OSNOVE MEHANIKE & TEHNIČNA MEHANIKA - sinopsis predavanj v šolskem letu 2017/2018

Metalurške tehnologije & Geotehnologija in rudarstvo NTF : Viskokošolski strokovni študij

21. 2. 18 KINEMATIKA IN DINAMIKA

Kinematika

Položaj točke P, opazovalec O, kartezični koordinatni sistem x, y, z.
Koordinate točke $P(x, y, z)$, krajevni vektor $\vec{OP} = \vec{r}$ od izhodišča O do točke P.
V kartezičnem KS so komponente krajevnega vektorja $\vec{OP}$ enake koordinatam točke P:

$$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}.$$

Osnovne vektorskega računa
- i) bazni vektorji $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$;
- ii) seštevanje, odštevanje vektorjev;
- iii) velikost vektorja;
- iv) skalarni produkt;
- v) vektorski produkt.

Gibanje, zapis $\vec{r} = \vec{r}(t)$.
Vektor hitrosti: trenutna sprememba položaja po času, oziroma odvod krajevnega vektorja po času.
Kartezični zapis

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}.$$

Geometrijski pomen vektorja hitrosti: vektor hitrosti je tangentni vektor na tir gibanja. Velikost vektorja hitrosti je brzina.
Vektor pospeška: trenutna sprememba vektorja hitrosti po času, oziroma odvod vektorja htrosti po času.
Kartezični zapis

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k}.$$

Geometrijski pomen vektorja pospeška: smer zavijanja.
Pojem pospeševanja, zaviranja:
- i) točka pospešuje, če je $\frac{dv}{dt} > 0 \iff \vec{v} \cdot \vec{a} > 0$;
- i) točka zavira, če je $\frac{dv}{dt} < 0 \iff \vec{v} \cdot \vec{a} < 0$.

Gibanje je premočrtno natanko tedaj, ko je $\vec{a} \parallel \vec{v}$.
Osnovna primera gibanja:
- i) enakomerno gibanje $\iff \vec{a} = \vec{0} \iff \vec{v} = \vec{v}_0$;
- ii) enakomerno pospešeno $\iff \vec{a} = \vec{a}_0$.

Osnovni primeri odvajanja
- i) Konstanta; $x(t) = x_0 \Rightarrow \dot{x} = 0$.
- ii) Linearne funkcije; $x(t) = \alpha + \beta t + x_0 \Rightarrow \dot{x} = \beta$.
- iii) Kvadratne: $x(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2 \Rightarrow \dot{x} = \beta + 2\alpha t$.
- iv) Sinusa, kosinusa: $x(t) = \sin \omega t \Rightarrow \dot{x} = \omega \cos \omega t$.

Kroženje, polarna bazna vektorja $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\varphi$. Velja:

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} = \vec{e}_\varphi \qquad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = \vec{e}_r.$$

Enakomerno, neenakomerno, kotna hitrost, kotni pospešek.
Kroženje je enakomerno natanko tedaj, ko vektor pospeška kaže proti središču kroženja.

7. 3. 18 Newtonovi zakoni.

1) Koordinatni sistem(KS) je inercialen (IKS) natanko tedaj, ko se prosta materialna točka giblje premočrtno s konstantno brzino ali pa miruje.
2) V IKS velja Newtonova enačba $m\vec{a} = \vec{F}$.
3) Zakon akcije in reakcije $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$.

Pojem IKS.

Gibanje je natanko določeno z Newtonovo enačbo in začetnimi pogoji.

Sistem materialnih točk

Razdelitev sil na zunanje in notranje. Rezultanta notranjih sil je enaka nič; $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij} = \vec{0}$.

$\sum_{i=1}^N m_i\vec{a}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$.

Masno središče.

Primer: masno središče dveh točk leži na njuni zveznici in jo deli v obratnem razmerju njunih mas.

Zapis masnega središča sistema kot masno središče dveh masnih središč njunih podsistemov.

$$\vec{r}^* = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^N m_i\vec{r}_i = \frac{1}{\hat{m}_1 + \hat{m}_2}(\hat{m}_1\vec{r}_1^* + \hat{m}_2\vec{r}_2^*)$$

Primer: masno središče sistema treh točk.

Masno središče likov in teles.

Primer:

i masno središče trikotnika;

ii masno središče trapeza.

Enačba gibanja masnega središča $m\vec{a}^* = \vec{F}$.

Primer: poševni met po eksploziji.

Vrtilna količina točke $\vec{l}(O) = \vec{OP} \times m\dot{\vec{r}}$.

Vrtilna količina sistema materialnih točk $\vec{L}(O) = \sum_{i=1}^N \vec{l}_i(O)$, $\vec{l}_i(O) = \vec{r}_i \times m_i\dot{\vec{r}}_i$.

