1. kolokvij iz Osnov mehanike 5. aprila 2017

1. Točka se giblje premočrtno po osi x. V času od 0 do t_1 se giblje enakomerno pospešeno s pospeškom a_1, od t_1 do t_2 s konstantno brzino v_2, od t_2 do t_3 pa enakomerno zavira tako, da ima v času t_3 trenuto brzino nič.

   (a) Izračunaj brzino v_2 in do kod pride v času t_1, t_2.

   (b) Izračunaj pospešek zaviranja.

   (c) Do kod pride v času t_3?

   (d) Izračunaj za konkretne vrednosti $a_1 = 2\,\mathrm{m/s}^2$, $t_1 = 5\,\mathrm{s}$, $t_2 = 10\,\mathrm{s}$ in $t_3 = 20s$. Nariši tudi diagrame pospeška, hitrosti in položaja v odvisnosti od časa.

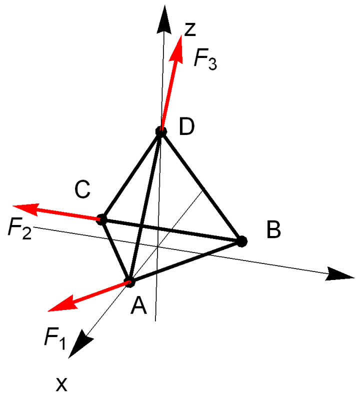
2. Dan je prostorski sistem sil na stranicah tetredra, $\vec{F}_1$ je v smeri starnice AB, $\vec{F}_2$ v smeri starnice BC in $\vec{F}_3$ v smeri starnice AD, glej skico.

   (a) Zapiši sistem sil.

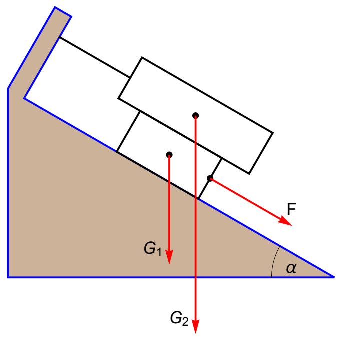
   (b) Izračunaj rezultanto sil in navorov glede na pol A.

   (c) Ugotovi ali ima sistem sil skupno prijemališče in določi os sistema.

   Dolžina stranic tetraedra je a, višina pa $a\sqrt{2/3}$. Velikosti sil so $F_1 = \sqrt{3}\,\mathrm{kN}$, $F_2 = 2\sqrt{3}\,\mathrm{kN}$, $F_3 = \sqrt{3}\,\mathrm{kN}$ in $a = 1\,\mathrm{m}$.



3. Na strmini z naklonskim kotom ležita dve kladi, zgornja je pritrjena z vrvjo v smeri klade, spodnjo pa vlečemo s silo F, glej skico. Določi najmanjšo silo F tako, da lahko spodnjo klado izvlečemo, če je med kladama in strmino trenje s koeficientom $k > \tan\alpha$.

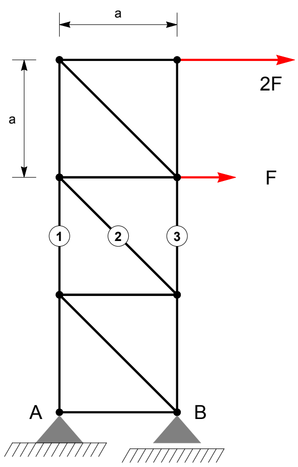


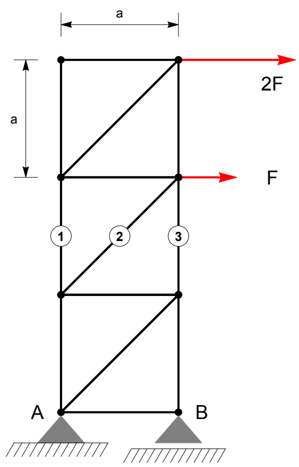
4. Podani sta dve paličji, glej skico.

   (a) Izračunaj sile v podporah.

   (b) Določi sile označenih palic.

   (c) Ugotovi, katero paličje ima manjše kompresibilne sile označenih palic.





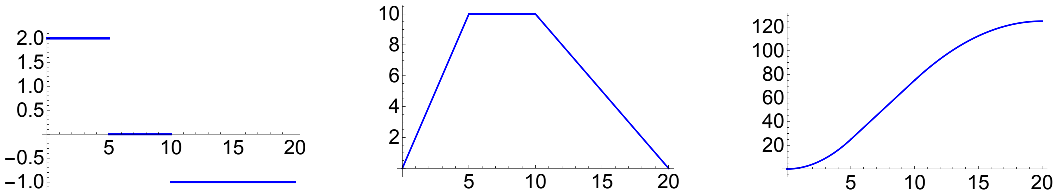
Rešitve

1. (a) Hitrost od t_0 do t_1 narašča linearno do $v_1 = a_1 t_1 = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, od t_1 do t_2 pa je konstantna. Položaj v času t_1 je $x_1 = \frac{1}{2}a_1 t_1^2 = 25\,\mathrm{m}$. Od t_1 do t_2 je gibanje enakomerno. Brzina se ohranja, položaj pa je $x_2 = v_1(t_2 - t_1) + x_1 = 75\,\mathrm{m}$.

