{d}.$$

oziroma

$$2\Delta l_2 = \Delta l_3 + \Delta l_2.$$

Vstavimo v ravnovesne enačbe še Hookov zakon. Tako dobimo sistem

$$F_0 = \frac{AE\Delta l_1}{l} + \frac{AE\Delta l_2}{l} + \frac{AE\Delta l_3}{l},$$
$$-\frac{d}{4}F_0 = \frac{AEd\Delta l_2}{2l} + \frac{AEd\Delta l_3}{l},$$
$$2\Delta l_2 = \Delta l_3 + \Delta l_2.$$

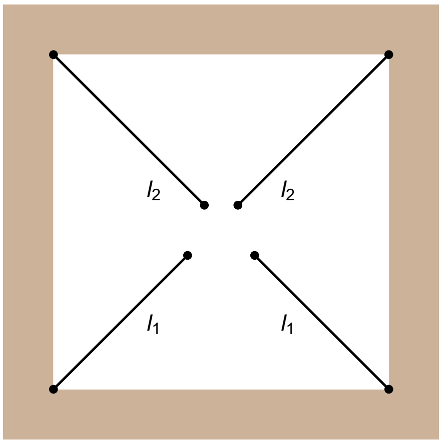
Rešitev sistema je

$$\Delta l_1 = \frac{7F_0 l}{12AE}, \quad \Delta l_2 = \frac{F_0 l}{3AE}, \quad \Delta l_3 = \frac{F_0 l}{12AE}.$$

Iskane sile so

$$F_1 = \frac{7F_0}{12}, \quad F_2 = \frac{F_0}{3}, \quad F_3 = \frac{F_0}{12}.$$

3. V ogliščih togega kvadratnega okvirja, so pritrjene štiri palice tako kot kaže skica. Spodnji in zgornji par palic ima enako dolžino. Palice so elastične, imajo enak presek in Youngov modul. Palice spojimo skupaj. Določi napetosti v palicah



Rešitev: Zaradi simetrije sta očitno sili spodnjih palic enaki in prav tako tudi zgornji. Ravnovesna enačba je potem vsota sil v navpični smeri. Označimo velikost spodnje sile z F_1, zgornje pa z F_2. Dolžino stranice kvadrata označimo z a. Točka v kateri spojimo palice je na simetrali kvadrata in naj bo v oddaljenosti h od spodnje stranice. Ravnovesna enačba je

$$F_1 \frac{h}{l_1 + \Delta l_1} = F_2 \frac{a-h}{l_2 + \Delta l_2}.$$

Palici sta elastični, zato lahko sili palic zapišemo s Hookovim zakonom $F_i = AE\epsilon_i = AE\Delta l_i / l_i$. Tako dobimo

$$\frac{\Delta l_1 h}{l_1(l_1 + \Delta l_1)} = \frac{\Delta l_2 (a-h)}{l_2(l_2 + \Delta l_2)}.$$

Upoštevajmo, da so deformacije majhne. Potem je do prvega reda natanko, kjer zanemarimo člen drugega reda $\Delta l_1 \Delta l_2$,

$$\Delta l_1 h l_2^2 = \Delta l_2 (a-h) l_1^2.$$

Spojeni levi palici s stranico okvirja tvorita trikotnik, ki ga razdelimo na dva pravokotna trikotnika. Potem po Pitagorovem izreku

$$(l_1 + \Delta l_1)^2 = h^2 + (a/2)^2 \quad \text{in} \quad (l_2 + \Delta l_2)^2 = (a-h)^2 + (a/2)^2.$$

Ponovno zanemarimo člene drugega reda. Ker so deformacije palic majhne, je $h = a/2 + \Delta h$, kjer je Δh majhen. Tako je do prvega reda natančno

$$l_1^2 + 2l_1 \Delta l_1^2 = (a/2)^2 + a\Delta h \quad \text{in} \quad l_2^2 + 2l_2 \Delta l_2^2 = (a/2)^2 - a\Delta h.$$

Enačbi seštejemo. Potem

$$\Delta l_1 l_1 + \Delta l_2 l_2 = (a^2 - l_1^2 - l_2^2)/2.$$

Upoštevajmo še zvezo $h = a/2 + \Delta h$ v enačbi, ki povezuje Δl_1 in Δl_2. Tako dobimo iz te zveze

$$\Delta l_1 l_2^2 = \Delta l_2 l_1^2.$$

Sedaj imamo dve enačbi za dve neznanki, Δl_1 in Δl_2. Rešitev je

$$\Delta l_1 = \frac{l_1^2(a^2 - l_1^2 - l_2^2)}{2(l_1^3 + l_2^3)} \quad \text{in} \quad \Delta l_2 = \frac{l_2^2(a^2 - l_1^2 - l_2^2)}{2(l_1^3 + l_2^3)}.$$

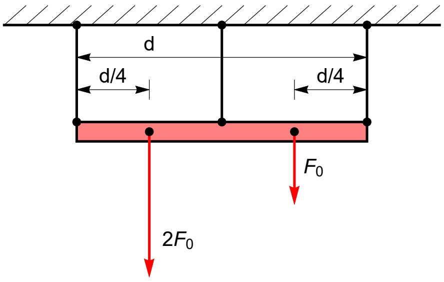
Napetosti v palicah sta tako

$$\sigma_1 = E\frac{l_1(a^2 - l_1^2 - l_2^2)}{2(l_1^3 + l_2^3)} \quad \text{in} \quad \sigma_2 = E\frac{l_2(a^2 - l_1^2 - l_2^2)}{2(l_1^3 + l_2^3)}.$$

Vidimo, da sta napetosti enaki, če sta palici enako dolgi. V primeru različnih dolžin je deformacija daljše palice večja in zato je večja tudi napetost.

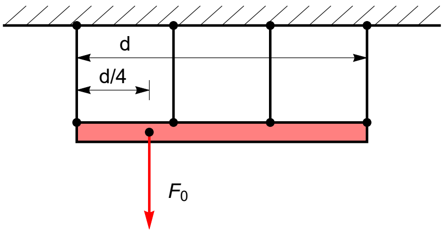
7.1.2 Dodatne naloge

1. S stropa je na treh žici obešen togi nosilec dolžine d, glej sliko. Žice so enako dolge, imajo enak presek A, Youngovi moduli pa so $E_1 = E_0$, $E_2 = 2E_0$, $E_3 = E_0$. Za obremenitev na skici določi sile žic.



   Rešitev: $F_1 = F_0$, $F_2 = 3F_0/2$, $F_3 = F_0/2$.

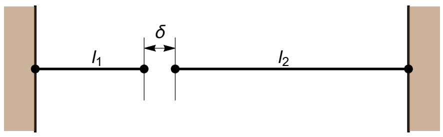
2. S stropa je na štirih žicah obešen togi nosilec dolžine d, glej sliko. Žice so enako dolge, imajo enak presek A in Youngov modul E. Za obremenitev na skici določi sile žic.



   Rešitev: $F_1 = 19F_0/40$, $F_2 = 13F_0/40$, $F_3 = 7F_0/40$, $F_4 = F_0/40$.

7.2 Statično določene naloge

1. Med palicama, ki sta pritrjeni na togi steni je razmak δ, glej skico. Palici sta elastični, imata enak presek S, razmerje Youngovih modulov in dolžin pa je $E_1 : E_2 = 1 : a$, in $l_1 : l_2 = 1 : b$. Palici spojimo. Pri tem se leva palica raztegne za Δl_1, desna pa za Δl_2.



   (a) Izračunaj razmerje $\Delta l_1 : \Delta l_2$.

   (b) Določi napetosti v palicah.

   (c) Za koliko moramo segrete palici, da bo napetost v palicah enaka nič? Razmerje koeficienta toplotnega raztezka je $\alpha_1 : \alpha_2 = 1 : c$.

   Rešitev:

   (a) Imamo $E_2 = aE_1$ in $l_2 = bl_1$. Deformacija leve palice je

$$\frac{\Delta l_1}{l_1} = \epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1},$$

desne pa

$$\frac{\Delta l_2}{l_2} = \epsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2}.$$

Skupni raztezek je $\delta = \Delta l_1 + \Delta l_2$. Ker imata palici enak presek, sta napetosti v palicah enaki, $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$. Tako dobimo enčbo

$$\delta = \frac{l_1\sigma}{E_1} + \frac{l_2\sigma}{E_2} = \sigma\frac{l_1}{E_1}\left(1 + \frac{b}{a}\right).$$

Rešitev je

$$\sigma = \frac{\delta E_1}{l_1(1 + b/a)}.$$

Potem

$$\Delta l_1 = \frac{\sigma l_1}{E_1} = \frac{\delta}{1 + b/a} \quad \text{in} \quad \Delta l_2 = \frac{\delta}{1 + a/b}.$$

Razmerje deformacij je tako

$$\Delta_1 : \Delta_2 = 1 + \frac{b}{a} : 1 + \frac{a}{b}.$$

2. Napetost smo že izračunali in je enaka σ.

3. Spojeni palci segrejemo. Ker sta palici med togima stenama, segrevanje doda nateznemu napetostnemu stanju σ v palici kompresijsko napetost σ'. Iščemo temperaturo, ko je vsota teh dveh napetosti enaka nič. Segrevanje ne povzroči dodatne deformacije, zato je vsota deformacij leve in desne palice enaka nič. Velja torej

$$\frac{\sigma'}{E_1} + \alpha_1\Delta T + \frac{\sigma'}{E_2} + \alpha_2\Delta T = 0.$$

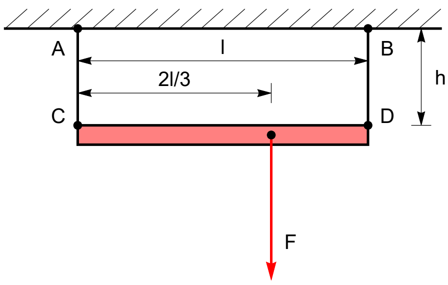
Od tod

$$\Delta T = -\frac{\sigma'}{\alpha_1 + \alpha_2}\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right) = -\frac{\sigma'}{E_1\alpha_1(1 + c)}\left(1 + \frac{1}{a}\right).$$

Upoštevajmo, da je $\sigma' = -\sigma$. Tako dobimo

$$\Delta T = -\frac{\delta(1 + a)}{l_1\alpha_1(a + b)(1 + c)}.$$

4. S stropa je na dve žici obešen togi nosilec dolžine l, glej sliko. Žici s krožnim presekom sta enako dolgi, imata enak Youngov modul E, leva žica ima polmer preseka r_1, desna pa r_2. Za obremenitev na skici :



   (a) izračunaj sili žic;

   (b) določi polmer r_2 tako, da bo nosilec vodoraven.

Rešitev:

   (a) Označimo z F_A silo leve žice, z F_B pa silo desne. Uporabimo momentno enačbo s polom v levem in desnem pritrdišču. Tako dobimo $F_\mathrm{A} = \frac{1}{3}F$ in $F_\mathrm{B} = \frac{2}{3}F$.

(b) Označimo z Δa deformacijo leve žice, z Δb pa desne. Po Hookovem zakonu je

$$\frac{\Delta a}{h} = \frac{1}{E}\frac{F_{\mathrm{A}}}{S_{\mathrm{A}}} = \frac{F}{3\pi E r_1^2}.$$

Podobna enačba velja za Δb. Ker nosilec po deformaciji ostane vodoraven, je $\Delta a = \Delta b$. Od tod potem sledi

$$\Delta a = \frac{Fh}{3\pi E r_1^2} = \frac{2Fh}{3\pi E r_2^2} = \Delta b$$

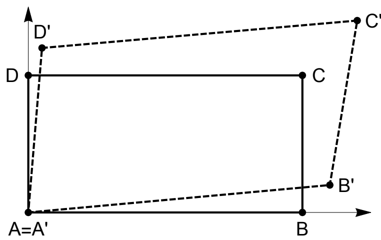
in od tod $r_2 = \sqrt{2} r_1$.

Poglavje 8

Deformacija

8.1 Rešene naloge

1. Pravokotnik $ABCD$ se homogeno deformira v četverokotnik $A'B'C'D'$ tako kot kaže skica. Dolžine stranic referenčnega pravokotnika sta $|AB| = 200\,\mathrm{mm}$ in $|AD| = 100\,\mathrm{mm}$, dolžine stranic deformiranega četverokotnika pa so $|AB'| = 200.5\,\mathrm{mm}$, $|AD'| = 100.3\,\mathrm{mm}$, kot $\angle B'AD'$ pa je $89.5°$.



   (a) Izračunaj infinitezimalni deformacijski tenzor.

   (b) Določi maksimalno osno deformacijo.

   (c) Določi osno deformacijo v smeri diagonale pravokotnika.