Odvod vrtilne količine.

Navor(moment) sile $\vec{F}$ s prijemališčem v P glede na pol O: $\vec{N}(O) = \vec{OP} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$.

Navor zunanjih, navor notranjih sil.

Pojem centralne sile.

Izrek o vrtilni količini: če so notranje sile centralne, je odvod vrtilne količine enak navoru zunanjih sil.

Izrek o ohranitvi vrtilne količine.

Izrek o ohranitvi gibalne količine.

14. 3. 18 Definicija togega gibanja.

Togi sistem, togo telo.

Togo gibanje je natanko določeno z gibanjem treh nekolinearnih točk.

Število prostostnih stopenj togega telesa.

Razcep togega gibanja na translatorno in rotacijsko gibanje.

Translatorni del gibanja togega telesa določa enačba gibanja masnega središča. Rotacijski del gibanja togega telesa določa izrek o vrtilni količini.

Dinamika togega sistema je natanko določena z enačbo gibanja masnega središča in izrekom o vrtilni količini.

STATIKA TOGEGA TELESA

Odvisnost navora od pola

$$\vec{N}(O) = \vec{OO_1} \times \vec{F} + \vec{N}(O_1).$$

Togo telo je v statičnem ravnovesju natanko tedaj, ko

a) rezultanta vseh zunanjih sil je enaka nič;
b) rezultanta navorov zunanjih sil je enaka nič;

Togo telo v danem koordinatnem sistemu miruje natanko tedaj, ko je

a) v statičnem ravnovesju in

b) miruje v začetnem trenutku;
Nezadostnost posameznih pogojev.
i) $\vec{F} = \vec{0}$, $\vec{N} \neq \vec{0}$ + telo miruje v začetnem trenutku;
ii) $\vec{F} \neq \vec{0}$, $\vec{N} = \vec{0}$ + telo miruje v začetnem trenutku;
iii) $\vec{F} = \vec{0}$, $\vec{N} = \vec{0}$ + telo ne miruje v začetnem trenutku.
Sistem sil $\mathcal{F} = \{(P_1, \vec{F}_1), \ldots, (P_n, \vec{F}_n)\}$, rezultanta sistema sil $\vec{R}(\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$, moment sistema sil $\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \sum_{i=1}^n \vec{OP_i} \times \vec{F}_i$.
Definicija Sistema sil $\mathcal{F}_1$ in $\mathcal{F}_2$ sta ekvipolentna, če velja:
i) $\vec{R}(\mathcal{F}_1) = \vec{R}(\mathcal{F}_2)$ in
ii) $\vec{N}(\mathcal{F}_1, O) = \vec{N}(\mathcal{F}_2, O)$ za vsak O.
Odvisnost momenta od pola. Velja

$$\vec{N}(\mathcal{F}, O_1) = \vec{O_1O_2} \times \vec{R}(\mathcal{F}) + \vec{N}(\mathcal{F}, O_2).$$

Trditev Sistema sil $\mathcal{F}_1$ in $\mathcal{F}_2$ sta ekvipolentna natnako tedaj, ko je $\vec{R}(\mathcal{F}_1) = \vec{R}(\mathcal{F}_2)$ in obstaja pol O tako, da $\vec{N}(\mathcal{F}_1, O) = \vec{N}(\mathcal{F}_2, O)$.
Trditev Sistema sil $\mathcal{F}_1$ in $\mathcal{F}_2$ sta ekvipolentna natnako tedaj, ko je $\vec{N}(\mathcal{F}_1, O) = \vec{N}(\mathcal{F}_2, O)$ za vsak pol O.
Trditev Sistema sil $\mathcal{F}_1$ in $\mathcal{F}_2$ sta ekvipolentna natnako tedaj, ko je $\vec{N}(\mathcal{F}_1, O_i) = \vec{N}(\mathcal{F}_2, O_i)$ za tri nekolinearne točke O_1, O_2 in O_3.
Posledica Ravninska sistema sil $\mathcal{F}_1$ in $\mathcal{F}_2$ sta ekvipolentna natnako tedaj, ko je $\vec{N}(\mathcal{F}_1, O_i) = \vec{N}(\mathcal{F}_2, O_i)$ za dve točki O_1 in O_2.
Dva ekvivalentna sistema sil imata enak dinamični efekt na togo telo.
Dinamika togega telesa pod vplivom sistema sil $\mathcal{F}$ je natanko določena z $\vec{R}(\mathcal{F})$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, O)$.
Definicija Sistem sil $\mathcal{F}$ je ravnovesen, če je $\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{0}$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \vec{0}$.
Če je sistem sil $\mathcal{F}$ ravnovesen, je $\vec{N}(\mathcal{F}, O)$ za vsako točko O.
Osnova naloga statike: določitev sil podpor.
Primer: enostavno podprt togi nosilec.
a) statično določen primer;
a) statično nedoločen primer.
Osnovni principi statike; operacije nad sistemom sil, ki ohranjajo ekvipolentnost
a) princip o aditivnosti sil s skupnim prijemališčem;
b) princip o polznosti sile;
c) princip o uravnoteženemu paru sil.
Sistem sil je ravninski, če vsa prijemališča in sile ležijo v isti ravnini.
Redukcija ravninskega sistema $\{(P_1, \vec{F}_1), (P_2, \vec{F}_2)\}$ dveh sil na skupno prijemališče:
a) $\vec{F}_1 \nparallel \vec{F}_2$;
b) $\vec{F}_1 \parallel \vec{F}_2$ in $\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 > 0$;

