1. Izpit iz Osnov mehanike: 13. junij 2017

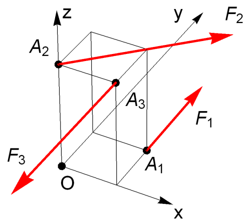
1. Za prostorski sistem sil podan na sliki s silami v smereh stranic in diagonale kvadra dimenzije $1\,\mathrm{m} \times 1\,\mathrm{m} \times 2\,\mathrm{m}$:

   (a) določi sile in njihova prijemališča;

   (b) izračunaj rezultanto sil in navora glede na pol v koordiantnem izhodišču O;

   (c) ali ima sistem sil skupno prijemališče?

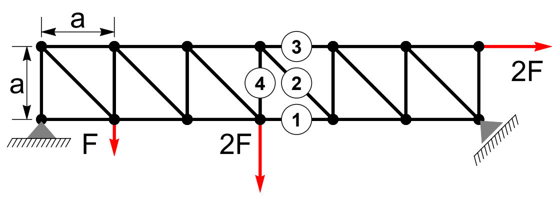
   Velikosti sil so $F_1 = 1\,\mathrm{kN}$, $F_2 = 2\sqrt{2}\mathrm{kN}$, $F_3 = 3\,\mathrm{kN}$.



2. Za podano paličje na sliki, desna podpora je drsna pod kotom $\pi/4$:

   (a) določi sile v podporah;

   (b) izračunaj označene sile palic.



3. Ravninska deformacija deformira pravokotnik dimenzije $2\,\mathrm{cm} \times 1\,\mathrm{cm}$ v romboid dimenzije $2.02\,\mathrm{cm} \times 0.99\,\mathrm{cm}$ z diagonalo, ki je za $\frac{7}{100\sqrt{5}}$ cm daljša od prvotne diagonale pravokotnika.

   (a) Določi deformacijski tenzor.

   (b) Izračunaj ekstremalni osni deformaciji in skiciraj Mohrovo krožnico. V kateri smeri je osna deformacija največja?

   (c) Za izotropični material z $\nu = 1/5$ in $E = 120\,\mathrm{GPa}$ z uporabo Hookovega zakona določi pripadajoči napetostni tenzor. Tu upoštevaj, da je

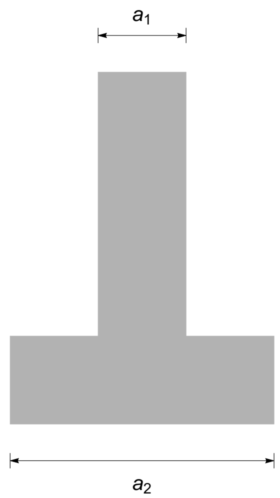
$$\underline{\underline{t}} = \frac{E}{1+\nu}\,\underline{\underline{\epsilon}} + \frac{\nu E\,\mathrm{sl}\left(\underline{\underline{\epsilon}}\right)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\,\underline{\underline{I}}.$$

4. Enostavno podprt T nosilec dolžine $l = 1\mathrm{m}$ je točkovno obremenjen v navpični smeri pri $x_1 = l/4$, $x_2 = l/2$ in $x_3 = 3l/4$ s silami $F_1 = 2F_0$, $F_2 = F_0$ in $F_3 = -F_0$. Dimenzija preseka so, glej skico, $a_1 = 1\,\mathrm{cm}$, $a_2 = 3\,\mathrm{cm}$, $b_1 = 2\,\mathrm{cm}$ in $b_2 = 1\,\mathrm{cm}$.

   (a) Skiciraj potek prečne sile in upogibnega momenta.

   (b) Določi središče preseka in njegov ploskovni moment drugega reda I.

   (c) Določi F_0 tako, da bo maksimalna natezna napetost nosilca manjša od $\sigma_0 = 120\,\mathrm{MPa}$.



Rešitve

1. (a) Primejališča sil so $A_1(1,1,0)$, $A_2(0,0,2)$ in $A_3(1,0,2)$, sile pa so $\vec{F}_1 = F_1\vec{\jmath}$, $\vec{F}_2 = F_2(\vec{\imath}+\vec{\jmath})/\sqrt{2}$ in $\vec{F}_3 = -F_3\vec{\jmath}$.