Rešitev:

(a) Komponente deformacijskega tenzorja dobimo po formulah

$$\epsilon_{11} = \frac{|A'B'|}{|AB|} - 1 = 2.5 \times 10^{-3},$$

$$\epsilon_{22} = \frac{|A'C'|}{|AD|} - 1 = 3 \times 10^{-3}$$

in

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{2}\gamma_{12} = \frac{1}{2}\frac{0.5°}{180°}\pi \doteq 4.4 \times 10^{-3}.$$

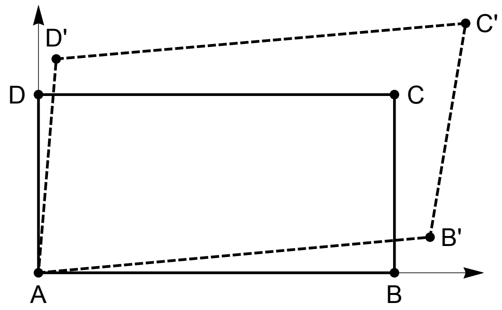
(b) Maksimalno osno deformacijo dobimo po formuli

$$\epsilon_{\max} = \frac{1}{2}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + \sqrt{\left(\frac{\epsilon_{11} - \epsilon_{22}}{2}\right)^2 + \epsilon_{12}^2} \doteq 7.2 \times 10^{-3}.$$

(c) Enotski vektor v smeri diagonale je $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\vec{\imath} + \vec{\jmath})$. Osna deformacija v smeri diagonale je tako

$$\vec{n}\cdot(\underline{\underline{\epsilon}}\vec{n}) = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot 10^{-3}\begin{bmatrix} 2.5 & 4.4 \\ 4.4 & 3 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{10^{-3}}{5}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 9.4 \\ 11.8 \end{bmatrix} \doteq 6.12 \times 10^{-3}.$$

2. Pravokotnik $ABCD$ se deformira v četverokotnik $AB'C'D'$ tako kot kaže skica. Dolžine stranic referenčnega pravokotnika sta $|AB| = 20.0\,\mathrm{cm}$ in $|AD| = 10.0\,\mathrm{cm}$, dolžine stranic deformiranega četverokotnika pa so $|AB'| = 20.1\,\mathrm{cm}$, $|AD'| = 10.1\,\mathrm{cm}$, kot $\angle B'AD'$ pa je $87.5°$.



   (a) Izračunaj infinitezimalni deformacijski tenzor v A.

   (b) Določi maksimalno osno deformacijo v A. V kater smeri nastopi?

Rešitev:

(a) Osni deformaciji sta

$$\epsilon_{11} = \frac{|AB'| - |AB|}{|AB|} = \frac{20.1 - 20}{20} = 0.005$$

in

$$\epsilon_{22} = \frac{|AD'| - |AD|}{|AD|} = \frac{10.1 - 10}{10} = 0.01.$$

Sprememba kota je

$$\gamma_{12} = \frac{2.5°}{180°}\pi \doteq 0.0426.$$

Potem

$$\underline{\underline{\epsilon}} = 10^{-3}\begin{bmatrix} 5 & 21.8 \\ 21.8 & 10 \end{bmatrix}.$$

(b) Maksimalno osno deformacijo dobimo po formuli

$$\epsilon^{\max} = \frac{1}{2}\left(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \sqrt{(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})^2 + \gamma_{12}^2}\right) \doteq \frac{1}{2}\left(15 + \sqrt{25 + (42.6)^2}\right) \doteq 29.4 \times 10^{-3}$$

(c) Ekstremalna smer je dana z

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\arctan\frac{\gamma_{12}}{\epsilon_{22} - \epsilon_{11}} \doteq 41.7°.$$

3. S tremi ekstenziometri, ki oklepajo medsebojni kot $45\,°$ smo izmerili osne deformacije: v vodoravni smeri $\epsilon_a = 10^{-3}$, v navpični smeri $\epsilon_b = -3 \times 10^{-3}$ in v diagonalni smeri $\epsilon_c = 10^{-3}$.

   (a) Določi pripadajoči deformacijski tenzor.

   (b) Določi maksimalno osno deformacijo.

Rešitev:

(a) Postavimo os x v vodoravni smer, os y pa v navpično. Deformacijskemu tenzorju pripada matrika

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} \end{bmatrix}.$$

Očitno je $\epsilon_{11} = \epsilon_a$ in $\epsilon_{22} = \epsilon_b$. Komponento ϵ_{12} določimo iz pogoja $\vec{n} \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \cdot \vec{n} = \epsilon_c$, kjer je $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath} + \vec{\jmath})$. Tako dobimo enačbo $\frac{1}{2}(\epsilon_{11} + 2\epsilon_{12} + \epsilon_{22}) = \epsilon_c$. Od tod $\epsilon_{12} = 2 \times 10^{-3}$ in

$$\underline{\underline{\epsilon}} = 10^{-3}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

(b) Uporabimo formulo

$$\epsilon_{\max} = \frac{1}{2}\left(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \sqrt{(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})^2 + 4\epsilon_{12}^2}\right).$$

Vstavimo izračunano in dobimo $\epsilon_{\max} = (-1 + 2\sqrt{2})10^{-3}$.

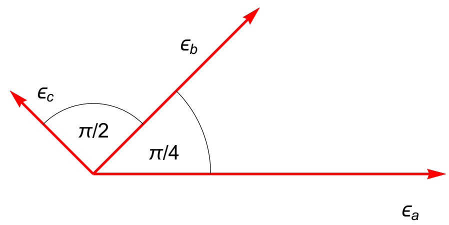
4. Z ekstenziometrom smo v označenih smereh na skici izmerili osne deformacije $\epsilon_{\mathrm{a}} = 0.003$, $\epsilon_{\mathrm{b}} = 0.002$ in $\epsilon_{\mathrm{c}} = 0.001$.

   (a) Določi infinitezimalni deformacijski tenzor.

   (b) Izračunaj ektremalni osni deformaciji in pripadajoči smeri.

   (c) V kateri smeri je osna deformacija največja?

   (d) Določi tudi ekstremalno strižno deformacijo.



Rešitev:

(a) Postavimo os x v smeri deformacije ϵ_a. Potem je

$$\underline{\underline{\epsilon}} = 10^{-3}\begin{bmatrix} \epsilon_a & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} \end{bmatrix}.$$

Uporabimo formulo za osno deformacijo

$$\epsilon(\varphi) = \frac{1}{2}(\epsilon_a + \epsilon_{22}) + \frac{1}{2}(\epsilon_a - \epsilon_{22})\cos 2\varphi + \epsilon_{12}\sin 2\varphi$$

enkrat za $\varphi = \pi/4$, drugič pa za $\varphi = 3\pi/4$. Tako dobimo enačbi

$$\epsilon_b = \frac{1}{2}(\epsilon_a + \epsilon_{22}) + \epsilon_{12}, \quad \epsilon_c = \frac{1}{2}(\epsilon_a + \epsilon_{22}) - \epsilon_{12}.$$

Enačbi seštejemo. Potem $\epsilon_b + \epsilon_c = \epsilon_a + \epsilon_{22}$ in $\epsilon_{22} = \epsilon_b + \epsilon_c - \epsilon_a = 0$. Če enačbi odštejemo, dobimo $\epsilon_b - \epsilon_c = 2\epsilon_{12}$ in tako $\epsilon_{12} = \frac{1}{2}10^{-3}$. Tako smo dobili

$$\underline{\underline{\epsilon}} = 10^{-3}\begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Ekstremalna osna deformacija je

$$\epsilon_{ext} = (3/2 \pm \sqrt{(3/2)^2 + (1/2)^2})10^{-3} = \frac{1}{2}\left(3 \pm \sqrt{10}\right)10^{-3}.$$

Pripadajoči ekstremalni smeri dobimo po formuli

$$\tan 2\varphi = \frac{2\epsilon_{12}}{\epsilon_{11} - \epsilon_{22}} = \frac{1}{3}.$$

Od tod

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{3}, \quad \varphi_2 = \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{3} + \frac{\pi}{2}.$$

(c) Iz skice Mohrove krožnce za deformacijo vidimo, da je maksimalna osna deformacija v smeri φ_1.

(d) Maksimalna strižna deformacija je

$$\gamma_{max} = \epsilon_{max} - \epsilon_{min} = \sqrt{10}\, 10^{-3}.$$

5. Ravninska deformacija ima glavni deformaciji $\epsilon_a = \epsilon_0$ in $\epsilon_b = -3\epsilon_0$. Določi koordinatni sistem v katerem je $\epsilon'_{11} = 0$ in $\epsilon'_{12} > 0$.

Rešitev: Smeri ekstremalnih osnih deformacij sta med seboj pravokotni. Postavimo koordinatni sistem z osjo x v smeri maksimalne, os y pa smeri minimalne osne deformacije. V tem koordinatnem sistemu deformaciji pripada diagonalna matrika s komponentama $\epsilon_{11} = \epsilon_0$ in $\epsilon_{22} = -3\epsilon_0$. V koordiantem sistemu $x'y'$, ki je zasukan glede na os x za kot φ, je

$$\epsilon'_{11} = \frac{1}{2}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + \frac{1}{2}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22}) \cos 2\varphi = \frac{1}{2}\epsilon_0(-2 + 4\cos 2\varphi)$$

Zahtevamo $\epsilon'_{11} = 0$. Potem je $\cos 2\varphi = \frac{1}{2}$ in $\varphi = \pm\pi/6$. Predznak določa pogoj

$$0 < \epsilon'_{12} = -\frac{1}{2}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22}) \sin 2\varphi = -2\epsilon_0 \sin 2\varphi$$

Iskani kot zasuka je tako $\varphi = \pi/6$.

6. V danem koordinatnem sistemu ima deformacijski tenzor ravninskega deformacijskega stanja komponente $\epsilon_{11} = (2 + \sqrt{3})\epsilon_0$, $\epsilon_{12} = \epsilon_0$ in $\epsilon_{22} = (2 - \sqrt{3})\epsilon_0$. Poišči tak koordinatni sistem, da bo pripadajoča matrika komponent deformacijskega tenzorja diagonalna in izračunaj diagonalna elementa.

Rešitev: Pri rotaciji danega koordinatnega sistema za kot φ okrog osi $\vec{k}$ ima deformacijski tenzor komponente

$$\begin{aligned}
\epsilon'_{11} &= \frac{1}{2}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + \frac{1}{2}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22}) \cos 2\varphi + \epsilon_{12} \sin 2\varphi = \epsilon_0 \left(\sin 2\phi + \sqrt{3} \cos 2\phi + 2\right) \\
\epsilon'_{22} &= \frac{1}{2}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) - \frac{1}{2}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22}) \cos 2\varphi - \epsilon_{12} \sin 2\varphi = \epsilon_0 \left(-\sin 2\phi - \sqrt{3} \cos 2\phi + 2\right) \\
\epsilon'_{12} &= -\frac{1}{2}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22}) \sin 2\varphi + \epsilon_{12} \cos 2\varphi = \epsilon_0 \left(\cos 2\phi - \sqrt{3} \sin 2\phi\right).
\end{aligned}$$

Zahtevamo $\epsilon'_{12} = 0$. Od tod

$$\cos 2\phi - \sqrt{3} \sin 2\phi = 0.$$

Enačba ima dve rešitvi, $\varphi = -5\pi/12$ in $\varphi = \pi/12$. V prvem primeru je $\epsilon'_{11} = 0$ in $\epsilon'_{22} = 4\epsilon_0$, v drugem pa $\epsilon'_{11} = 4\epsilon_0$ in $\epsilon'_{22} = 0$.

7. Ravninska deformacija deformira pravokotni trikotnik z dolžinama katet a in b v trikotnik z oglišči v točkah $A = (x_0, y_0)$, $B = (x_0 + a_{11}, y_0 + a_{12})$ in $C = (x_0 + a_{21}, y_0 + a_{22})$. Spremembe dolžin so majhne.

(a) Določi deformacijski tenzor na geometrijski način.

(b) Zapiši deformacijo s pomikom.

(c) Izračunaj infinitezimalen deformacijski tenzor.

(d) Izračunaj deformacijski tenzor.

(e) Primerjaj dobljene mere deformacije za primer $a_{11} = 1.02, a_{12} = -0.01, a_{21} = 0.03, a_{22} = 2.05, a = 1$ in $b = 2$.