21. 3. 18
c) $\vec{F}_1 \parallel \vec{F}_2$, $\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 < 0$ in $\left|\vec{F}_1\right| \neq \left|\vec{F}_2\right|$;
Pojem dvojica sil.
Definicija Sistem sil je dvojica, če je $\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{0}$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, O) \neq \vec{0}$.
Poljuben ravninski sistem dveh sil $\{(P_1, \vec{F}_1), (P_2, \vec{F}_2)\}$, ki ni dvojica, moremo reducirati na sistem z eno samo silo $\{(P_0, \vec{F}_1 + \vec{F}_2)\}$, kje je P_0 skupno prijemališče.
Moment dvojice je neodvisen od pola: $\vec{N}(\mathcal{F}, O_1) = \vec{N}(\mathcal{F}, O_2)$ za poljubna pola O_1 in O_2. Pravimo, da je navor prosti vektor.
Ekvivalentnost dvojice sil in navora.
Konstrukcija dvojice sil za dani navor.
Unija sistema sil

$$\vec{R}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) = \vec{R}(\mathcal{F}_1) + \vec{R}(\mathcal{F}_2), \qquad \vec{N}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2, O) = \vec{N}(\mathcal{F}_1, O) + \vec{N}(\mathcal{F}_2, O).$$

Unija dvojice je dvojica ali ravnovesni sistem sil.
Redukcija prostorskega sistema sil na poljubno izbrano redukcijsko točko; prestavitveni moment.
Sistem $\mathcal{F}$ je sistem sil s skupnim prijemališčem, če obstaja redukcijska točka tako, da je prestavitveni moment v to točko enak nič.
Definicija Sistem sil $\mathcal{F}$ je *dinama*, če obstaja taka točka P_0, da velja
1) $\vec{N}(\mathcal{F}, P_0) \neq \vec{0}$;
2) $\vec{N}(\mathcal{F}, P_0) \parallel \vec{R}(\mathcal{F})$.

Definicija *Os sistem sil* $\mathcal{F}$ je premica v smeri $\vec{R}(\mathcal{F})$, ki gre skozi točko P_0 v kateri je $\vec{N}(\mathcal{F}, P_0) \parallel \vec{R}(\mathcal{F})$.
Definicija Sistem sil $\mathcal{F}$ ima skupno prijemališče v točki P_0, če je $\vec{N}(\mathcal{F}, P_0) = \vec{0}$.
Analitična določitev osi sistema. Krajevni vektor od poljubnega pola O do točke P_0 na osi sistema je

$$\vec{OP_0} = \frac{\vec{R}(\mathcal{F}) \times \vec{N}(\mathcal{F}, O)}{\left|\vec{R}(\mathcal{F})\right|^2}.$$

Invarianta sistema sil $I(\mathcal{F}) = \vec{R}(\mathcal{F}) \cdot \vec{N}(\mathcal{F}, O)$.
Trditev Invarianta sistema sil je neodvisna od pola.
Redukcija sistema sil
1) $I(\mathcal{F}) = 0$
   1a) $\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{0}$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \vec{0}$: *ravnovesni sistem sil*;
   1b) $\vec{R}(\mathcal{F}) \neq \vec{0}$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \vec{0}$: *sistem sil s skupnim prijemališčem v O*;
   1c) $\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{0}$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, O) \neq \vec{0}$: *dvojica sil*;
   1d) $\vec{R}(\mathcal{F}) \neq \vec{0}$, $\vec{N}(\mathcal{F}, O) \neq \vec{0}$ in $\vec{R}(\mathcal{F}) \perp \vec{N}(\mathcal{F}, O)$: *sistem sil ima skupno prijemališče* na osi sistema;
2) $I(\mathcal{F}) \neq 0$: sistem sil nima skupnega prijemališča. Sistem sil je *dinama*.

