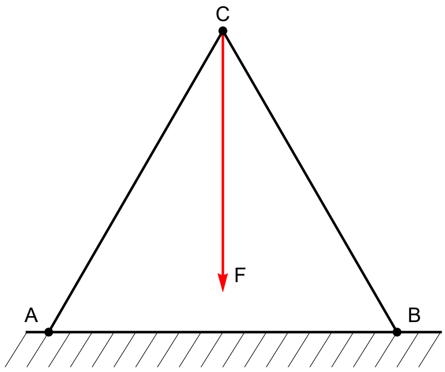
2. kolokvij iz Osnov mehanike 7. junija 2017

1. Enakostranični trikotnik je sestavljen iz dveh elastičnih palic AC in BC dolžine l, ki sta členkasto spojeni v C in členkasto pritrjeni na togo podlago, glej skico. V točki C deluje sila F_0 pravokotno na podlago. Palici sta enaki in imata presek v obliki enakostraničnega trikotnika z dolžino stranice a. Youngov modul palice je 30 GPa, meja tečenja pa $\sigma_Y = 300\,\mathrm{MPa}$.



   (a) Določi sili silo F_0 tako, da je napetost v palicah enaka meji tečenja.

   (b) Izračunaj pomik točke C.

2. Ravninska deformacija deformira pravokotnik dimenzije $2\,\mathrm{cm} \times 1\,\mathrm{cm}$ v romboid dimenzije $2.01\,\mathrm{cm} \times 0.98\,\mathrm{cm}$ z dolžino diagonale $d + \Delta d = 26/(5\sqrt{5})\mathrm{cm}$.

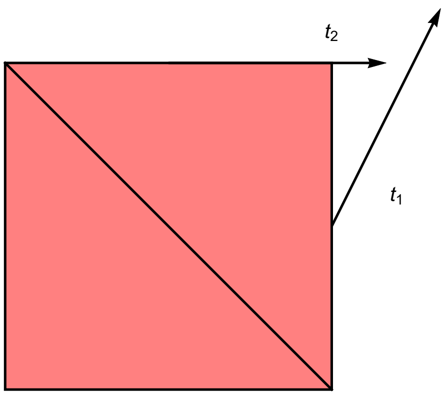
   (a) Določi deformacijski tenzor.

   (b) Izračunaj ekstremalni osni deformaciji in ekstremalno strižno deformacijo.

   (c) Za izotropični material z $\nu = 2/5$ in $E = 210\,\mathrm{GPa}$ z uporabo Hookovega zakona določi pripadajoči napetostni tenzor. Tu upoštevaj, da je

$$\underline{\underline{t}} = \frac{E}{1+\nu}\,\underline{\underline{\epsilon}} + \frac{\nu E \,\mathrm{sl}\left(\underline{\underline{\epsilon}}\right)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\,\underline{\underline{I}}.$$

3. Na eni stranici kvadrata je dana napetosti $\vec{t}_1 = (20\vec{i} + 40\vec{j})\mathrm{MPa}$, na drugi pa je velikost vektorja napetosti $\vec{t}_2$ enaka 40MPa, glej skico.



   (a) Dopolni sliko z vektorjema napetosti na preostalih dveh stranicah.

   (b) Določi pripadajoči napetostni tenzor.

   (c) Skiciraj Mohrovo krožnico.

   (d) Določi normalno in strižno napetost na označeno diagonalo pravokotnika.

4. Enostavno podprti nosilec dolžine $l = 2\,\mathrm{m}$ je enakomerno linijsko obremenjen z linijsko gostoto $q_0 = 2\,\mathrm{kN/m}$ in točkovno s silo $F = 3\,\mathrm{kN}$ s prijemališčem, ki je v razdalji $a = \frac{1}{2}\mathrm{m}$ od levega krajišča.

   (a) Izračunaj sile v podporah.

   (b) Določi potek prečne sile.

   (c) Skiciraj potek upogibnega momenta in določi njegovo največjo vrednost. Kje nastopi?

Rešitve

1. (a) Očitno sta sili leve in desne palice enaki. Njeno velikost označimo z F. Iz ravnovesja sil v točki C sledi $F = F_0/\sqrt{3}$. Površina preseka palice je $S = \sqrt{3}a^2/4$. Napetost v palici je

$$\sigma_Y = \frac{F}{S} = \frac{4F_0}{3a^2}.$$

Od tod sledi

$$F_0 = \frac{3a^2\sigma_Y}{4}.$$

(b) Deformacija palice je

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma_Y}{E}.$$

Iz Pitagorovega izreka potem sledi, da je pomik točke C enak

$$\Delta h = \frac{\sqrt{3}l}{2} - \sqrt{(l-\Delta l)^2 - \frac{l^2}{4}} = l\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{(1-\sigma_Y/E)^2 - \frac{1}{4}}\right) \doteq 11.5\,\mathrm{mm}$$

.