Rešitev:

(a) Postavimo os X v smeri katete z dolžino a in os Y v smer druge katete. Potem sta v koordinatnem sistemu XY diagonalna elementa deformacijskega tenzorja pri predpostavki majhne deformacije enaka relativni spremembi dolžin stranic. Tako velja

$$E_{11} = \frac{1}{a}\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2} - 1 = \sqrt{1 + \frac{a_{11}^2 + a_{12}^2 - a^2}{a^2}} - 1 \doteq \frac{1}{2}\frac{a_{11}^2 + a_{12}^2 - a^2}{a^2}$$

in

$$E_{22} = \frac{1}{b}\sqrt{a_{21}^2 + a_{22}^2} - 1 = \sqrt{1 + \frac{a_{21}^2 + a_{22}^2 - b^2}{b^2}} - 1 \doteq \frac{1}{2}\frac{a_{21}^2 + a_{22}^2 - b^2}{b^2}.$$

Pri izračunu smo upoštevali, da je deformacija majhna, zato se dolžina stranice AB le malo razlikuje od prvotne dolžine a. Z enačbo, velja

$$\left|\frac{a_{11}^2 + a_{12}^2 - a^2}{a^2}\right| << 1$$

in zato

$$\sqrt{1 + \frac{a_{11}^2 + a_{12}^2 - a^2}{a^2}} \doteq 1 + \frac{1}{2}\frac{a_{11}^2 + a_{12}^2 - a^2}{a^2}.$$

Izvendiagonalna komponenta E_{12} je enaka eni polovici skalarnega produkta med vektorjema $\frac{1}{a}\vec{AB}$ in $\frac{1}{b}\vec{AC}$, kar je do prvega reda enako polovici kosinusa vmesnega kota med $\vec{AB}$ in $\vec{AC}$. Torej

$$E_{12} = \frac{1}{2}\frac{a_{11}a_{21} + a_{12}a_{21}}{ab} \doteq \frac{1}{2}\cos\varphi = \frac{1}{2}\sin(\pi/2 - \varphi) \doteq \sin\frac{1}{2}\Delta\varphi.$$

(b) Ker se trikotnik deformira v trikotnik, je deformacija afina. Splošna oblika afine preslikave med referenčnimi koordinatami X, Y in prostorskimi je

$$x = \alpha_1 + \alpha_{11}X + \alpha_{21}Y,$$
$$y = \alpha_2 + \alpha_{12}X + \alpha_{22}Y.$$

Ker se izhodišče $X = 0$, $Y = 0$ preslika v točko A, velja $\alpha_1 = x_0$ in $\alpha_2 = y_0$. Nadalje se par $X = a$, $Y = 0$ preslika v točko B. Potem $x_0 + a_{11} = x_0 + \alpha_{11}a$ in $y_0 + a_{12} = x_0 + \alpha_{12}a$. Tako dobimo $\alpha_{11} = a_{11}/a$ in $\alpha_{12} = a_{12}/a$. Podobno $\alpha_{21} = a_{21}/b$ in $\alpha_{22} = a_{22}/b$. Iskana preslikava je tako

$$x = x_0 + \frac{a_{11}}{a}X + \frac{a_{21}}{b}Y,$$
$$y = y_0 + \frac{a_{12}}{a}X + \frac{a_{22}}{b}Y.$$

Če deformacijo zapišemo s pomikom je

$$x = X + u_1(X, Y) = x_0 + \frac{a_{11}}{a}X + \frac{a_{21}}{b}Y,$$
$$y = Y + u_2(X, Y) = y_0 + \frac{a_{12}}{a}X + \frac{a_{22}}{b}Y.$$

Od tod sledi

$$u_1(X, Y) = x_0 + \frac{a_{11}}{a}X + \frac{a_{21}}{b}Y - X,$$
$$u_2(X, Y) = y_0 + \frac{a_{12}}{a}X + \frac{a_{22}}{b}Y - Y.$$

(c) Gradient pomika je

$$\mathrm{Grad}\,\vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{a} - 1 & \frac{a_{21}}{b} \\ \frac{a_{12}}{a} & \frac{a_{22}}{b} - 1 \end{bmatrix}$$

Potem

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Grad}\,\vec{u} + (\mathrm{Grad}\,\vec{u})^T \vec{u}\right) = \begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{a} - 1 & \frac{1}{2}\left(\frac{a_{21}}{b} + \frac{a_{12}}{a}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{a_{21}}{b} + \frac{a_{12}}{a}\right) & \frac{a_{22}}{b} - 1 \end{bmatrix}.$$

Če primerjamo $\underline{\underline{\epsilon}}$ z $\underline{\underline{E}}$, vidimo, da se navidez razlikujeta.

(d) Izračunajmo sedaj še deformacijski tenzor $\underline{\underline{E}}$ po formuli

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{\epsilon}} + \frac{1}{2}(\mathrm{Grad}\,\vec{u})^T\,\mathrm{Grad}\,\vec{u} = \underline{\underline{\epsilon}} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \left(\frac{a_{11}}{a} - 1\right)^2 + \left(\frac{a_{12}}{a}\right)^2 & \left(\frac{a_{11}}{a} - 1\right)\frac{a_{21}}{b} + \left(\frac{a_{22}}{b} - 1\right)\frac{a_{12}}{a} \\ & \left(\frac{a_{22}}{b} - 1\right)^2 + \left(\frac{a_{21}}{b}\right)^2 \end{bmatrix}.$$

Po krajšem računu dobimo

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{a_{11}^2 + a_{12}^2 - a^2}{a^2} & \frac{a_{11}a_{21} + a_{12}a_{21}}{ab} \\ & \frac{a_{21}^2 + a_{22}^2 - b^2}{b^2} \end{bmatrix}.$$

Dobljeni rezultat se do prvega reda natankosti ujema z rezultatom, ki smo ga dobili po geometrijski poti.

8. Po točki (a) je

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} 0.02005 & 0.00253 \\ 0.00253 & 0.02511 \end{bmatrix}.$$

Infinitezimalni deformacijski tenzor je

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} 0.02000 & 0.00250 \\ 0.00250 & 0.02500 \end{bmatrix},$$

deformacijski tenzor pa je

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 0.02025 & 0.00253 \\ 0.00253 & 0.02542 \end{bmatrix}.$$

Vidimo, da so pri majhnih deformacijah vse mere približno enake.

9. Na primeru rotacije pokaži, da infinitezimalen deformacijski tenzor ni dobra mera deformacije pri velikih pomikih.

Rešitev: Postavimo koordinatno os Z v smeri osi rotacije. Potem rotaciji za kot θ pripada matrika

$$Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

deformacija, ki jo lahko obravnavamo kot ravninsko deformacijo, pa je dana z

$$\begin{aligned} x &= X\cos\theta - Y\sin\theta = X + X\cos\theta - Y\sin\theta - X, \\ y &= X\sin\theta + Y\cos\theta = Y + X\sin\theta + Y\cos\theta - Y. \end{aligned}$$

Od tod dobimo komponenti pomika

$$\begin{aligned} u_1 &= X\cos\theta - Y\sin\theta - X, \\ u_2 &= X\sin\theta + Y\cos\theta - Y. \end{aligned}$$

Gradient pomika je

$$\text{Grad}\,\vec{u} = \begin{bmatrix} \cos\theta - 1 & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - 1 \end{bmatrix}.$$

Pripadajoči infinitezimalni deformacijski tenzor je tako

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2}\left(\text{Grad}\,\vec{u} + (\text{Grad}\,\vec{u})^T\right) = \begin{bmatrix} \cos\theta - 1 & 0 \\ 0 & \cos\theta - 1 \end{bmatrix}.$$

Rotacija ohranja razdalje, zato je prava mera rotacije enaka nič. Za $\theta = \pi/2$ pa dobimo $\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ in potemtakem $\underline{\underline{\epsilon}}$ ni prava mera za velike pomike. Prava mera je deformacijski tenzor

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{\epsilon}} + \frac{1}{2}(\text{Grad}\,\vec{u})^T\,\text{Grad}\,\vec{u}.$$

Po kratkem računu dobimo, da je $\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{0}}$.

8.2 Dodatne naloge

1. Ravninska deformacija ima glavni deformaciji $\epsilon_a = 3\epsilon_0$ in $\epsilon_b = -\epsilon_0$. Določi koordinatni sistem v katerem je $\epsilon'_{11} = 0$ in $\epsilon'_{12} > 0$.

   Rešitev: Os x' oklepa kot $\pi/6$ s smerjo maksimalne osne deformacije.

2. V treh smereh, ki oklepajo kot $\pi/4$ smo izmerili osne deformacije $\epsilon_a = 2\cdot 10^{-3}$, $\epsilon_b = -\frac{1}{2}\cdot 10^{-3}$ in $\epsilon_c = -1\cdot 10^{-3}$

   (a) Določi deformacijski tenzor.

   (b) Izračunaj njegovi ekstremalni osni deformaciji in smer maksimalne osne deformacije.

   (c) Skiciraj Mohrovo krožnico.

   Rešitev: V koordinatnem sistemu z osjo x v smeri osne deformacije ϵ_a je $\epsilon_{11} = 2\cdot 10^{-3}$, $\epsilon_{21} = -1\cdot 10^{-3}$ in $\epsilon_{22} = -1\cdot 10^{-3}$. Extremalni osni deformaciji sta $\epsilon_{ext} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{13}\right) 2\cdot 10^{-3}$. Maksimalna smer oklepa z osjo x kot $-\frac{1}{2}\arctan(2/3) \doteq -16.85°$ minimalna pa kot $= -\frac{1}{2}\arctan(2/3) + \pi/2 \doteq 73.16°$.

3. V treh smereh, ki oklepajo kot $\pi/3$ smo izmerili osne deformacije $\epsilon_a = \frac{1}{2}\cdot 10^{-3}$, $\epsilon_b = \frac{1}{4}\left(2 - 3\sqrt{3}\right)\cdot 10^{-3}$ in $\epsilon_c = \frac{1}{4}\left(2 + 3\sqrt{3}\right)\cdot 10^{-3}$

   (a) Določi deformacijski tenzor.

   (b) Izračunaj njegovi ekstremalni osni deformaciji in smer maksimalne osne deformacije.

   (c) Skiciraj Mohrovo krožnico.

   Rešitev: V koordinatnem sistemu z osjo x v smeri osne deformacije ϵ_a je $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 1/2\cdot 10^{-3}$ in $\epsilon_{21} = -3/2\cdot 10^{-3}$. Extremalni osni deformaciji sta $\epsilon_{max} = 2\cdot 10^{-3}$, minimalna pa $\epsilon_{min} = -1\cdot 10^{-3}$. Maksimalna smer oklepa kot $-\pi/4$ z osjo x, minimalna pa $\pi/4$.

4. V danem koordinatnem sistemu ima deformacijski tenzor ravninskega deformacijskega stanja komponente $\epsilon_{11} = 3\epsilon_0$, $\epsilon_{12} = \epsilon_0\sqrt{3}$ in $\epsilon_{22} = \epsilon_0$. Poišči tak koordinatni sistem, da bo pripadajoča matrika komponent deformacijskega tenzorja diagonalna in izračunaj diagonalna elementa.

   Rešitev: Kot $\varphi = \pi/6$ ali $\varphi = -2\pi/6$. Diagonalna elementa $4\epsilon_0$ in 0.

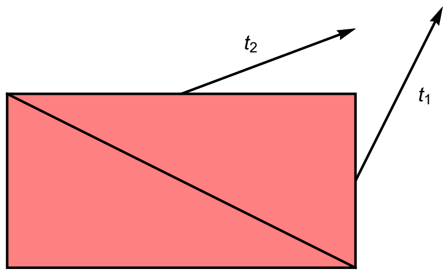
Poglavje 9

Napetost

9.1 Ravninska napetost

9.1.1 Rešene naloge

1. Pravokotnik s stranicami v razmerju 2 : 1, glej skico, ima na stranicah napetosti $\vec{t}_2 = \left(\frac{2}{3}\vec{\imath} + \frac{1}{4}\vec{\jmath}\right) 30\,\text{MPa}$ in $\vec{t}_1$, ki ima velikost $10\sqrt{5}$MPa.



   (a) Dopolni sliko z vektorjema napetosti na preostalih dveh stranicah.

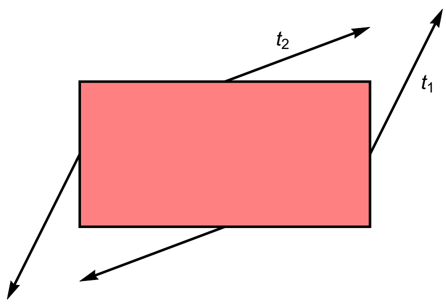
   (b) Določi $\vec{t}_1$ in pripadajoči napetostni tenzor.

   (c) Izračunaj polmer Mohrove krožnice.

   (d) Določi normalno in strižno napetost na označeno diagonalo pravokotnika.

   Rešitev:

   (a) Dopolnjena skica napetosti je



   (b) Ker je $\vec{t}_2 = \underline{\underline{t}}\,\vec{\jmath}$, je

$$\underline{\underline{t}} = \begin{bmatrix} t_{11} & 2/3 \\ 2/3 & 1/4 \end{bmatrix} 30\,\text{MPa}.$$

   Potem je $\vec{t}_1 = \underline{\underline{t}}\,\vec{\imath} = \left(t_{11}\vec{\imath} + \frac{2}{3}\vec{\jmath}\right) 30\,\text{MPa}$ in

$$\left|\vec{t}_1\right|^2 = \left(t_{11}^2 + \frac{4}{9}\right) 900\,\text{MPa}^2 = 500\,\text{MPa}^2$$

   in od tod $t_{11} = 10\,\text{MPa}$.

   (c) Polmer Mohrove krožnice je

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}(t_{11} - t_{22})\right)^2 + t_{12}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{24}\right)^2 + \frac{4}{9}}\,30\,\text{MPa} = \frac{5}{4}\sqrt{257} = 20.04\,\text{MPa}.$$

(d) Vektor v smeri diagonale je $2\vec{\imath}+\vec{\jmath}$. Potem je normala na diagonalo $\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{5}}(-\vec{\imath}+2\vec{\jmath})$. Vektor napetosti na ravnino v smeri diagonale je

$$\vec{t}=\underline{\underline{t}}\,\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1/3 & 2/3\\ 2/3 & 1/4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix}30\,\mathrm{MPa}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}30\\ -5\end{bmatrix}\mathrm{MPa}=\sqrt{5}\begin{bmatrix}6\\ -1\end{bmatrix}\mathrm{MPa}.$$

Normalna napetost je tako

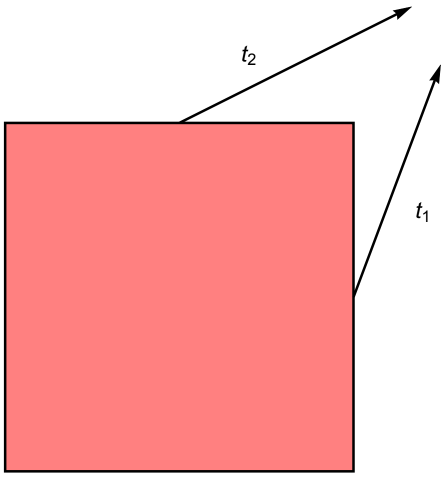
$$t_n=\vec{n}\cdot\vec{t}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}30\\ -5\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix}30\,\mathrm{MPa}=-8\,\mathrm{MPa}.$$

Strižna napetost je $\tau=\sqrt{\left|\vec{t}\right|^2-t_n^2}$. Izračunajmo posebej

$$\left|\vec{t}\right|=\sqrt{185}\mathrm{MPa}.$$

Potem $\tau=11\,\mathrm{MPa}$.