Primer: sistem sil z vzporednimi silami $\vec{F} = m_i\vec{F_0}$. Če je $m = \sum_{i=1}^{N} m_i \neq 0$ je ta sistem sil ekvipolenten rezultanti $m\vec{F_0}$, ki ima prijemališče v masnem središču.
Osnova naloga statike: uravnovešenje danega sistema sil.
Poljubni ravninski sistem sil lahko reduciramo na dve sili, ki imata prijemališči v poljubno izbranih točkah.
Poljubni prostorski sistem sil lahko reduciramo na tri sile, ki imajo prijemališča v poljubno izbranih treh nekolinearnih točkah.
Ravninski sistem sil lahko uravnovesimo v poljubno izbranih dveh podporah, prostorskega pa v treh.
Osnovni koraki pri reševanju osnovne naloge statike togega telesa:
a) identifikacija sil in njihovih prijemališč;
b) postavitev KS in vekorski zapis sil in prijemališč;
c) zapis ravnovesnih enačb;
d) reševanje ravnovesnih enačb;
e) analiza rezultata.

Primer: (sistem sil s skupnim prijemališčem) določi silo, ki potisne kolo s polmerom r_0 čez robnik višine h;

28\. 3. 18 **Trenje**
Sila podlage je rezultanta ploskovne porazdelitve sil, tangentna komponenta, normalna komponenta.
Sila trenja je komponenta sile podlage v tangentni smeri in kaže v nasprotno smer kot gibanje.
Prijemališče sile podlage.
Drsno(dinamično) trenje, dotikalno(oprijemalno, statično) trenje.
Coulombov zakon trenja.
Tabela koeficientov oprijemalnega(koeficient lepenja) in drsnega trenja. Drsenje klade na strmini, torni kot.
Spuščanje, dvigovanje klade po strmini; samozapornost.
Vijačna dvigalka, $M = Gr_0 \tan(\alpha + a\alpha_0)$, α strmina vijačnice, α_0 torni kot.
Trenje vrvi na kolutu.

Ravnovesna enačba

$$\frac{d\vec{S}}{d\varphi} + \vec{n} + \vec{f} = \vec{0}.$$

Izpeljava formule $S_2 = S_1 e^{k\varphi_0}$.
Vrednosti kvocienta S_2/S_1 pri $k = \frac{1}{2}$ za različne ovojne kote φ_0.
Primer: zdrs vrvi na kolutu škripca.
Trenje klinaste jermenice, formula $\hat{k} = \frac{k}{\sin\alpha}$.
Statika sistema togih teles
Spoji med telesi, sile in navori v spojih.
Klasifikacija spojev:

a) popolni spoj, prenos vseh sil in momentov;
b) tečaj, prenos vseh sil in momentov pravokotnih na os tečaja;
c) križni zglob, prenos vseh sil in momenta v smeri osi zgloba;
d) krogelni zglob, prenos vseh sil brez prenosa momenta;
e) linijski drsnik, prenos sil pravokotnih na smer drsnika in vseh momentov;
f) ploščati drsnik, prenos sile pravokotne na ravnino drsnika in vseh momentov;
g) kombinacija drsnika in zgloba.

Primer: A lestev, določitev pogoja zdrsa.

4. 4. 18 Potek reševanja nalog statike sistema togih teles:

a) identifikacija zunanjih sil;
b) razčelnitev sistema na toge komponente;
c) identifikacija sil in momentov v spojih;
d) postavitev diagramov prostih teles;
e) zapis ravnotežnih enačb;
f) raševanje sistema ravnotežnih enačb.

Paličje
Paličje je togi sistem sestavljen iz palic pod vplivom sil s prijemališči v spojih palic.
v število spojev, p število palic; Formula za enostavno ravninsko paličje : $2v - 3 = p$.
Formula za enostavno prostorsko paličje $3v - 6 = p$.
Sile v palicah, natezne, tlačne.
Ravnovesne enačbe paličja.
Enostavno paličje je pri statično določenih podporah statično določeno.
Vozliščna metoda.
Primer: paličje treh enakokrakih trikotnikov:

a) določitev sil v podporah;
b) določitev sil v palicah.

Metoda prereza; kdaj jo lahko uporabimo.
Primer: določitev sil v izbranih palicah.
Primerjava vozliščne metode in metode prereza.

Nosilci
Podpore nosilca:

a) členkasta nepomična;
b) členkasta pomična;
c) konzolna.

Točkovna obremenitev, linijska obremenitev, dolžinska gostota sobremenitve $p(x)$.
Določitev ekvipolentne točkovne obremenitve.
Primeri:

a) enakomerna(konstantna) porazdelitev;
b) linearna porazdelitev.