2. (a) Postavimo koordinatni sistem v smeri stranic pravokotnika in izračunajmo osni deformaciji. $\epsilon_{11} = \frac{\Delta a}{a} = 0.005$ in $\epsilon_{22} = \frac{\Delta b}{b} = -0.02$. Za izračun ϵ_{12} bomo upoštevali deformacijo v smeri diagonale, ki je

$$\epsilon_d = \frac{d + \Delta d - d}{d} = \frac{26/(5\sqrt{5}) - \sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{25} = 0.04.$$

Uporabimo sedaj formulo

$$\epsilon_d = \frac{1}{2}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + \frac{1}{2}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})\cos 2\varphi + \epsilon_{12}\sin 2\varphi,$$

kjer je φ kot med osjo x in diagonalo pravokotnika. Potem $\cos\varphi = 2/\sqrt{5}$ in $\sin\varphi = 1/\sqrt{5}$. Od tod $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = 3/5$ in $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi = 4/5$. Tako dobimo enačbo

$$0.04 = -0.0075 + 0.0125\frac{3}{5}10^{-3} + \epsilon_{12}\frac{4}{5}$$

in od tod $\epsilon_{12} = 0.05$. Deformacijski tenzor je tako enak

$$\underline{\underline{\epsilon}} = 5 \cdot 10^{-3}\begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 10 & -4 \end{bmatrix}.$$

(b) Ekstremalni deformaciji sta po formuli

$$\epsilon_{\mathrm{ext}} = \frac{1}{2}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})\right)^2 + \epsilon_{12}^2}$$

enaki

$$\epsilon_{\max} = 5 \cdot 10^{-3}\left(-\frac{3}{2} + \frac{5\sqrt{17}}{2}\right) \doteq 0.044 \quad \epsilon_{\min} = 5 \cdot 10^{-3}\left(-\frac{3}{2} - \frac{5\sqrt{17}}{2}\right) \doteq -0.059.$$

Maksimalna strižna deformacija je

$$\gamma = 2\max\epsilon_{12} = \epsilon_{\max} - \epsilon_{\min} = 25\sqrt{17} \cdot 10^{-3} = 0.103.$$

(c) Izračunajmo prvo Lamejeva koeficienta

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = 75\,\text{GPa} \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 300\,\text{GPa}.$$

Potem

$$\underline{\underline{t}} = \frac{15}{4}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\text{GPa}.$$

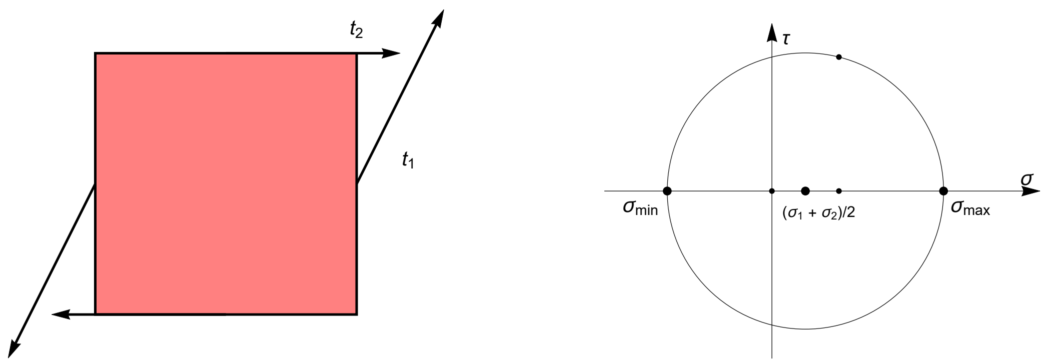
3. (a) Da bo skica ustrezala podatkom, bomo prvo določili napetostni tenzor. Ker je podan vektor napetosti v smeri osi x je

$$\underline{\underline{t}} = \begin{bmatrix} 20 & 40 \\ 40 & t_{22} \end{bmatrix}\text{MPa}.$$

Ker je $40\,\text{MPa} = |\,t_2\,| = \left|\underline{\underline{t}}\vec{j}\right| = \sqrt{40^2 + t_{22}^2}\text{MPa}$, sledi da je $t_{22} = 0$ in

$$\underline{\underline{t}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} 20\,\text{MPa}.$$

(b) Dopolnjena skica napetosti in Mohrova krožnica sta dana na sliki



Slika 1: Slika napetosti na robu in Mohrova krožnica.