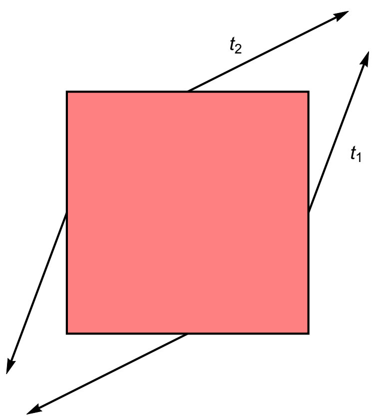
2. Kvadrat na sliki ima na stranicah napetosti $\vec{t}_2=\left(\frac{2}{3}\vec{\imath}+\frac{1}{3}\vec{\jmath}\right)$ MPa in $\vec{t}_1$, ki ima velikost $\frac{\sqrt{73}}{12}$MPa.



   (a) Dopolni sliko z vektorjema napetosti na preostalih dveh stranicah.
   (b) Določi $\vec{t}_2$ in pripadajoči napetostni tenzor.
   (c) Skiciraj Mohrovo krožnico.
   (d) Določi normalno in strižno napetost na diagonali kvadrata.

Rešitev:

(a) Dopolnjena slika je



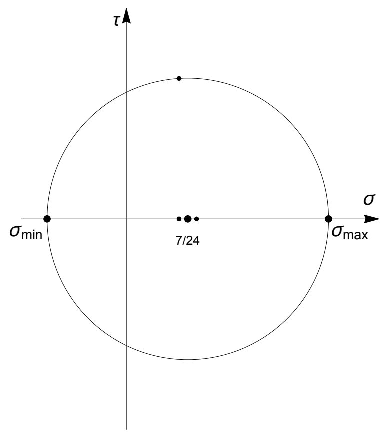
(b) Tenzor napetosti je oblike

$$\underline{\underline{t}}=\begin{bmatrix}t_{11} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}.$$

Neznano komponento t_{11} dobimo iz pogoja, da je $|\underline{\underline{t}}\vec{\imath}| = \frac{\sqrt{73}}{12}$. Potem $t_{11}^2 + \frac{4}{9} = \frac{73}{144}$ in tako $t_{11} = \pm\frac{1}{4}$. Iz skice sledi, da je $t_{11} = \frac{1}{4}$. Potemtakem

$$\underline{\underline{t}} = \begin{bmatrix} 1/4 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

(c) Skica Mohrove krožnice je



(d) Na diagonali z normalo $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath}+\vec{\jmath})$ je vektor napetosti enak $\vec{t} = \underline{\underline{t}}\,\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{11}{12}\vec{\imath}+\vec{\jmath})$MPa. Normalna napetost je $t_n = \vec{t}\cdot\vec{n} = \frac{23}{24}$MPa. Strižna napetost pa $t_s = \sqrt{|\vec{t}|^2 - t_n^2} = \frac{1}{24}$MPa.

3. V danem koordinatnem sistemu ima napetostni tenzor ravninskega napetostnega stanja komponente $t_{11} = \sigma$, $t_{12} = \sqrt{3}\sigma$ in $t_{22} = 3\sigma$. Poišči tak koordinatni sistem, da bo pripadajoča matrika komponent napetostnega tenzorja diagonalna in izračunaj diagonalna elementa.

   Rešitev: Pri rotaciji danega koordinatnega sistema za kot φ okrog osi $\vec{k}$ ima napetostni tenzor komponente

$$t'_{11} = \frac{1}{2}(t_{11}+t_{22}) + \frac{1}{2}(t_{11}-t_{22})\cos 2\varphi + t_{12}\sin 2\varphi = \sigma\left(\sqrt{3}\sin 2\phi - \cos 2\phi + 2\right)$$
$$t'_{22} = \frac{1}{2}(t_{11}+t_{22}) - \frac{1}{2}(t_{11}-t_{22})\cos 2\varphi - t_{12}\sin 2\varphi = \sigma\left(-\sqrt{3}\sin 2\phi + \cos 2\phi + 2\right)$$
$$t'_{12} = -\frac{1}{2}(t_{11}-t_{22})\sin 2\varphi + t_{12}\cos 2\varphi = \sigma\left(\sin 2\phi + \sqrt{3}\cos 2\phi\right).$$

   Zahtevamo $t'_{12} = 0$. Od tod
$$\sin 2\phi + \sqrt{3}\cos 2\phi = 0.$$

   Enačba ima dve rešitvi, $\varphi = -\pi/6$ in $\varphi = \pi/3$. V prvem primeru je $t'_{11} = 0$ in $t'_{22} = 4\sigma$, v drugem pa $t'_{11} = 4\sigma$ in $t'_{22} = 0$.

4. Pokaži, da je ravninsko napetostno stanje enoosno natanko takrat, ko je $\det\underline{\underline{t}} = 0$.

   Rešitev: Napetostno stanje je enoosno, če obstaja tak koordinatni sistem, da so vse komponente, razen komponente t_{11} napetostnega tenzorja enake nič. Ker je napetostno stanje ravninsko, je $t_{13} = t_{23} = t_{33} = 0$. Nadalje, če usmerimo kordinatni sistem v smeri ekstremalnih normalnih napetosti, je $t_{12} = 0$, daigonalna elementa pa sta enaka ekstremalnima normalnima napetostima. Ekstremalni napetosti sta

$$\sigma_{ext} = \frac{1}{2}\left(t_{11} + t_{22} \pm \sqrt{(t_{11} - t_{22})^2 + 4t_{12}^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{sl}\,\underline{\underline{t}} \pm \sqrt{\left(\mathrm{sl}\,\underline{\underline{t}}\right)^2 - 4\det \underline{\underline{t}}}\right).$$

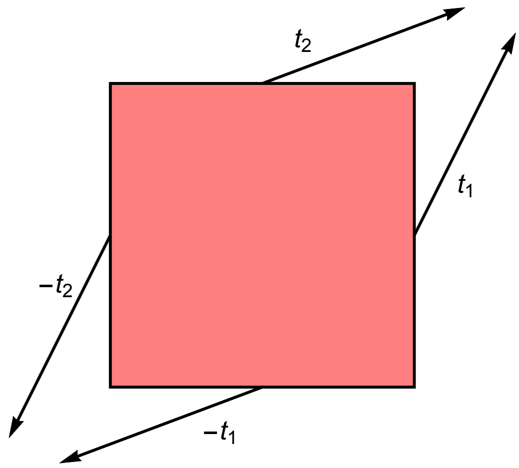
Privzemimo $\mathrm{sl}\,\underline{\underline{t}} \geq 0$. Potem je $\sigma_{min} = 0$ natanko tedaj, ko je $\det \underline{\underline{t}} = 0$ in $\sigma_{max} = \mathrm{sl}\,\underline{\underline{t}}$. V primeru $\mathrm{sl}\,\underline{\underline{t}} \leq 0$ pa $\sigma_{min} = \mathrm{sl}\,\underline{\underline{t}}$ in $\sigma_{max} = 0$.

9.1.2 Dodatne naloge

1. Kvadrat na sliki ima na stranicah napetosti $\vec{t}_1 = \left(\frac{1}{3}\vec{\imath} + \frac{2}{3}\vec{\jmath}\right)$ MPa in $\vec{t}_2$, ki ima velikost $\frac{\sqrt{5}}{3}$MPa.

   (a) Določi $\vec{t}_2$ in pripadajoči napetostni tenzor.

   (b) Določi normalno in strižno napetost na obeh diagonalah kvadrata.



   Rešitev:

   (a) $\vec{t}_2 = \left(\frac{2}{3}\vec{\imath} + \frac{1}{3}\vec{\jmath}\right)$ MPa, $\underline{\underline{t}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ MPa.

   (b) Normalni napetosti sta 1 MPa in $-\frac{1}{3}$MPa, strižni pa sta obe enaki nič.

2. V danem koordinatnem sistemu ima napetostni tenzor ravninskega napetostnega stanja komponente $t_{11} = \sigma$, $t_{12} = \sigma$ in $t_{22} = \sigma$. Poišči tak koordinatni sistem, da bo pripadajoča matrika komponent napetostnega tenzorja diagonalna in izračunaj diagonalna elementa.

   Rešitev: Kot $\varphi = \pi/4$, diagonalna elementa pa sta 2σ in 0.

Poglavje 10

Hookov zakon

10.1 Zveza med napetostjo in deformacijo

10.1.1 Rešene naloge

1. Ravninska deformacija deformira pravokotnik dimenzije $2\,\mathrm{cm} \times 1\,\mathrm{cm}$ v romboid dimenzije $2.05\,\mathrm{cm} \times 0.98\,\mathrm{cm}$ z diagonalo, ki je za $\sqrt{5}/50\,\mathrm{cm}$ daljša od prvotne diagonale pravokotnika.

   (a) Določi deformacijski tenzor.

   (b) Izračunaj ekstremalni osni deformaciji in skiciraj Mohrovo krožnico. V kateri smeri je osna deformacija največja?

   (c) Za izotropični material z $\nu = 1/5$ in $E = 120\,\mathrm{GPa}$ z uporabo Hookovega zakona določi pripadajoči napetostni tenzor.

   Rešitev:

   (a) Postavimo koordinatni sistem v smeri stranic pravokotnika in izračunajmo osni deformaciji. $\epsilon_{11} = \frac{\Delta a}{a} = 0.025 = 1/40$ in $\epsilon_{22} = \frac{\Delta b}{b} = -0.02 = -1/50$. Za izračun ϵ_{12} bomo upoštevali deformacijo v smeri diagonale, ki je

   $$\epsilon_d = \frac{d + \Delta d - d}{d} = \frac{1}{50} = 0.02.$$

   Uporabimo sedaj formulo

   $$\epsilon_d = \frac{1}{2}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + \frac{1}{2}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})\cos 2\varphi + \epsilon_{12}\sin 2\varphi,$$

   kjer je φ kot med osjo x in diagonalo pravokotnika. Potem $\cos\varphi = 2/\sqrt{5}$ in $\sin\varphi = 1/\sqrt{5}$. Od tod $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = 3/5$ in $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi = 4/5$. Tako dobimo enačbo

   $$\frac{1}{50} = \frac{1}{400} + \frac{27}{1000} + \epsilon_{12}\frac{4}{5}$$

   in od tod $\epsilon_{12} = 1/20 = 0.05$. Deformacijski tenzor je tako enak

   $$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} 1/40 & 1/200 \\ 1/200 & -1/50 \end{bmatrix}.$$

(b) Ekstremalni deformaciji sta po formuli

$$\epsilon_{\text{ext}} = \frac{1}{2}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})\right)^2 + \epsilon_{12}^2}$$

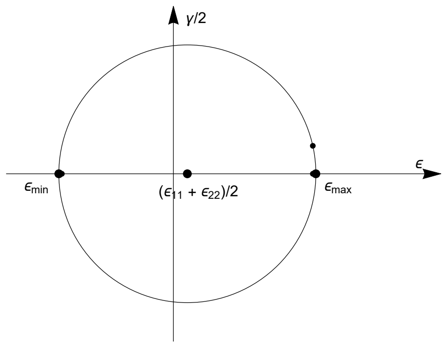
enaki

$$\epsilon_{\text{max}} = \frac{1}{400}(1 + \sqrt{85}) \doteq 0.0255 \quad \epsilon_{\text{min}} = \frac{1}{400}(1 - \sqrt{85}) \doteq -0.0206.$$

Smer maksimalne osne deformacije dobimo po formuli

$$\tan 2\varphi = \frac{2\epsilon_{12}}{\epsilon_{11} - \epsilon_{22}} = \frac{2}{9}.$$

Potem $\varphi = 6.26°$. Iz skice Mohrove krožnice vidimo, da je to smer ekstremalne osne deformacije.



Slika 10.1: Slika Mohrove krožnice.

(c) Napetostni tenzor je

$$\underline{\underline{t}} = 2\mu\underline{\underline{\epsilon}} + \lambda \,\text{sl}\left(\underline{\underline{\epsilon}}\right) \underline{\underline{I}},$$

kjer sta μ in λ Lamejeva koeficienta dana z $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ in $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$. Njuni vrednosti sta $\mu = 50\,\text{GPa}$ in $\lambda = 100/3\,\text{GPa}$. Potem

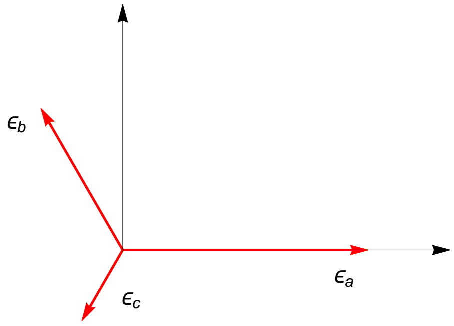
$$\underline{\underline{t}} = \begin{bmatrix} 8/3 & 1/2 \\ 1/2 & -11/6 \end{bmatrix} \text{GPa}.$$

2. Z ekstenziometrom smo v smereh, ki med seboj oklepajo kot $2\pi/3$, glej skico, izmerili osne deformacije $\epsilon_{\mathrm{a}} = 0.003$, $\epsilon_{\mathrm{b}} = 0.002$ in $\epsilon_{\mathrm{c}} = 0.001$.