Navidezni prerez nosilca, vpliv desnega dela nosilca na levi del preko notranjih količin;

a) osna sila $V(x)$;

b) prečna sila $Q(x)$;
c) upogibni moment $M(x)$.

Določitev notranjih količin z metodo prereza.

Primer: točkovno obremenjen enostavno podprt nosilec.

a) Potek osne sile;
b) potek prečne sile;
c) potek upogibnega momenta.

Ugotovitve: pri enostavno podprtem nosilcu velja.

a) Prečna sila je na levem krajišču enaka sili leve podpore.
b) Prečna sila je na desnem krajišču enaka negativni vrednosti sili desne podpore.
c) Prečna sila ima pri točkovni obremenitvi v točkah obremenitve nezveznosti s skokom, ki je enak sili obremenitve v tej točki.
d) Upogibni moment je enak nič v krajiščih.
e) Upogibni moment je pri točkovno obremenjenem nosilcu odsekoma linearen.

11. 4. 18 Primer: konstantna linijska obremenitev enostavno podprtega nosilca:

a) potek prečne sile;
b) potek upogibnega momenta;
c) primerjava z ekvipolentno točkovno obremenitvijo.

Izpeljava formul za zvezno linijsko obremenitev $p(x)\vec{\imath}+q(x)\vec{k}$. Če je linijska obremenitev zvezna v okolici x_0, potem pri $x = x_0$ veljajo ravnovesne enačbe

$$\frac{dV}{dx} = -p(x), \qquad \frac{dQ}{dx} = -q(x), \qquad \frac{dM}{dx} = Q(x).$$

12. 4. 18 Primer: več točkovno obremenjen enostavno podprtem prevesnem nosilcu.

Ugotovitve: pri enostavno podprtem prevesnem nosilcu velja.

a) prečna sila je odsekoma konstantna;
b) prečna sila na prostih krajiščih je enaka nič;
c) prečna sila je na levem krajišču enaka sili leve podpore;
d) prečna sila je na desnem krajišču je nasprotno enaka sili desne podpore;
e) prečna sila ima v točkah obremenitve nezveznosti s skokom, ki je enak sili obremenitve v tej točki;
f) upogibni moment je enak nič v prostih krajiščih.
g) upogibni moment je pri točkovno obremenjenem nosilcu odsekoma linearen.

Primer: konzolni nosilec s konstantno linijsko obremenitvijo.

Določitev notranjih količin in sil ter momentov podpore analitično metodo; z upoštevanjem diferencialne zveze med Q in q ter M in Q.

TRDNOST

Osna deformacija in napetost

Osna deformacija

Referenčni položaj X, deformirani položaj x; funkcija pomika $x = X + u(X)$.

Mera deformacije, relativna sprememba dolžine.

Enakomerna deformacija $u(X) = \Delta l x/l$, $\epsilon_1 = \Delta l/l$.

Neenakomerna deformacija $\epsilon_1 = du/dx$.

Logaritemska mera $\epsilon = \log(l + \Delta l)/l$; aditivnost logaritemske mere.

Pojem majhne deformacije, aproksimacija $\epsilon_1 \approx \epsilon$.

Osna napetost $\sigma = F/A$.

Deformacijsko napetostni diagram.

Značilne točke in območja na deformacijsko napetostnem diagramu.

Območje proporcionalnosti, Hookov zakon $\sigma = E\epsilon$.

Tabela Youngovih modulov E, mej tečenj σ_{Y} in nateznih trdnosti σ_{S}.

Primer:
a) za baker določi dopustno deformacijo, da napetost ne preseže meje tečenja.
b) osna obremenitev valjaste kompozitne palice; določi silo, da bo deformaicja pod predpisano vrednostjo; konkretni primer, železobetonski steber.

Reševanje statično nedoločenih nalog.
Primer: nosilec obešen na tri žice.

25. 4. 18 Ravnovesna enačba osne napetosti in deformacije

$$\frac{d}{dx}(\sigma) + p(x)A(x) = 0, \qquad \frac{d}{dx}\left(AE\frac{du}{dx}\right) + p(x)A(x) = 0.$$

kjer je $p(x)$ volumenska gostota sile. Volumenska gostota sile teže je $p = \rho g$.
Primer: problem vodnega stolpa
Primer: deformacija palice zaradi lastne teže.
Termoelastičnost.
Primer: določi napetost palice med dvema togima stenama pri spremembi temperature za ΔT, če je
a) palica homogena;
b) kompozitna.