   (b) Od t_2 naprej zaviramo s pospeškom a_3. Potem za $t > t_2$ velja $v(t) = a_3(t - t_2) + v2$. Ker mora veljati $v(t_3) = 0$, sledi $a_3 = -v2/(t_3 - t_2) = -1\,\mathrm{m/s^2}$.

   (c) Položaj v t_3 je $x_3 = \frac{1}{2}a_3(t_3 - t_2)^2 + v_2(t_3 - t_2) + x_2 = 125\,\mathrm{m}$.

   (d) Skice grafov pospeška, hitrosti in položaja so



Slika 1: Grafi pospeška, hitrosti in položaja v odvisnoti od časa.

2. (a) Prvo določimo oglišča tetraedra. Osnovna ploskev je enakostranični trikotnik, ki leži v ravnini xy. Ker je višina tetraedra v smeri osi z, je koordinatno izhodišče O v masnem središču osnovne ploskve. Potem $A(a/\sqrt{3}, 0, 0)$, $B(-a/(2\sqrt{3}), a/2, 0)$, $C(-a/(2\sqrt{3}), -a/2, 0)$ in $D(0, 0, a\sqrt{2/3})$. Tu smo upoštevali, da je višina tetraedra $a\sqrt{2/3}$. Sila $\vec{F}_1$ je v smeri stranice BA. Enotski vektor v smeri stranice BA je $\overrightarrow{BA}/a = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\imath} - \frac{1}{2}\vec{\jmath}$. Potem $\vec{F}_1 = F_0(\frac{3}{2}\vec{\imath} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath})$. Tu je $F_0 = \mathrm{kN}$. Sila $\vec{F}_2$ je očitno v smeri osi y in tako $\vec{F}_2 = -2\sqrt{3}F_0\vec{\jmath}$. Enotski vektor v smeri stranice AD je $\overrightarrow{AD}/a = -\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{\imath} + \sqrt{\frac{2}{3}}\vec{k}$ in tako $\vec{F}_3 = F_0(-\vec{\imath} + \sqrt{2}\vec{k})$. Sistem sil je

$$\mathcal{F} = \left\{(A, \vec{F}_1), (B, \vec{F}_2), (C, \vec{F}_3)\right\}.$$

   (b) Rezultanta sistema sil je

$$\begin{aligned}\vec{R}(\mathcal{F}) &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = F_0\left((\frac{3}{2}\vec{\imath} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}) + (-2\sqrt{3}\vec{\jmath}) + (-\vec{\imath} + \sqrt{2}\vec{k})\right)\\ &= \left(\frac{1}{2}\vec{\imath} - \frac{5\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath} + \sqrt{2}\vec{k}\right)\mathrm{kN}.\end{aligned}$$

   Navor sil $\vec{F}_1$ in $\vec{F}_3$ glede na pol A je nič, saj imata sili prijemališče v A. Potem je

$$\vec{N}(\mathcal{F}, A) = \overrightarrow{AB} \times \vec{F}_2 = a\frac{\sqrt{3}}{2}F_2\,\vec{k} = 3\,\mathrm{kNm}\vec{k}.$$

   (c) Sistem sil ima skupno prijemališče, če velja $0 = I(\mathcal{F}) = \vec{R}(\mathcal{F}) \cdot \vec{N}(\mathcal{F}, A)$. Ker je $\vec{R}(\mathcal{F}) \cdot \vec{N}(\mathcal{F}, A) = 3\sqrt{2}\mathrm{kNm}^2 \neq 0$, sistem sil nima skupnega prijemališča. Os sistema dobimo s formulo

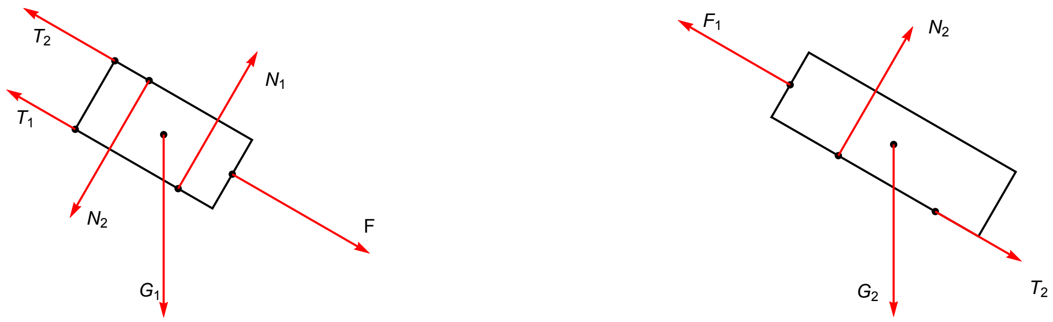
$$\overrightarrow{AP} = \frac{\vec{R}(\mathcal{F}) \times \vec{N}(\mathcal{F}, A)}{\vec{R}(\mathcal{F}) \cdot \vec{R}(\mathcal{F})} = \left(-\frac{5\sqrt{3}}{14}\vec{\imath} - \frac{1}{14}\vec{\jmath}\right)a.$$

Os sistema je tako premica, ki gre skozi točko s koordinatami

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{5\sqrt{3}}{14}\,\vec{i}, -\frac{1}{14}\,\vec{j}\right) a$$

in ima smer vektorja $\vec{R}(\mathcal{F})$.