   (a) Določi infinitezimalni deformacijski tenzor.

   (b) Naj bo deformiran material izotropičen z Youngovim modulom $E = 210\,\mathrm{GPa}$ in Poissonovim količnikom $\nu = 0.2$. Za po prvi točki izračunano ravninsko deformacijo določi pripadajoči napetostni tenzor. Tu upoštevaj, da je

$$\underline{\underline{t}} = \frac{E}{1+\nu}\underline{\underline{\epsilon}} + \frac{\nu E \,\mathrm{sl}\left(\underline{\underline{\epsilon}}\right)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\underline{\underline{I}}.$$



Rešitev:

(a) Ker je osna napetost v smeri osi x enaka ϵ_{a}, je $\epsilon_{11} = 2\times 10^{-3}$. Enotski vektor v smer osne deformacije ϵ_{b} je $\vec{e}_{\mathrm{b}} = \cos 2\pi/3\vec{\imath} + \sin 2\pi/3\vec{\jmath} = -\frac{1}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}$, v smeri ϵ_{c} pa $\vec{e}_{\mathrm{c}} = -\frac{1}{2}\vec{\imath} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}$. Zapišimo tenzor deformacije

$$\underline{\underline{\epsilon}} = 10^{-3}\begin{bmatrix} 3 & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix}.$$

Neznanki β in γ določimo iz pogojev

$$\vec{e}_{\mathrm{b}} \cdot \left(\underline{\underline{\epsilon}}\vec{e}_{\mathrm{b}}\right) = \epsilon_{\mathrm{b}} \qquad \vec{e}_{\mathrm{c}} \cdot \left(\underline{\underline{\epsilon}}\vec{e}_{\mathrm{c}}\right) = \epsilon_{\mathrm{c}}.$$

Tako dobimo enačbi

$$2\sqrt{3}\beta - 3\gamma = -5 \qquad 2\sqrt{3}\beta + 3\gamma = 1.$$

Rešitvi sta $\beta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ in $\gamma = 1$. Potemtakem je

$$\underline{\underline{\epsilon}} = 10^{-3}\begin{bmatrix} 3 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Uporabimo dano formulo. Izrčunajmo posebej

$$\frac{E}{1+\nu} = 175\,\mathrm{GPa},$$

$$\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{175}{3}\mathrm{GPa},$$

in $\mathrm{sl}\left(\underline{\underline{\epsilon}}\right) = 4\times 10^{-3}$. Tako dobimo

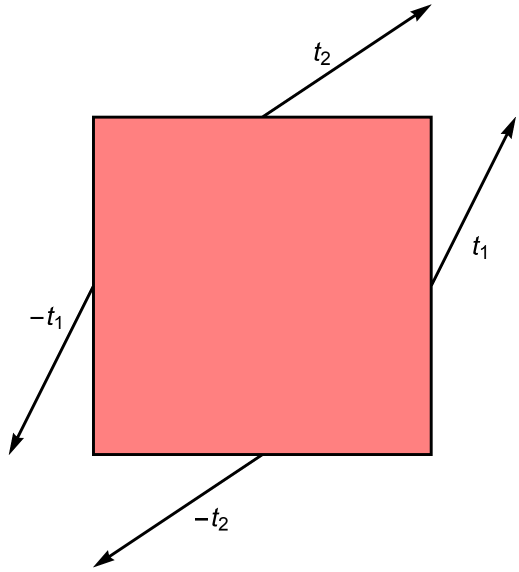
$$\underline{\underline{t}} = 175\,\mathrm{MPa}\left(\begin{bmatrix} 3 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{4}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 175\,\mathrm{MPa}\begin{bmatrix} \frac{13}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{7}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

3. Kvadrat na sliki ima na stranicah napetosti $\vec{t_1}$, ki ima velikost $\frac{\sqrt{5}}{4}$MPa in $\vec{t_2} = \left(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j}\right)$ MPa.

   (a) Določi $\vec{t_1}$ in pripadajoči napetostni tenzor.

   (b) Privzemi, da se kvadrat elastično deformira. Izračunaj pripadajoči deformacijski tenzor, če je iz izotropičnega materiala in je $E = 120\,\text{GPa}$ in $\nu = 1/3$.

   (c) Določi pripadajoče ekstremalne osne deformacije.



Rešitev:

(a) Vektor $\vec{t_2}$ je drugi stolpec matrike napetostnega tenzorja. Ker je simetričen, je oblike

$$\underline{\underline{t}} = \begin{bmatrix} x & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix} \text{MPa}.$$

Določiti moramo še x. Vektor napetosti $\vec{t_1}$ je prvi stolpec napetostnega tenzorja. Torej $\vec{t_1} = \left(x\vec{i} + \frac{1}{4}\vec{j}\right)$ MPa. Ker je $|\vec{t_1}| = \frac{\sqrt{5}}{4}$MPa, je $x^2 + \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$ in tako $x = \frac{1}{4}$. Torej

$$\underline{\underline{t}} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix} \text{MPa}.$$

(b) Deformacija je dana s Hookovim zakonom

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{t}} - \frac{\nu}{E}\text{Sl}(\underline{\underline{t}})\underline{\underline{I}} = \left(\frac{1}{90}\begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix} - \frac{1}{360}\frac{7}{12}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\frac{\text{MPa}}{\text{GPa}}$$

Od tod po krajšem računu

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} 1.16 & 5.56 \\ 5.56 & 2.08 \end{bmatrix} 10^{-6}$$

(c) Ekstremalne osne deformacije dobimo po formuli

$$\epsilon^{\max,\min} = \frac{1}{2}\left(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} \pm \sqrt{(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})^2 + \gamma_{12}^2}\right) = \frac{1}{2}\left(3.24 \pm \sqrt{0.92^2 + 11.12^2}\right) 10^{-6}$$

Tako dobimo $\epsilon^{\max} = 7.2010^{-6}$ in $\epsilon^{\min} = -3.95010^{-6}$.

4. Pokaži, da se za izotropičen material smeri ekstremalne osne deformacije ujemajo s smermi ekstremalnih normalnih napetosti. Privzemi, da je deformacija ali napetost ravninska.

Rešitev: Privzemimo ravninsko deformacijo. Smer ekstremalne osne deformacije je dana s formulo

$$\varphi^1 = \frac{1}{2}\arctan\frac{2\epsilon_{12}}{\epsilon_{11} - \epsilon_{22}}, \qquad \varphi^2 = \varphi^1 + \pi/2.$$

Po Hookovem zakonu

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{E}t_{11} - \frac{\nu}{E}t_{22}, \quad \epsilon_{22} = -\frac{\nu}{E}t_{11} + \frac{1}{E}t_{22}, \quad \epsilon_{12} = \frac{1}{2G}t_{12}.$$

Potem

$$\epsilon_{11} - \epsilon_{22} = \frac{1+\nu}{E}\left(t_{11} - t_{22}\right).$$

Upoštevajmo še, da je $G = E/(2(1+\nu))$. Potem

$$\frac{1}{2}\arctan\frac{2\epsilon_{12}}{\epsilon_{11} - \epsilon_{22}} = \frac{1}{2}\arctan\frac{2t_{12}}{t_{11} - t_{22}}$$

in ekstremalne smeri se res ujemajo.

5. V treh smereh, ki oklepajo medsebojni kot $\pi/4$ izmerimo osne deformacije $\epsilon_{\mathrm{a}} = 10^{-3}$, $\epsilon_{\mathrm{b}} = -3/2 \times 10^{-3}$ in $\epsilon_{\mathrm{c}} = 2 \times 10^{-3}$ in pripadajoči normalni napetosti $\sigma_{\mathrm{a}} = 240\mathrm{MPa}$ in $\sigma_{\mathrm{b}} = 0\mathrm{MPa}$. Material je izotropičen, deformacija pa je ravninska. Določi E, ν in μ.

Rešitev: V prvem koraku iz podatkov določimo deformacijski tenzor. Postavimo koordinatni sistem tako, da se smeri podane osne deformacije ujemata s koordinatnima osema, tretja pa je v smeri diagonale. Potem je

$$\underline{\underline{\epsilon}} = 10^{-3}\begin{bmatrix} 1 & x \\ x & 2 \end{bmatrix}\mathrm{MPa},$$

kjer je x še neznano število. V smeri diagonale je

$$-3/2 \times 10^{-3} = \epsilon_{\mathrm{b}} = \frac{1}{2}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + \frac{1}{2}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})\cos\pi/2 + \epsilon_{12}\sin\pi/2 = 10^{-3}\left(3/2 + x\right).$$

Tako dobimo $\epsilon_{12} = -3 \times 10^{-3}$.

Napetostni tenzor je dan s Hookovim zakonom

$$\underline{\underline{t}} = 2\mu\underline{\underline{\epsilon}} + \lambda\,\mathrm{sl}(\underline{\underline{\epsilon}})\underline{\underline{I}} = 10^{-3}\begin{bmatrix} 2\mu + 3\lambda & -6\mu \\ -6\mu & 4\mu + 3\lambda \end{bmatrix}\mathrm{MPa}.$$

Podani normalni napetosti sta v smereh $\vec{\imath}$ in $\vec{\imath} + \vec{\jmath}$. Potem je

$$\begin{aligned} 240\mathrm{MPa} &= \sigma_{\mathrm{a}} = 10^{-3}\left(2\mu + 3\lambda\right) \\ 0\mathrm{MPa} &= \sigma_{\mathrm{b}} = 3 \times 10^{-3}\left(\lambda - \mu\right). \end{aligned}$$

Od tod sledi $\lambda = \mu = 48\,\mathrm{GPa}$. Iz formul

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \qquad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

tako dobimo

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \qquad \nu = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

in od tod $E = 120\,\mathrm{GPa}$ in $\nu = 1/4$.

Poglavje 11

Termoelastičnost

11.1 Osna termoelastičnost

11.1.1 Rešene naloge

1. Dana je kompozitna palica s konstantnim presekom $A = 1\,\mathrm{cm}^2$. Dolžina levega dela palice je $1.0\,\mathrm{m}$, desnega $0.5\,\mathrm{m}$. Levi del palice ima Youngov modul $E_1 = 70\,\mathrm{GPa}$, desni $E_2 = 120\,\mathrm{GPa}$, koeficient termalnega raztezka levega je $\alpha_1 = 23 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}/^\circ\mathrm{C}$, desnega pa $\alpha_2 = 17 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}/^\circ\mathrm{C}$.

   (a) Palico segrejemo za $10\,^\circ\mathrm{C}$. Izračunaj njen raztezek.

   (b) Nato palico tlačno obremenimo v osni smeri. Kakšna naj bo sila, da se bo palica skrčila na prvotno dolžino?

   Rešitev:

   (a) Raztezek palice je dan s formulo $\Delta l = \alpha l \Delta T$. Potem

   $$\Delta l_1 = \alpha_1 l_1 \Delta T = 0.23\,\mathrm{mm} \qquad \text{in} \qquad \Delta l_2 = \alpha_2 l_2 \Delta T = 0.085\,\mathrm{mm}.$$

   Palica se podaljša za $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = 0.315\,\mathrm{mm}$.

   (b) Pri dani deformaciji je osna napetost dana s formulo $\sigma = E\frac{\Delta l}{l}$. Potem $\Delta l_1 = \sigma\frac{l_1}{E_1}$ in $\Delta l_2 = \sigma\frac{l_2}{E_2}$. Od tod

   $$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \sigma\left(\frac{l_1}{E_1} + \frac{l_2}{E_2}\right) \Longrightarrow \sigma = \frac{\Delta l}{l_1/E_1 + l_2/E_2}.$$

   Vstavimo vrednosti in dobimo

   $$\sigma = -\frac{315 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}}{1.845 \times 10^{-11}\,\mathrm{mPa}^{-1}} = -17.1\,\mathrm{MPa}.$$

   Sila je enaka

   $$F = A\sigma = -10^{-4}\,\mathrm{m}^2 \times 17.1 \times 10^6\,\mathrm{Pa} = -1.7\,\mathrm{kN}.$$

11.2 Prostorska termoelastičnost

11.2.1 Rešene naloge

1. V togi matriki krogelni elastičen vključek segrejemo za ΔT. Določi napetost.

   Rešitev: Celotna deformacija $\underline{\underline{\epsilon}}$ je vsota elastične $\underline{\underline{\epsilon}}^{\mathrm{e}}$ in termalne $\underline{\underline{\epsilon}}^{\mathrm{t}}$ deformacije. Ker je vključek v togi matriki, je celotna deformacija enaka nič. Velja torej

   $$\underline{\underline{\epsilon}}^{\mathrm{e}} = -\underline{\underline{\epsilon}}^{\mathrm{t}} = -\alpha\Delta T\underline{\underline{I}}.$$

   Po Hookovem zakonu za izotropičen material je potemtakem napetostno stanje hidrostatično, $\underline{\underline{t}} = -p\underline{\underline{I}}$. Potem

   $$\underline{\underline{\epsilon}}^{\mathrm{e}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{t}} - \frac{\nu}{E}\,\mathrm{sl}(\underline{\underline{t}})\underline{\underline{I}} = -\frac{1-2\nu}{E}p\underline{\underline{I}}.$$

   Iz dobljenih enačb potem sledi

   $$\alpha\Delta T = \frac{1-2\nu}{E}p$$

   in

   $$p = \frac{E}{1-2\nu}\alpha\Delta T = 3\kappa\alpha\Delta T,$$

   kjer je κ kompresibilni modul.