Napetostni tenzor

Poševni presek palice, stržna napetost, odvisnost od kota preseka.
Vektor napetosti $\vec{t}$ je gostota površinske sile na prerezu.
Vektor napetosti $\vec{t} = \vec{t}(p, \vec{n})$ je linearen v $\vec{n}$. To pomeni, da obstaja tenzor napetosti $\underline{\underline{t}}$ tako, da je $\vec{t} = \underline{\underline{t}}\,\vec{n}$.
Tenzor napetosti je simetričen in ima 6 neodvisnih komponent.
Zapis tenzorja napetosti:

$$\underline{\underline{t}} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{12} & t_{22} & t_{23} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \sigma_2 & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Normalna napetost, vektor normalne napetosti; strižna napetost, vektor strižne napetosti.
Osnovna napetostna stanja.
a) Enoosno napetostno stanje; izrčun normalne in strižne napetosti.
b) Hidrostatično napetostno stanje $\underline{\underline{t}} = -p\,\underline{\underline{I}}$; v vsaki smeri je normalna napetost enaka $-p$, strižna napetost je enaka nič.
c) Strižno napetostno stanje, obstaja KS v katerem je vsota diagonalnih elementov napetostnega tenzorja enaka nič. Izračun normalne in strižne napetosti.
d) Ravninsko napetostno stanje.

Pomen komponent napetostnega tenzorja v danem KS:
a) diagonalni elementi so enaki normalnim napetostim v koordinatnih smereh;
a) izven diagonalni elementi so enaki projekciji vektorjev strižne napetosti na koordinatne osi.

9. 5. 18 **Ekstremalne lastnosti napetostnega tenzorja**

Odvisnost komponent napetostnega tenzorja od postavitve koordinatnega sistema. V koordinatnem sistemu z osema $\vec{\imath}' = \cos\varphi\vec{\imath} + \sin\varphi\vec{\jmath}$ in $\vec{\jmath}' = -\sin\varphi\vec{\imath} + \cos\varphi\vec{\jmath}$ je

$$\begin{aligned} t'_{11} &= \frac{1}{2}(t_{11} + t_{22}) + \frac{1}{2}(t_{11} - t_{22})\cos 2\varphi + t_{12}\sin 2\varphi, \\ t'_{22} &= \frac{1}{2}(t_{11} + t_{22}) - \frac{1}{2}(t_{11} - t_{22})\cos 2\varphi - t_{12}\sin 2\varphi, \\ t'_{12} &= -\frac{1}{2}(t_{11} - t_{22})\sin 2\varphi + t_{12}\cos 2\varphi. \end{aligned}$$

Invariante napetostnega tenzorja sta:

a) sled napetostnega tenzorja (vsota diagonalnih elementov matrike deformacijskega tenzorja je neodvisna od koordinatnega sistema);
b) determinanta napetostnega tenzorja.

Določitev smeri največje, najmanjše normalne napetosti.
Smeri ekstremalne normalne napetosti sta

$$\varphi_\sigma^1 = \frac{1}{2}\arctan\frac{2t_{xy}}{t_x - t_y}, \quad \varphi_\sigma^2 = \varphi_\sigma^1 + \frac{\pi}{2}.$$

Smeri največje in najmanjše normalne napetosti oklepata pravi kot.
Največja normalna napetost je

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{2}\left(t_x + t_y + \sqrt{(t_x - t_y)^2 + 4t_{xy}^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Sl}\,\underline{\underline{t}} + \sqrt{(\mathrm{Sl}\,\underline{\underline{t}})^2 - 4\det\underline{\underline{t}}}\right),$$

najmanjša pa

$$\sigma_{\min} = \frac{1}{2}\left(t_x + t_y - \sqrt{(t_x - t_y)^2 + 4t_{xy}^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Sl}\,\underline{\underline{t}} - \sqrt{(\mathrm{Sl}\,\underline{\underline{t}})^2 - 4\det\underline{\underline{t}}}\right).$$

Ekstremalnim normalnim napetostim pravimo tudi glavne napetosti, njunima smerema pa glavne smeri.
Ekstremalna strižna napetost je

$$\tau_{\mathrm{ext}} = \pm\frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}).$$

Pripadajoča smer ekstremalne stržne napetosti oklepa kot $\pi/4$ s smerjo ekstremalne normalne napetosti.
V koordinatnem sistemu z osema v smereh ekstremalnih normalnih napetosti je strižna komponenta pripadajoče matrike napetostnega tenzorja enaka nič.
Glavne smeri napetostnega tenzorja.
Ekstremalne vrednosti deformacijskega tenzorja so neodvisne od izbire koordinatnega sistema.
Primer: podano je ravninsko napetostno stanje $t_{11} = -64$MPa, $t_{22} = 32$MPa in $t_{12} = -20$MPa.
a) Določi normalno in strižno napetost na ravnino z normalo, ki oklepa kot $\pi/3$ z osjo x.
b) Izračunaj ekstremalne vrednosti normalne in strižne napetosti.
c) Določi glavne smeri napetostnega tenzorja.