   (b) Rezultanta je
$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 2\,\mathrm{kN}\vec{\imath}.$$
   Momenti so
$$\vec{OA}_1 \times \vec{F}_1 = \vec{k}\mathrm{kNm}, \quad \vec{OA}_2 \times \vec{F}_2 = (-\vec{\imath}+\vec{\jmath})4\,\mathrm{kNm}, \quad \vec{OA}_3 \times \vec{F}_3 = (2\vec{\imath}-\vec{k})3\,\mathrm{kNm}$$
   in tako
$$\vec{N} = \sum_{i=1}^{3} \vec{OA}_i \times \vec{F}_i = (2\vec{\imath}+4\vec{\jmath}-2\vec{k})\mathrm{kNm}.$$

   (c) Ker je $\vec{R}\cdot\vec{N} = 8\,(\mathrm{kN})^2\mathrm{m} \neq 0$, sistem nima skupnega prijemališča. Izračunajmo še os sistema. Dobimo jo po formuli
$$\vec{OP}_0 = \frac{\vec{R}\times\vec{N}}{\vec{R}\cdot\vec{R}} = (\vec{\jmath}+2\vec{k})\mathrm{kN}.$$

2. (a) Silo desne podpore zapišemo v obliki $\vec{B} = B(-\vec{\imath}+\vec{\jmath})/\sqrt{2}$, sila leve podpore pa je $\vec{A} = A_1\vec{\imath}+A_2\vec{\jmath}$. Momentna enačba s polom v levi podpori se glasi
$$-aF - 6aF + \frac{6aB}{\sqrt{2}} - 2aF = 0 \Rightarrow B = \frac{3F}{\sqrt{2}},$$
   momentna enačba s polom v desni podpori pa
$$-6aA_2 + 5aF + 6aF - 2aF = 0 \Rightarrow A_2 = \frac{3F}{2}.$$
   Ravnovesna enačba sil v vodoravni smeri je
$$A_1 - \frac{B}{\sqrt{2}} + 2F = 0 \Rightarrow A_1 = -\frac{F}{2}.$$

   (b) Sile palic 1,2 in 3 dobimo s prerezno metodo. Zapišimo ravnovesne pogoje za desni del paličja. Ravnovesje momentov s polom v presečišču palice 2 in 3 je
$$aF_1 + 2aF + aA_1 - 3aA_2 \Rightarrow F_1 = 3F.$$
   Ravnovesje momentov s polom v presečišču palice 1 in 2 je
$$-aF_3 + 3aF + 2aF - 4aA_2 \Rightarrow F_3 = -F.$$
   Iz ravnovesja sil v navpični smeri potem sledi
$$F_2 = -\frac{3F}{\sqrt{2}}.$$
   Sedaj, ko poznamo v presečišču palice 2 in 3 sili F_2 in F_3 lahko določimo tudi F_4.
$$F_4 + \frac{1}{\sqrt{2}}F_2 = 0 \Rightarrow F_4 = -\frac{3F}{2}.$$

3. (a) Postavimo koordinatni sistem v smeri stranic pravokotnika in izračunajmo osni deformaciji. $\epsilon_{11} = \frac{\Delta a}{a} = 0.001 = 1/100$ in $\epsilon_{22} = \frac{\Delta b}{b} = -0.001 = -1/100$. Za izračun ϵ_{12} bomo upoštevali deformacijo v smeri diagonale, ki je

$$\epsilon_d = \frac{d + \Delta d - d}{d} = \frac{7}{500}.$$

Uporabimo sedaj formulo

$$\epsilon_d = \frac{1}{2}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + \frac{1}{2}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22}) \cos 2\varphi + \epsilon_{12} \sin 2\varphi,$$

kjer je φ kot med osjo x in diagonalo pravokotnika. Potem $\cos\varphi = 2/\sqrt{5}$ in $\sin\varphi = 1/\sqrt{5}$. Od tod $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = 3/5$ in $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi = 4/5$. Tako dobimo enačbo

$$\frac{7}{500} = 0 + \frac{3}{500} + \epsilon_{12}\frac{4}{5}$$

in od tod $\epsilon_{12} = 1/100 = 0.001$. Deformacijski tenzor je tako enak

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} 10^{-2}.$$

(b) Ekstremalni deformaciji sta po formuli

$$\epsilon_{\text{ext}} = \frac{1}{2}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})\right)^2 + \epsilon_{12}^2}$$