2. V togo kotanjo v obliki kvadra s kvadratno osnovno ploskvijo dimenzije $a \times a$ in dano višino h vložimo elastični kvader enakih dimenzij. Kvader segrejemo za ΔT.

   (a) Določi napetostno stanje.

   (b) Za koliko zgornja ploskev pogleda iz kotanje?

   (c) Kocko želimo potisniti nazaj v kotanjo. Določi silo.

   Rešitev:

   (a) Postavimo koordinatni sistem z osmi v smereh kvadra, os z pa naj bo v smeri stranice z dolžino h. Celotna deformacija je vsota elastične in termalne,

   $$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}}^{\mathrm{e}} + \alpha\Delta T.$$

   Ker je kotanja toga, je $0 = \epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{23} = \epsilon_{13} = \epsilon_{12}$ in ker je zgoraj odprta $0 = t_{33}$. Potem z uporabo Hookovega zakona sledi

   $$\begin{aligned} 0 = \epsilon_{11} &= \alpha\Delta T + \frac{1}{E}t_{11} - \frac{\nu}{E}t_{22}, \\ 0 = \epsilon_{22} &= \alpha\Delta T - \frac{\nu}{E}t_{11} + \frac{1}{E}t_{22}, \\ \epsilon_{33} &= \alpha\Delta T - \frac{\nu}{E}t_{11} - \frac{\nu}{E}t_{22}, \\ 0 = \epsilon_{23} &= \frac{1}{2G}t_{23}, \quad 0 = \epsilon_{13} = \frac{1}{2G}t_{13}, \quad 0 = \epsilon_{12} = \frac{1}{2G}t_{12}. \end{aligned}$$

   Sistem zgornjih treh enačb rešimo na t_{11}, t_{22} in ϵ_{33}. Rešitev je

   $$t_{11} = t_{22} = -\frac{\alpha\Delta T E}{1-\nu}$$

   in

   $$\epsilon_{33} = \frac{\alpha\Delta T(\nu+1)}{1-\nu}.$$

(b) Zgornja ploskev pogleda iz kotanje za

$$\Delta h = \epsilon_{33} h = \frac{\alpha h \Delta T(\nu + 1)}{1 - \nu}.$$

(c) Sedaj želimo kocko potisniti nazaj v kotanjo. Vemo, da se je v smeri osi z deformirala za $\epsilon = \Delta h/h$. Potisna sila $F = \sigma a^2 = E a^2 \Delta h/h$ kocko, ki je ob strani prosta, skrči za predpisan Δh. Vendar je kocka v kotanji, njene stranske ploskve niso proste, zato tako dobljena sila

$$F' = \frac{\alpha E a^2 \Delta T(\nu + 1)}{1 - \nu}$$

ni prava. Pravo silo dobimo z naslednjim razmislekom. Privzemimo, da kotanjo pred termalnim razteskom pokrijemo s pokrovom in na pokrov delujemo s silo, ki prepreči, da kocka po segretju pogleda iz kotanje. Ta sila je dejansko tista sila s katero kocko stisnemo nazaj v kotanjo. Naj bo torej kotanja zaprta. Potem je

$$\underline{\underline{0}} = \underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}}^{\mathrm{e}} + \alpha \Delta T.$$

oziroma

$$\begin{aligned}
0 = \epsilon_{11} &= \alpha \Delta T + \frac{1}{E} t_{11} - \frac{\nu}{E} t_{22} - \frac{\nu}{E} t_{33}, \\
0 = \epsilon_{22} &= \alpha \Delta T - \frac{\nu}{E} t_{11} + \frac{1}{E} t_{22} - \frac{\nu}{E} t_{33}, \\
0 = \epsilon_{33} &= \alpha \Delta T - \frac{\nu}{E} t_{11} - \frac{\nu}{E} t_{22} - \frac{1}{E} t_{33}, \\
0 = \epsilon_{23} &= \frac{1}{2G} t_{23}, \quad 0 = \epsilon_{13} = \frac{1}{2G} t_{13}, \quad 0 = \epsilon_{12} = \frac{1}{2G} t_{12}.
\end{aligned}$$

Sistem rešimo in dobimo

$$t_{11} = t_{22} = t_{33} = -\frac{\alpha \Delta T E}{1 - 2\nu}.$$

Sila s katero kocko nazaj potisnemo v kotanjo je tako enaka

$$F = \frac{\alpha E a^2 \Delta T}{1 - 2\nu}.$$

Vidimo, da je ta sila večja kot F', saj je

$$F - F' = \alpha E a^2 \Delta T \frac{2\nu^2}{(1 - \nu)(1 - 2\nu)}.$$

3. V togo kotanjo v obliki kvadra s kvadratno osnovno ploskvijo dimenzije $a \times a$ in dano višino h vložimo elastični kvader enakih dimenzij.

(a) Kvader potisnemo s silo F. Določi napetostno stanje in izračunaj za koliko se zgornja ploskev pogrezne v kotanjo.

(b) Za koliko moramo kvader nato segreti, da pogleda iz kotanje.

Rešitev:

(a) Postavimo koordinatni sistem z osmi v smereh kvadra, os z pa naj bo v smeri stranice z dolžino h. Ker je kotanja toga, je edina neničelna komponenta deformacijskega tenzorja

ϵ_{33}. Po drugi strani pa je v smeri osi z je podana napetost $t_{33} = -F/a^2$. Po Hookovem zakonu tako velja

$$
\begin{aligned}
0 = \epsilon_{11} &= \frac{1}{E}t_{11} - \frac{\nu}{E}t_{22} - \frac{\nu}{E}t_{33}, \\
0 = \epsilon_{22} &= -\frac{\nu}{E}t_{11} + \frac{1}{E}t_{22} - \frac{\nu}{E}t_{33}, \\
\epsilon_{33} &= -\frac{\nu}{E}t_{11} - \frac{\nu}{E}t_{22} + \frac{1}{E}t_{33}, \\
0 = \epsilon_{23} &= \frac{1}{2G}t_{23}, \quad 0 = \epsilon_{13} = \frac{1}{2G}t_{13}, \quad 0 = \epsilon_{12} = \frac{1}{2G}t_{12}.
\end{aligned}
$$

Strižne komponente napetostnega tenzorja so enake nič. Sistem rešimo še za t_{11} in t_{22}. Dobimo

$$
t_{11} = t_{22} = \frac{\nu}{1-\nu}t_{33} = -\frac{\nu F}{(1-\nu)a^2}.
$$

Potem je

$$
\epsilon_{33} = -\frac{(1-\nu-2\nu^2)F}{(1-\nu)Ea^2}.
$$

Zgornja ploskev se pogrezne za

$$
\Delta h = \frac{(1-\nu-2\nu^2)Fh}{(1-\nu)Ea^2}.
$$

(b) V drugem koraku pogreznjeni kvader segrejemo. Nova celotna deformacija je $\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}}^{\mathrm{e}} + \underline{\underline{\epsilon}}^{\mathrm{t}} = \underline{\underline{\epsilon}}^{\mathrm{e}} - \alpha\Delta T\underline{\underline{I}}$. Po Hookovem zakonu potem

$$
\underline{\underline{\epsilon}} = \alpha\Delta T\underline{\underline{I}} + \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{t}} - \frac{\nu}{E}\,\mathrm{sl}(\underline{\underline{t}})\underline{\underline{I}}.
$$

Tu je $\underline{\underline{t}}$ napetost v kvadru na drugem koraku. Komponenta deformacije je ϵ_{33} je enaka $\Delta h/h$, vse ostale pa so enake nič. Komponenta napetosti t_{33} pa je enaka nič, saj je v tem drugem delu naloge zgornji rob prost. Tako dobimo sistem

$$
\begin{aligned}
0 = \epsilon_{11} &= \alpha\Delta T + \frac{1}{E}t_{11} - \frac{\nu}{E}t_{22}, \\
0 = \epsilon_{22} &= \alpha\Delta T - \frac{\nu}{E}t_{11} + \frac{1}{E}t_{22}, \\
\frac{\Delta h}{h} = \epsilon_{33} &= \alpha\Delta T - \frac{\nu}{E}t_{11} - \frac{\nu}{E}t_{22}, \\
0 = \epsilon_{23} &= \frac{1}{2G}t_{23}, \quad 0 = \epsilon_{13} = \frac{1}{2G}t_{13}, \quad 0 = \epsilon_{12} = \frac{1}{2G}t_{12}.
\end{aligned}
$$

za neznane komponente napetostnega tenzorja in ΔT. Rešitev sistema je

$$
\begin{aligned}
t_{11} = t_{22} &= -\frac{\Delta h E}{h(1+\nu)}, \\
t_{23} = t_{13} &= t_{12} = 0, \\
\Delta T &= \frac{\Delta h(1-\nu)}{\alpha h(\nu+1)}.
\end{aligned}
$$

4. V togi matriki je elastični vključek v obliki kocke. Polovico kocke segrejemo za ΔT_1, drugo pa za ΔT_2.

   (a) Določi napetostno stanje.

(b) Izračunaj relativno spremembo volumna ene in druge polovice kocke.

Rešitev:

(a) Postavimo koordinatni sistem v smereh stranic kocke z izhodiščem v njenem središču. Privzemimo, da smo polovico kocke na negativni strani osi x segreli za ΔT_1, na pozitivni pa za ΔT_2. Deformacijo in napetost na negativni strani osi x oznaqčimo z $\underline{\underline{\epsilon}}_1$ in $\underline{\underline{t}}_1$ na desni pa z $\underline{\underline{\epsilon}}_2$ in $\underline{\underline{t}}_2$. Za obe polovici, $p = 1, 2$ velja

$$\begin{aligned}
\epsilon_{p,11} &= \frac{1}{E}t_{p,11} - \frac{\nu}{E}t_{p,22} - \frac{\nu}{E}t_{p,33} + \alpha_p\Delta T_p, \\
0 = \epsilon_{p,22} &= -\frac{\nu}{E}t_{p,11} + \frac{1}{E}t_{p,22} - \frac{\nu}{E}t_{p,33} + \alpha_p\Delta T_p, \\
0 = \epsilon_{p,33} &= -\frac{\nu}{E}t_{p,11} - \frac{\nu}{E}t_{p,22} + \frac{1}{E}t_{p,33} + \alpha_p\Delta T_p, \\
0 = \epsilon_{p,23} &= \frac{1}{2G}t_{p,23}, \quad 0 = \epsilon_{p,13} = \frac{1}{2G}t_{p,13}, \quad 0 = \epsilon_{p,12} = \frac{1}{2G}t_{p,12}.
\end{aligned}$$

Tu smo upoštevali, da se koti ohranijo, in da se mejna ploskev med polovicama zaradi različne temperature pomakne, zato $\epsilon_{p,11} \neq 0$. Iz enačb vidimo, da so vsi izvendiagonalni elementi enaki nič. Upoštevajmo, da se celotni volumen kocke ne spremeni. Potem

$$0 = \mathrm{sl}\left(\underline{\underline{\epsilon}}_1\right) + \mathrm{sl}\left(\underline{\underline{\epsilon}}_2\right) = \epsilon_{1,11} + \epsilon_{2,11}.$$

Nadalje je mejna ploskev v ravnovesju. Velja

$$\underline{\underline{t}}_1 \cdot \vec{\imath} = \underline{\underline{t}}_2 \cdot \vec{\imath}$$

oziroma $t_{1,11} = t_{2,11}$.
Dobili smo sistem enačb za neznanke $\epsilon_{p,11}$, $t_{p,11}$, $t_{p,22}$,$t_{p,33}$ za $p = 1, 2$. Iz simetrije naloge sledi $t_{p,22} = t_{p,33}$. Upoštevjmo še zadnji dve enačbi. Prvotni sistem je tako sistem za neznanke $\epsilon_{1,11}$, $t_{1,11}$, $t_{1,22}$,$t_{1,33}$. Rešitev sistema je

$$\begin{aligned}
t_{1,11} = t_{2,11} &= -\frac{\alpha\left(\Delta T_1 + \Delta T_2\right)E}{2(1-2\nu)}, \\
t_{1,22} = t_{1,33} &= \frac{\alpha E\left(\Delta T_1(3\nu-2) - \Delta T_2\nu\right)}{2(1-2\nu)(1-\nu)}, \\
t_{2,22} = t_{2,33} &= \frac{\alpha E\left(\Delta T_2(3\nu-2) - \Delta T_1\nu\right)}{2(1-2\nu)(1-\nu)}, \\
\epsilon_{1,11} = -\epsilon_{2,11} &= -\frac{\alpha\left(\Delta T_1 - \Delta T_2\right)(\nu+1)}{2(\nu-1)}.
\end{aligned}$$

V primeru $\Delta T_1 = \Delta T_2$ dobimo dobro znano rešitev.

(b) Relativni spremembi volumna sta $\epsilon_{1,11}$ in $\epsilon_{2,11}$ in sta podani z zgornjo rešitev. Vidimo, da se volumen ene polovice zmanjša, druge pa poveča.

11.2.2 Dodatne naloge

1. V togi matriki je elastični vključek v obliki kvadra. Kvader segrejemo za ΔT. Določi napetostno stanje.

Rešitev: $t_{11} = t_{22} = t_{33} = -\frac{\alpha E\Delta T}{1-2\nu}$, $t_{12} = t_{13} = t_{23} = 0$.

2. V togi matriki je kompozitni elastični vključek v obliki kocke. Ena polovica ima koeficient termalnega razteska α_1, druga pa α_2. Kocko segrejemo za ΔT. Določi napetostno stanje.