Mohrova krožnica.
Primer: Mohrova krožnica za
a) enoosno deformacijo;
b) enostavni strig.
c) ravninsko hidrostatično napetostno stanje.

16. 5. 18 **Deformacija**

Pisava; referenčni(nedeformiran) položaj: B,P, P(X,Y,Z); prostorski(deformiran) položaj: b,p, p(x,y,z).
Mere deformacije:
a) relativna sprememba dolžin

$$\epsilon_1 = \frac{|\,p_1p_2\,| - |\,P_1P_2\,|}{|\,P_1P_2\,|},$$

b) Cauchyjeva mera deformacije

$$\epsilon_2 = \frac{|\,p_1p_2\,|^2 - |\,P_1P_2\,|^2}{|\,P_1P_2\,|^2}$$

c) logaritemska mera

$$\epsilon = \log\frac{|\,p_1p_2\,|}{|\,P_1P_2\,|}$$

Za majhne deformacije je $\epsilon_2 = 2\epsilon_1$, $\epsilon_1 = \epsilon$.
Pri togem pomiku je mera deformacije enaka nič.

Opis deformacije z vektorjem pomika $\vec{r} = \vec{R} + \vec{u}$.
Lokalizacija mere deformacije, sprememba dolžin za infinitezimalno bližnje točke.
Parcialni odvod.
Gradinet pomika

$$\mathrm{Grad}\,\vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X} & \frac{\partial u_1}{\partial Y} & \frac{\partial u_1}{\partial Z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X} & \frac{\partial u_2}{\partial Y} & \frac{\partial u_2}{\partial Z} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X} & \frac{\partial u_3}{\partial Y} & \frac{\partial u_3}{\partial Z} \end{bmatrix}.$$

Gradinet deformacije

$$\Delta\vec{r} = \underline{\underline{F}}\Delta\vec{R}, \quad \underline{\underline{F}} = (\underline{\underline{I}} + \mathrm{Grad}\,\vec{u}).$$

Transponiranje; osnovni lastnosti
a) $\vec{a} \cdot \underline{\underline{A}}\,\vec{b} = \underline{\underline{A}}^T\,\vec{a} \cdot \vec{b}$;
b) $\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\right)^T = \underline{\underline{B}}^T\underline{\underline{A}}^T$.
Deformacijski tenzor

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{F}}^T\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}\right).$$

Deformacijski tenzor je simetričen.
Zapis deformacijskega tenzorja s pomikom $\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}(\mathrm{Grad}\,\vec{u} + (\mathrm{Grad}\,\vec{u})^T + (\mathrm{Grad}\,\vec{u})^T(\mathrm{Grad}\,\vec{u}))$.
Infinitezimalni deformacijski tenzor

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Grad}\,\vec{u} + (\mathrm{Grad}\,\vec{u})^T\right).$$

Komponentni zapis infinitezimalnega deformacijskega tenzorja

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \epsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \epsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X} & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_1}{\partial Y} + \frac{\partial u_2}{\partial X}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_1}{\partial Z} + \frac{\partial u_3}{\partial X}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial u_2}{\partial X} + \frac{\partial u_1}{\partial Y}) & \frac{\partial u_2}{\partial Y} & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_2}{\partial Z} + \frac{\partial u_3}{\partial Y}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial u_3}{\partial X} + \frac{\partial u_1}{\partial Z}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_3}{\partial Y} + \frac{\partial u_2}{\partial Z}) & \frac{\partial u_3}{\partial Z} \end{bmatrix}$$

Zapis infinitezimalne deformacije v smeri enotskega vektorja $\vec{n}$

$$\epsilon_1 = \epsilon_1(\vec{n}) = \vec{n} \cdot \underline{\underline{\epsilon}}\,\vec{n}.$$

Pomen komponent deformacijskega tenzorja
a) diagonalni elementi so enaki relativnim spremembam v smereh koordinatnih osi;
b) izven diagonalni elementi so enaki polovični spremembi kota med koordinatnimi osmi.
Pravimo, da je deformacija homogena, če je deformacijski tenzor konstanten.
Ravninska deformacija: $u_1 = u_1(X, Y)$, $u_2 = u_2(X, Y)$, $u_3 = 0$.
Primer: dvoosna deformacija pravokotnika.
a) Določitev pomika iz slike.
b) izračun spremembe dolžine diagonale s pomočjo slike;
c) izračun deformacijskega tenzorja;
d) izračun spremembe dolžine diagonale s pomočjo deformacijskega tenzorja.