3. Sistem je sestavljen iz dveh togih teles. Narišimo diagram prostih teles



Slika 2: Spodnja in zgornja klada.

in identificirajmo sile. V ta namen postavimo os x v smer strmine klanca, os y pa pravokotno na klanec. Na spodnjo klado deluje sistem sil

$$\vec{G}_1 = G_1(\sin\alpha\,\vec{i} - \cos\alpha\, vecj), \quad \vec{F} = F\vec{i}, \quad \vec{T}_1 = -T_1\vec{i}, \quad \vec{N}_1 = N_1\vec{j}, \quad \vec{T}_2 = -T_2\vec{i}, \quad \vec{N}_2 = -N_2\vec{j},$$

na zgornjo pa

$$\vec{G}_2 = G_2(\sin\alpha\,\vec{i} - \cos\alpha\, vecj), \quad \vec{F}_1 = -F_1\vec{i}, \quad -\vec{T}_2 = T_2\vec{i}, \quad -\vec{N}_2 = N_2\vec{j}.$$

Ker ne poznamo prijemališč normalnih sil podlag, momentne enačbe za izračun ravnovesja ne bomo uporabili. Ravnovesne enačbe so tako

$$\begin{aligned} 0 &= G_1 \sin\alpha + F - T_1 - T_2, \\ 0 &= -G_1 \cos\alpha + N_1 - N_2, \\ 0 &= G_2 \sin\alpha - F_1 + T_2, \\ 0 &= -G_2 \cos\alpha + N_2. \end{aligned}$$

Ker spodnja klada drsi, velja $T_1 = kN_1$ in $T_2 = kN_2$. Tako je ravnovesni sistem sistem štirih enačb z neznankami N_1, N_2, F_1 in F. Rešimo ga. Prvo dobimo $N_2 = G_2 \cos\alpha$ in nato $N_1 = (G_1 + G_2)\cos\alpha$. Od tod potem

$$F = T_1 + T_2 - G_1 \sin\alpha = k(N_1 + N_2) - G_1 \sin\alpha = k(G_1 + 2G_2)\cos\alpha - G_1 \sin\alpha.$$

4. (a) Prvo izračunamo sile podpor. Ker sta obe paličji enako obremenjeni, imata enake sile podpor. Sila v levi podpori je $\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j}$, v desni pa $\vec{B} = B_2\vec{j}$. Vsota sil v vodoravni smeri je nič. Potem $A_1 = -3F$. Iz momentne enačbe s polom v B sledi $-a \times A_2 - 2a \times F - 3a \times 2F = 0$ in od tod $A_2 = -8F$. Nadalje velja $A_2 + B_2 = 0$ in tako $B_2 = -A_2 = 8F$.

   (b) Izračunajmo sedaj sile označenih palic levega paličja. Paličje navidezno prerežemo skozi označene palice. Zgornji odrezani del je pod vplivom označenih palic v ravnovesju. Postavimo pol momentne enačbe v presek prve in druge palice. Potem $0 = -a \times F_3 - a \times 2F$ in tako $F_3 = -2F$. Sedaj pol momentne enačbe v presek druge in tretje palice. Potem $0 = a \times F_1 - a \times F - 2a \times 2F$ in $F_1 = 5F$. Vsota sil v vodoravni smeri mora biti enaka nič. Torej $0 = F_2/\sqrt{2}+F+2F$ in $F_2 = -3\sqrt{2}F$. Za kontrolo preverimo, če je vsota v navpični smeri tudi enaka nič. Izračunajmo $-F_1 - F_2/\sqrt{2} - F_3 = -5F + 3F + 2F = 0$. Tako smo za levo paličje dobili

$$F_1 = 5F, \quad F_2 = -3\sqrt{2}F, \quad F_3 = -2F.$$

Poglejmo sedaj še drugo paličje. Postavimo pol v presečišče prve in druge palice. Potem $0 = -a \times F_3 - a \times F - 2a \times 2F$ in $F_3 = -5F$.Za presečišče druge in tretje palice velja $0 = a \times F_1 - a \times 2F$. Torej $F_1 = 2F$. Ravnovesna enačba v vodoravni smeri je $0 = -F/\sqrt{2} + F + 2F$ in tako $F_2 = 3\sqrt{2}F$. Za kontrolo $-F_1 - F_2/\sqrt{2} - F_3 = -2F - 3F + 5F = 0$. Sile desnega paličja so

$$F_1 = 2F, \quad F_2 = 3\sqrt{2}F, \quad F_3 = -5F.$$

(c) Ker je $-5 < -3\sqrt{2}$, ima desno paličje večje kompresibilne sile označenih palic, zato je leva postavitev boljša.