(c) Normala na diagonalo je $\vec{n} = (\vec{i} + \vec{j})/\sqrt{2}$. Vektor napetosti je

$$\vec{t} = \underline{\underline{t}}\vec{n} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} 20\,\text{MPa} = 10\sqrt{2}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\text{MPa}.$$

Normalna napetost je $t_n = \vec{t} \cdot \vec{n} = 50\,\text{MPa}$, strižna pa $\tau = \sqrt{\left|\,\vec{t}\,\right|^2 - t_n^2} = 10\,\text{MPa}$.

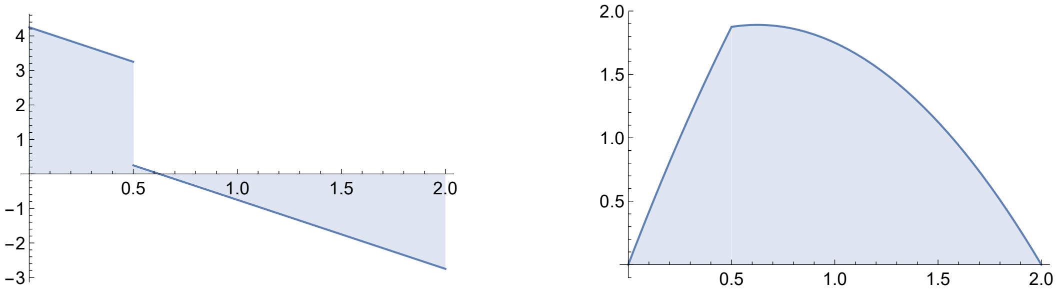
4. (a) Označimo sili podpor z A in B. Linijska obremenitev je ekvipolentna točkovni obremenitvi velikosti $q_0 l$ s prijemališčem v razdalji $l/2$ od krajišča nosilca. Iz momentne ravnovesne enačbe s polom v levem krajišču sledi

$$-\frac{l}{4}F - \frac{l}{2}q_0 l + lB = 0 \Longrightarrow B = \frac{1}{4}F + \frac{1}{2}q_0 l = \frac{11}{4}\text{kN}.$$

Silo A določimo s pomočjo momentne enačbe s polom v desnem krajišču. Tako dobimo

$$A = \frac{3}{4}F + \frac{1}{2}q_0 l = \frac{17}{4}\text{kN}.$$

Za kontrolo, $A + B = 7\,\text{kN} = F + q_0 l^2$.



Slika 2: Potek prečne sile in upogibnega momenta.

(b) Prečna sila je v levi podpori enaka sili A, nato enakomerno pada do $x = l/4$ s koeficientom q_0, saj je je $\frac{dQ}{dx} = -q_0$. Tako je $Q(\frac{l}{4}-) = A - q_0\frac{l}{4} = 13/4\,\mathrm{kN}$. Zaradi točkovne obremenitve ima Q pri $x = \frac{l}{4}$ skok in je $Q(\frac{l}{4}+) = Q(\frac{l}{4}-) - F = 1/4\,\mathrm{kN}$. Od $x = \frac{l}{4}$ naprej prečna sila ponovno enakomerno pada s koeficientom q_0 in je tako $Q(l) = Q(\frac{l}{4}+) - q_0\frac{3l}{4} = -\frac{11}{4}\mathrm{kN}$, kar je natanko enako nasprotni vrednosti sile desne podpore. Vidimo, da je $Q(x) = 0$ pri $x = \frac{5}{8}\mathrm{m}$.

(c) Upogibni moment je na krajiščih enak nič, in je sestavljen iz dveh parabol, ki se negladko stikata v točki točkovne obremenitve. Upogibni moment je največji, ko je prečna sila enaka nič, torej pri $x = \frac{5}{8}\mathrm{m}$. Ker je $\frac{dM}{dx} = Q$ na vsakem segmentu posebej, je na levem segmentu $M(x) = Ax - \frac{1}{2}q_0x^2$ in tako $M(\frac{l}{4}) = \frac{15}{8}\mathrm{kNm}$. Za $x < l/2$ je potek upogibnega momenta približno linearen. Na desnem segmentu je $M(x) = -\frac{1}{2}q_0(x-l)^2 + C_1(x-l)$ saj je $M(l) = 0$ in $\frac{d^2M}{dx^2} = -q_0$. Iz pogoja $M(\frac{l}{4}) = \frac{15}{8}\mathrm{kNm}$ sledi $C = -\frac{11}{4}\mathrm{kN}$. Potem je maksimalen upogibni moment enak $M(\frac{5}{8}\mathrm{m}) = \frac{121}{64}\mathrm{kNm}$.