Rešitev:

$$
\begin{aligned}
t_{1,11} = t_{2,11} &= -\frac{(\alpha_1 + \alpha_2)\, E \Delta T}{2(1-2\nu)}, \\
t_{1,22} = t_{1,33} &= \frac{\Delta T\, (\alpha_1(3\nu - 2) - \alpha_2 \nu)\, E}{2(1-2\nu)(1-\nu)}, \\
t_{2,22} = t_{2,33} &= -\frac{\Delta T\, (\alpha_1 \nu + \alpha_2(2 - 3\nu))\, E}{2(1-2\nu)(1-\nu)}, \\
\epsilon_{1,11} = -\epsilon_{2,11} &= -\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)\, \Delta T(\nu + 1)}{2(\nu - 1)}.
\end{aligned}
$$

Poglavje 12

Upogib Nosilca

12.1 Upogib nosilca

12.1.1 Rešene naloge

1. Konzolno vpeti nosilec dolžine 50 cm je linijsko obremenjen s konstantno gostoto $q_0 = 50\,\mathrm{kN/m}$. Nosilec je tankostenski s krožnim presekom polmera $R = 2\,\mathrm{cm}$ in debelino stene $t = 2\,\mathrm{mm}$, Youngov modul pa je $E = 120\,\mathrm{GPa}$.

   (a) Izračunaj ploskovni moment preseka.

   (b) Določi upogib nosilca.

   (c) Kolikšen je največji upogib?

   Rešitev:

   (a) Ploskovni moment je $I = \frac{\pi}{4}\left(R^4 - (R-t)^4\right) \doteq \pi t R^3 = 16\pi 10^{-8}\mathrm{m}^4 = 50.2710^{-8}\mathrm{m}^4$.

   (b) Enačba upogiba je $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = q_0$. Po štirih integracijah dobimo

   $$w = \frac{q_0}{24EI}x^4 + \frac{1}{6}C_1x^3 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4.$$

   Robni pogoji so $w(0) = 0$, $w'(0) = 0$ na levem krajišču in $w''(l) = 0$, $w'''(l) = 0$ na desnem krajišču. Rešitev je

   $$w = \frac{q_0 l^2 x^2}{24EI}\left(\frac{x^2}{l^2} - 4\frac{x}{l} + 6\right).$$

   (c) Upogib na prostem koncu je

   $$w_{\max} = \frac{q_0 l^4}{8EI} \doteq 6.5\,\mathrm{cm}.$$

2. Enostavno podprt vodoravni nosilec dolžine $l = 2\,\mathrm{m}$ je enakomerno obremenjen s konstantno linijsko obremenitvijo q_0. Nosilec je votel s tankoslojnim kvadratnim presekom debeline $t = 5\,\mathrm{mm}$ in površino praznine $A = 1\,\mathrm{cm}^2$, Youngov modul pa je $E = 120\,\mathrm{GPa}$.

   (a) Skiciraj potek prečne sile in upogibnega momenta. Določi vrednost maksimalnega upogibnega momenta.

(b) Določi dopustno linijsko obremenitev q_0, da bo osna napetost v nosilcu po absolutni vrednosti manjša od $\sigma_0 = 120\,\mathrm{MPa}$.

(c) Izračunaj maksimalni upogib nosilca.

Rešitev:

(a) Rezultanta obremenitve nosilca ima velikost lq_0 s prijemališčem na sredini nosilca. Potem $A = B = \frac{1}{2}lq_0$, kjer sta A in B vertikalni sili podpor. Nadalje je $\frac{dQ}{dx} = -q_0$ in tako $Q = -q_0x + C$. Ker je prečna sila v levi podpori enaka sili leve podpore je $Q(x=0) = \frac{1}{2}lq_0$ in tako $Q = -q_0x + \frac{1}{2}lq_0$. Za upogibni moment velja $\frac{dM}{dx} = Q$ in od tod $M = \frac{1}{2}q_0x(l-x)$, saj je $M(0) = M(l) = 0$. Upogibni moment je očitno največji na

Slika 12.1: Potek prečne sile in upogibnega momenta.

sredini in tako $M_{\mathrm{max}} = \frac{q_0l^2}{8}$.

(b) Uporabili bomo formulo $\sigma = \frac{M}{I}z$, kjer je I ploskovni moment preseka nosilca. Označimo z a dolžino stranice notranjega kvadrata, z b pa zunanjega. Očitno je $a = 1\,\mathrm{cm}$. Velja $b = a + t$, kjer je t debelina nosilca. Potem $b = 2\,\mathrm{cm}$ in

$$I = \frac{1}{12}b^4 - \frac{1}{12}a^4 = \frac{15}{12}\mathrm{cm}^4.$$

Napetost je exstremalna na robu, pri $z = \pm\frac{b}{2} = \pm 1\,\mathrm{cm}$. Tako dobimo neenakost

$$\frac{q_0l^2 12}{8 \cdot 15\mathrm{cm}^3} \leq \sigma_0.$$

Potem

$$q_0 \leq \frac{10\sigma_0\mathrm{cm}^3}{l^2} = 300\,\mathrm{N/m}.$$

(c) Upogib nosilca dobimo iz enačbe $EIw^{(}4) = q_0$. Potem je

$$w = \frac{1}{24}\frac{q_0}{EI}x^4 + \frac{1}{6}C_1x^3 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4.$$

Iz robnih pogojev $w(0) = w(l) = 0$ in $w''(0) = w''(l) = 0$ sledi $C_2 = C_4 = 0$ in

$$C_1 = -\frac{q_0l}{2EI}, \qquad C_3 = \frac{q_0l^3}{24EI}.$$

Potem

$$w = \frac{q_0}{24EI}\left(x^4 - 2x^3l + l^3x\right).$$

Upogib je največji na sredini in je enak

$$w_{\mathrm{max}} = \frac{5q_0l^4}{384EI}.$$

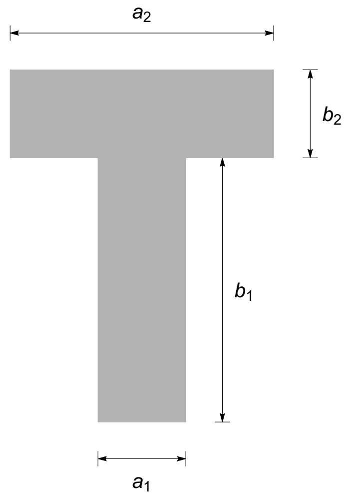
Za maksimalno dopustno linijsko obremenitev je $w_{\mathrm{max}} = \frac{1}{24}\mathrm{m} \doteq 41.6\,\mathrm{mm}$.

3. Enostavno podprt T nosilec dolžine $l = 1\text{m}$ je točkovno obremenjen v navpični smeri pri $x_1 = l/4$, $x_2 = l/2$ in $x_3 = 3l/4$ s silami $F_1 = F_0$, $F_2 = 2F_0$ in $F_3 = -F_0$. Dimenzija preseka so, glej skico, $a_1 = 1\,\text{cm}$, $a_2 = 3\,\text{cm}$, $b_1 = 2\,\text{cm}$ in $b_2 = 1\,\text{cm}$.

   (a) Skiciraj potek prečne sile in upogibnega momenta.

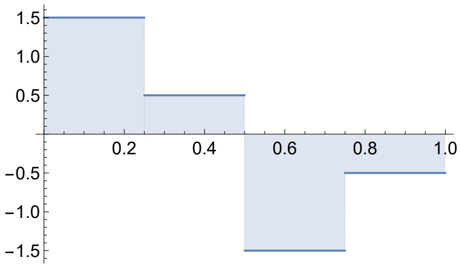
   (b) Določi središče preseka in njegov ploskovni moment drugega reda I.

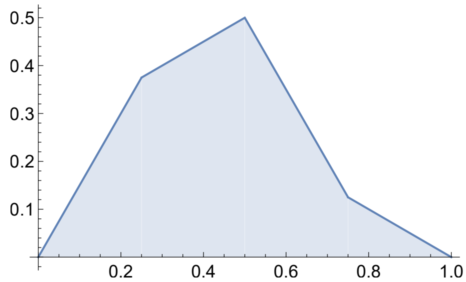
   (c) Določi F_0 tako, da bo maksimalna natezna napetost nosilca manjša od $\sigma_0 = 120\,\text{MPa}$.



Rešitev:

(a) Prvo določimo sili podpor. Označimo levo z A, desno z B. Iz ravnovesnih enačb dobimo $A = 3F_0/2$ in $B = F_0/2$. Skici poteka prečne sile in upogibnega momenta sta:





Slika 12.2: Potek prečne sile in upogibnega momenta.

(b) T nosilec je sestavljen iz dve pravokotnikov. Določimo prvo masno središče. Postavimo pomožni koordinatni sistem z izhodiščem na vrhu T nosilca. Koordinati masnega središča sta potem $z_1 = b_2 + \frac{1}{2}b_1 = 2\,\text{cm}$ in $z_2 = \frac{1}{2}b_2 = 1/2\,\text{cm}$. Ploščini sta $A_1 = a_1 b_1 = 2\,\text{cm}^2$ in $A_2 = a_2 b_2 = 3\,\text{cm}^2$. Potem je masno sredisče

$$z_0 = \frac{1}{A_1 + A_2}(z_1 A_1 + z_2 A_2) = \frac{11}{10}\text{cm}.$$

Postavimo sedaj izhodišče koordinatnega sistema v izračunano masno središče. Novi koordinati masnih središč pravokotnikov sta $z_1^* = 9/10\,\text{cm}$ in $z_2^* = -3/5\,\text{cm}$. Ploskovni moment je potem

$$I = \frac{1}{12}(a_1 b_1^3 + a_2 b_2^3) + A_1 (z_1^*)^2 + A_2 (z_2^*)^2 = \left(\frac{1}{12}(3+8) + \frac{27}{25} + \frac{81}{50}\right)\text{cm}^4 = \frac{217}{60}\text{cm}^4.$$

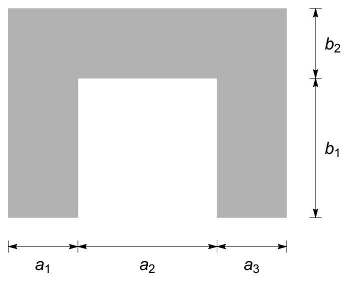
(c) Dopustno silo F_0 določa neenakost

$$\frac{M}{I} z \leq \sigma_0.$$

Maksimalni upogibni moment je $M = \frac{1}{2} l F_0$, napetost pa je natezna na spodnjem delu preseka, zato $z = 19/10$cm. Potem

$$F_0 \leq \frac{2I\sigma_0}{lz} = \frac{8680}{19}\mathrm{N} \doteq 457\,\mathrm{N}.$$

4. Enostavno podprt U nosilec dolžine $l = 1$m je linijsko obremenjen s konstantno obremenitvijo q_0. Dimenzija preseka so, glej skico, $a_1 = 1\,\mathrm{cm}$, $a_2 = 2\,\mathrm{cm}$, $a_3 = 1\,\mathrm{cm}$, $b_1 = 2\,\mathrm{cm}$ in $b_2 = 1\,\mathrm{cm}$.



   (a) Skiciraj potek prečne sile in upogibnega momenta.

   (b) Določi središče preseka in njegov ploskovni moment I.

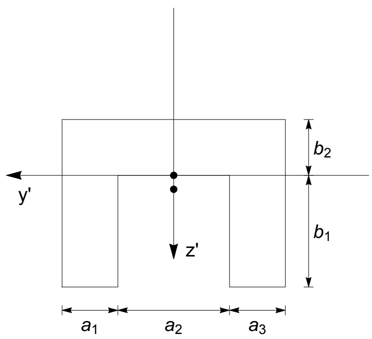
   (c) Določi dopustno obremenitev q_0 tako, da natezna napetost ne bo presegla vrednosti $\sigma_0 = 180\,\mathrm{MPa}$.

Rešitev:

(a) Prvo izračunamo sile podpor, levo označimo z A, desno z B. Iz simetrije problema sledi $A = B$. Vsota vseh sil je $q_0 l$, potem $A = B = \frac{1}{2} q_0 l$. Potek prečne sile in upogibnega momenta je dan na sliki. Maksimalni upogibni moment je $M_{\max} = \frac{l}{8} q_0 l^2$.

Slika 12.3: Brezdimenzijski potek prečne sile in upogibnega momenta ($l = 1, q_0 = 1$).

(b) Presek je sestavljen iz treh pravokotnikov, A_1 pravokotnik $a_1 \times b_1$, A_2 pravokotnik $a_3 \times b_1$ in A_3 pravokotnik $(a_1 + a_2 + a_3) \times b_2$. Postavimo pomožni koordiantni sistem $y'z'$ tako kot kaže skica. Očitno je središče na osi z'. Koordinato z'_* določimo po formuli



$$z'_* = \frac{1}{A_1 + A_2 + A_3}\left(A_1 z'_{1*} + A_2 z'_{2*} + A_3 z'_{3*}\right).$$

Izračunamo posebej $A_1 = a_1 \times b_1 = 2\,\mathrm{cm}^2$, $A_2 = a_3 \times b_1 = 2\,\mathrm{cm}^2$, $A_3 = (a_1 + a_2 + a_3) \times b_2 = 4\,\mathrm{cm}^2$ in $z'_{1*} = 1\,\mathrm{cm}$, $z'_{2*} = 1\,\mathrm{cm}$ in $z'_{3*} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{cm}$. Potem

$$z'_* = \frac{1}{8}(2 \times 1 + 2 \times 1 - 4 \times \frac{1}{2})\,\mathrm{cm} = \frac{1}{4}\,\mathrm{cm}.$$

V koordinatnem sistemu yz, ki ima izhodišče v središčni točki preseka imajo pomožni pravokotniki z koordinato središč $z_{1*} = \frac{3}{4}\,\mathrm{cm}$, $z_{2*} = \frac{3}{4}\,\mathrm{cm}$ in $z_{3*} = -\frac{3}{4}\,\mathrm{cm}$. Ploskovni moment preseka je potem

$$I = z_{1*}^2 A_1 + \frac{1}{12} a_1 b_1^3 + z_{2*}^2 A_2 + \frac{1}{12} a_3 b_1^3 + z_{3*}^2 A_3 + \frac{1}{12}(a_1 + a_2 + a_3) b_2^3.$$

Vstavimo podatke in dobimo $I = \frac{37}{6}\,\mathrm{cm}^4$.