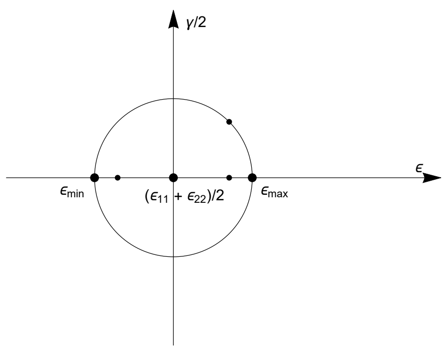
enaki

$$\epsilon_{\max} = \frac{1}{50\sqrt{2}} \doteq 0.0141 \quad \epsilon_{\min} = -\frac{1}{50\sqrt{2}} \doteq -0.0141.$$

Smer maksimalne osne deformacije dobimo po formuli

$$\tan 2\varphi = \frac{2\epsilon_{12}}{\epsilon_{11} - \epsilon_{22}} = 1.$$

Potem $\varphi = \pi/8 = 22.5°$. Iz skice Mohrove krožnice vidimo, da je to smer ekstremalne osne deformacije.



Slika 1: Slika Mohrove krožnice.

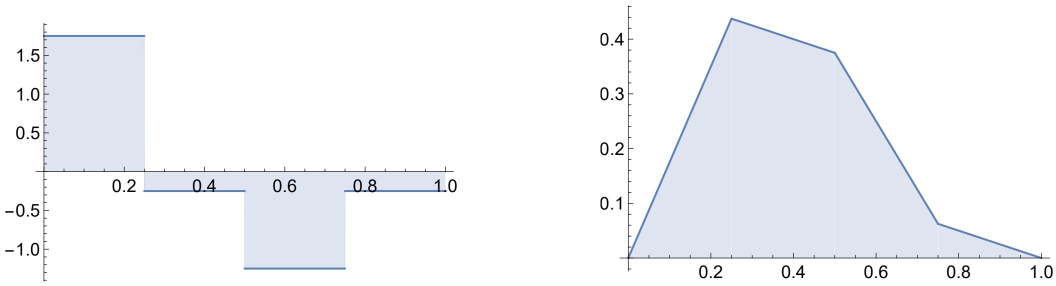
(c) Izračunajmo prvo Lamejeva koeficienta

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = 50\,\mathrm{GPa} \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 100/3\,\mathrm{GPa}.$$

Potem

$$\underline{\underline{t}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathrm{GPa}.$$

4. (a) Prvo določimo sili podpor. Označimo levo z A, desno z B. Iz ravnovesnih enačb dobimo $A = 7F_0/4$ in $B = F_0/4$. Skici poteka prečne sile in upogibnega momenta sta:



Slika 2: Potek prečne sile in upogibnega momenta.

(b) T nosilec je sestavljen iz dve pravokotnikov. Določimo prvo masno središče. Postavimo pomožni koordinatni sistem z izhodiščem na dnu T nosilca. Koordinati masnega središča sta potem $z_1 = b_2 + \frac{1}{2}b_1 = 2\,\mathrm{cm}$ in $z_2 = \frac{1}{2}b_2 = 1/2\,\mathrm{cm}$. Ploščini sta $A_1 = a_1 b_1 = 2\,\mathrm{cm}^2$ in $A_2 = a_2 b_2 = 3\,\mathrm{cm}^2$. Potem je masno središce

$$z_0 = \frac{1}{A_1 + A_2}(z_1 A_1 + z_2 A_2) = \frac{11}{10}\mathrm{cm}.$$

Postavimo sedaj izhodišče koordinatnega sistema v izračunano masno središče. Novi koordinati masnih središč pravokotnikov sta $z_1^* = 9/10\,\mathrm{cm}$ in $z_2^* = -3/5\,\mathrm{cm}$. Ploskovni moment je potem

$$I = \frac{1}{12}(a_1 b_1^3 + a_2 b_2^3) + A_1 (z_1^*)^2 + A_2 (z_2^*)^2 = \left(\frac{1}{12}(3+8) + \frac{27}{25} + \frac{81}{50} \right) \mathrm{cm}^4 = \frac{217}{60}\mathrm{cm}^4.$$

(c) Dopustno silo F_0 določa neenakost

$$\frac{M}{I} z \leq \sigma_0.$$

Maksimalni upogibni moment je $M = Al/4 = 7F_0/16$, napetost pa je natezna na spodnjem delu preseka, zato $z = 11/10$cm. Potem

$$F_0 \leq \frac{16 I \sigma_0}{7 l z} = \frac{9920}{11}\mathrm{N} \doteq 902\,\mathrm{N}.$$