(c) Maksimalnemu upogibnemu momentu pripada maksimalna osna napetost $\sigma_{\max}$. Veljati mora

$$\sigma_0 \geq \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I} z_{\max},$$

kjer je $z_{\max}$ koordinata na vrhu nosilca, kjer je natezna napetost največja. Po predhodnen izračunu je $z_{\max} = \frac{5}{4}$, cm. Tako dobimo

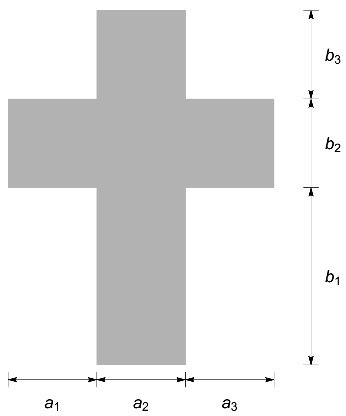
$$q_0 \leq \frac{8 I \sigma_0}{l^2 z_{\max}} = 71\,\mathrm{N/m}.$$

5. Enostavno podprt nosilec s presekom v obliki križa dolžine $l = 1$m je točkovno obremenjen v navpični smeri pri $x_1 = \frac{1}{2} l$ in $x_2 = \frac{3}{4} l$ s silama $F_1 = F_0$ in $F_2 = 2F_0$. Dimenzija preseka so, glej skico $a_1 = a_2 = a_3 = 1\,\mathrm{cm}$, $b_1 = 2\,\mathrm{cm}$, $b_2 = b_3 = 1\,\mathrm{cm}$.

   (a) Skiciraj potek prečne sile in upogibnega momenta. Kolikšna je maksimalna vrednost upogibnega momenta?

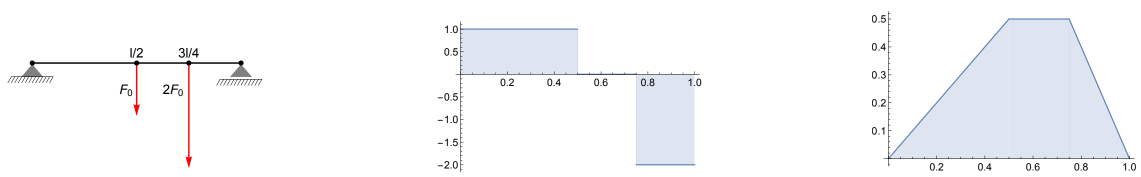
   (b) Določi središče preseka in njegov ploskovni moment I.

   (c) Določi dopustno obremenitev F_0 tako, da bo maksimalna napetost manjša od $\sigma_{\max} = 120\,\mathrm{MPa}$.



Rešitev:

(a) Skica obremenitve s potekom prečne sile in upogibnega momenta je podana na spodnji sliki. Za potek prečne sile, ki je odsekoma konstantna prvo izračunamo sile podpor. Imamo enačbi ravnovesja momentov v podporah. Torej $\frac{l}{4} \times 2F_0 + \frac{l}{2} \times F_0 = lA$ in $\frac{l}{2} F_0 + \frac{3l}{4} \times 2F_0 = lB$. Tako dobimo $A = F_0$ in $B = 2F_0$. Za potek momenta M upoštevamo, da je $\frac{dM}{dx} = Q$. Od tod sledi, da je maksimalen upogibni moment enak $M_{\max} = \frac{l}{2} F_0$.



Slika 12.4: Točkovno obremenjen nosilec s potekom prečne sile in upogibnega momenta.

(b) Križ je sestavljen iz treh pravokotnikov, pokončnega dimenzije $a_2 \times (b_1 + b_2 + b_3)$ in dveh krakov dimenzije $a_1 \times b_2$ oziroma $a_3 \times b_2$. Postavimo koordinatni sistem v središče preseka krakov in pokončnega dela. Očitno $x_* = 0$, za y_* pa velja formula

$$y_* = \frac{1}{A_1 + A_2 + A_3}\left(A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3\right),$$

kjer je $A_1 = 4\,\mathrm{cm}^2$ površina pokončnega dela, $A_2 = A_3 = 1\,\mathrm{cm}^2$ pa površini krakov. Nadalje $y_1 = -\frac{1}{2}\mathrm{cm}$ in $y_2 = y_3 = 0$. Tako dobimo $y_* = -\frac{1}{3}\mathrm{cm}$. Ploskovni moment dobimo po formuli

$$I = \frac{1}{12}a_2(b_1 + b_2 + b_3)^3 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)^2 \mathrm{cm}^2 A_1 + 2\left(\frac{1}{12}a_1 b_2^3 + \left(\frac{1}{3}\mathrm{cm}\right)^2 A_2\right).$$

Tu smo upoštevali simetrijo levega in desnega kraka. Tako dobimo

$$I = \frac{35}{6}\mathrm{cm}^4.$$

(c) Vsavimo dobljeno v formulo $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} z_{\max}}{I}$, kjer je $z_{\max}$ maksimalna oddaljenost od centralne osi do roba preseka nosilca v smeri obremenitve, torej $z_{\max} = (2+\frac{1}{3})\mathrm{cm} = \frac{7}{3}\mathrm{cm}$. Vstavimo izračunane vrednosti v formulo. Tako dobimo

$$120\,\mathrm{MPa} = \frac{F_0}{2}\mathrm{m} \times \frac{6}{35} \times 10^8 \mathrm{m}^{-4} \times \frac{7}{3}10^{-2}\mathrm{m}.$$

Tako dobimo $F_0 \leq 600\,\mathrm{N}$.

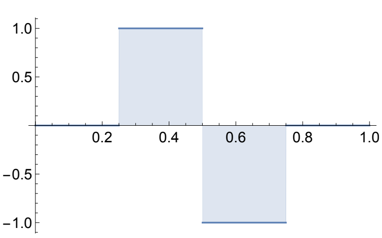
6. Enostavno podprt vodoravni nosilec dolžine $l = 1\,\mathrm{m}$ je v vertikalni smeri točkovno obremenjen pri $x_1 = \frac{l}{4}$, $x_2 = \frac{l}{2}$ in $x_3 = \frac{3l}{4}$ s silami $F_1 = -F_0$, $F_2 = 2F_0$ in $F_3 = -F_0$.

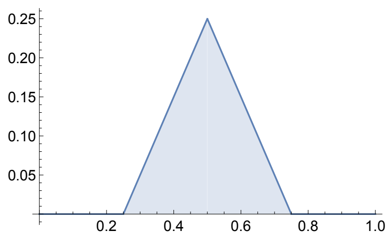
   (a) Skiciraj potek prečne sile in upogibnega momenta. Določi vrednost maksimalnega upogibnega momenta.

   (b) Nosilec je votel s kvadratnim presekom dimenzij $2\,\mathrm{cm} \times 3\,\mathrm{cm}$. Določi pogoj na velikost sile F_0 tako, da bo osna napetost v nosilcu manjša od $\sigma_0 = 120\,\mathrm{MPa}$.

Rešitev:

(a) Prvo izračunamo sile podpor, levo označimo z A, desno z B. Iz simetrije problema sledi $A = B$. Vsota vseh sil je nič, potem $A = B = 0$. Potek prečne sile in upogibnega momenta je dan na sliki. Maksimalni upogibni moment je $M_{\max} = \frac{l}{4}F_0$.





Slika 12.5: Potek prečne sile in upogibnega momenta.

(b) Ploskovni moment pravokotnika dimenzije $a \times b$ je

$$I = \int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2} y^2\,dy = 2a\int_{-b/2}^{b/2} y^2\,dy = \frac{1}{12}ab^3 = \frac{9}{2}\mathrm{cm}^4.$$

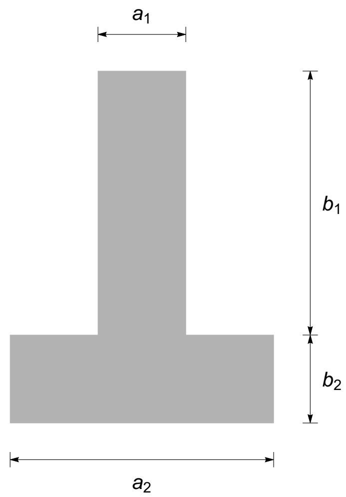
Osna napetost je dana s formulo $\sigma = \frac{M}{I} z$. Veljati mora pogoj

$$\frac{M_{\max}}{I} z_{\max} \leq \sigma_0.$$

Ker je $z_{\max} = \frac{a}{2}$ in $M_{\max} = \frac{l}{4} F_0$, dobimo od tod neenačbo

$$F_0 \leq \frac{8I\sigma_0}{la} = 2.16\,\mathrm{kN}.$$

7. Enostavno podprt T nosilec dolžine $l = 1\mathrm{m}$ je točkovno obremenjen v navpični smeri pri $x_1 = l/4$, $x_2 = l/2$ in $x_3 = 3l/4$ s silami $F_1 = 2F_0$, $F_2 = F_0$ in $F_3 = -F_0$. Dimenzija preseka so, glej skico, $a_1 = 1\,\mathrm{cm}$, $a_2 = 3\,\mathrm{cm}$, $b_1 = 2\,\mathrm{cm}$ in $b_2 = 1\,\mathrm{cm}$.



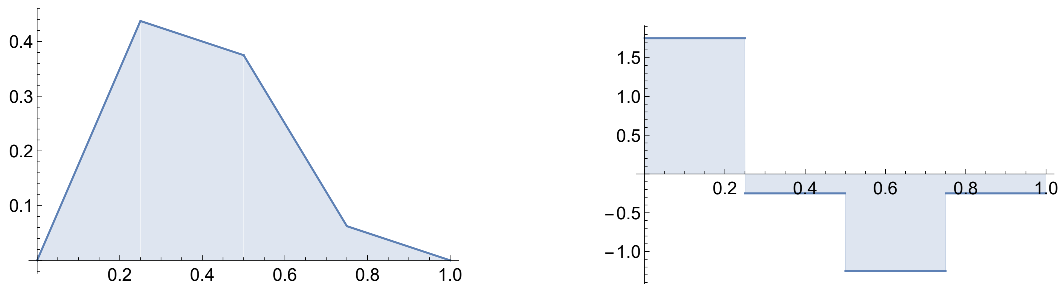
   (a) Skiciraj potek prečne sile in upogibnega momenta.

   (b) Določi središče preseka in njegov ploskovni moment drugega reda I.

   (c) Določi F_0 tako, da bo maksimalna natezna napetost nosilca manjša od $\sigma_0 = 120\,\mathrm{MPa}$.

Rešitev:

(a) Prvo določimo sili podpor. Označimo levo z A, desno z B. Iz ravnovesnih enačb dobimo $A = 7F_0/4$ in $B = F_0/4$. Skici poteka prečne sile in upogibnega momenta sta:



Slika 12.6: Potek prečne sile in upogibnega momenta.

(b) T nosilec je sestavljen iz dve pravokotnikov. Določimo prvo masno središče. Postavimo pomožni koordinatni sistem z izhodiščem na dnu T nosilca. Koordinati masnega središča sta potem $z_1 = b_2 + \frac{1}{2}b_1 = 2\,\mathrm{cm}$ in $z_2 = \frac{1}{2}b_2 = 1/2\,\mathrm{cm}$. Ploščini sta $A_1 = a_1 b_1 = 2\,\mathrm{cm}^2$ in $A_2 = a_2 b_2 = 3\,\mathrm{cm}^2$. Potem je masno središce

$$z_0 = \frac{1}{A_1 + A_2}(z_1 A_1 + z_2 A_2) = \frac{11}{10}\mathrm{cm}.$$

Postavimo sedaj izhodišče koordinatnega sistema v izračunano masno središče. Novi koordinati masnih središč pravokotnikov sta $z_1^* = 9/10\,\mathrm{cm}$ in $z_2^* = -3/5\,\mathrm{cm}$. Ploskovni moment je potem

$$I = \frac{1}{12}(a_1 b_1^3 + a_2 b_2^3) + A_1 (z_1^*)^2 + A_2 (z_2^*)^2 = \left(\frac{1}{12}(3+8) + \frac{27}{25} + \frac{81}{50} \right) \mathrm{cm}^4 = \frac{217}{60} \mathrm{cm}^4.$$

(c) Dopustno silo F_0 določa neenakost

$$\frac{M}{I} z \leq \sigma_0.$$

Maksimalni upogibni moment je $M = Al/4 = 7F_0/16$, napetost pa je natezna na spodnjem delu preseka, zato $z = 11/10\mathrm{cm}$. Potem

$$F_0 \leq \frac{16 I \sigma_0}{7lz} = \frac{9920}{11} \mathrm{N} \doteq 902\,\mathrm{N}.$$