23. 5. 18 Osnovni načini deformacij:
a) enoosna;
b) enakomerni razteg ali skrčitev;
c) strižna deformacija;
d) ravninska deformacija.
Sprememba volumna.

$$\frac{\Delta V}{V} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \mathrm{Sl}\,\underline{\underline{\epsilon}}.$$

Relativna sprememba volumna je enaka vsoti diagonalnih elementov deformacijskega tenzorja oziroma sledi deformacijskega tenzorja.

Strižna deformacija ohranja volumen.
Komponente deformacijskega tenzorja so odvisne od izbire koordinatnega sistema.
Odvisnost komponent deformacijskega tenzorja od postavitve koordinatnega sistema. V koordinatnem sistemu z osema $\vec{\imath}' = \cos\varphi\vec{\imath} + \sin\varphi\vec{\jmath}$ in $\vec{\jmath}' = -\sin\varphi\vec{\imath} + \cos\varphi\vec{\jmath}$ je

$$\begin{aligned}
\epsilon'_{11} &= \frac{1}{2}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + \frac{1}{2}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})\cos 2\varphi + \epsilon_{12}\sin 2\varphi, \\
\epsilon'_{22} &= \frac{1}{2}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) - \frac{1}{2}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})\cos 2\varphi - \epsilon_{12}\sin 2\varphi, \\
\epsilon'_{12} &= -\frac{1}{2}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})\sin 2\varphi + \epsilon_{12}\cos 2\varphi,
\end{aligned}$$

Osna deformacija v smeri $\vec{n} = \cos\varphi\vec{\imath} + \sin\varphi\vec{\jmath}$ je

$$\epsilon_1(\vec{n}) = \vec{n}\cdot\underline{\underline{\epsilon}}\,\vec{n} = \epsilon_1(\varphi) = \frac{1}{2}(\epsilon_x + \epsilon_y) + \frac{1}{2}(\epsilon_x - \epsilon_y)\cos 2\varphi + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\sin 2\varphi.$$

Ekstremalne lastnosti deformacijskega tenzorja

Določitev smeri največje, najmanjše osne deformacije.
Smeri ekstremalne osne deformacije sta

$$\varphi_1^{\mathrm{a}} = \frac{1}{2}\arctan\frac{2\epsilon_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y}, \quad \varphi_2^{\mathrm{a}} = \varphi_1^{\mathrm{a}} + \frac{\pi}{2}.$$

Smeri največje in najmanjše mere deformacije oklepata pravi kot.
Največja osna deformacija je

$$\epsilon_1^{\max} = \frac{1}{2}\left(\epsilon_x + \epsilon_y + \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + 4\epsilon_{xy}^2}\right),$$

najmanjša pa

$$\epsilon_1^{\min} = \frac{1}{2}\left(\epsilon_x + \epsilon_y - \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + 4\epsilon_{xy}^2}\right).$$

V koordinatnem sistemu z osema v smereh ekstremalnih osnih deformacij je stržna komponenta pripadajočega deformacijskega tenzorja enaka nič.
Mera strižne deformacije v ravnini med seboj pravokotnih enotskih vektorjev $\vec{m}$ in $\vec{n}$ je $\gamma(\vec{m},\vec{n}) = 2\vec{m}\cdot\underline{\underline{\epsilon}}\,\vec{n}$.
Pri ravninski deformaciji je

$$\gamma = \gamma(\vec{n}_\perp, \vec{n}) = (\epsilon_y - \epsilon_x)\sin 2\varphi + \gamma_{xy}\cos\ 2\varphi,$$

kjer je $\vec{n} = \cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath}$ in $\vec{n}_\perp = -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath}$.
Smeri ekstremalne spremembe kotov sta

$$\varphi_1^{\mathrm{s}} = \frac{1}{2}\arctan\frac{\epsilon_y - \epsilon_x}{\gamma_{xy}}, \quad \varphi_2^{\mathrm{s}} = \varphi_1^{\mathrm{s}} + \frac{\pi}{2}.$$

Smeri ekstremalne osne deformacije oklepajo s smerema ekstremalne strižne deformacije kot $\pi/4$.
Ekstremalna strižna deformacija je

$$\gamma_{\mathrm{ext}} = \pm(\epsilon_1^{\max} - \epsilon_1^{\min}).$$

Posplošeni Hookov zakon: linearna zveza med napetostjo in deformacijo.
Število materialnih parametrov.
Zapis zveze med $\underline{\underline{t}}$ in $\underline{\underline{\epsilon}}$, Voigtov zapis z elastično matriko reda 6×6.
Simetrije elastičnega tenzorja in število materialnih parametrov za posamezne simetrije.

a) anizotropija (21);
b) monoklinična (13);

c) ortotropična (9);
d) kubična (3);
f) tranzverzalna izotropija (5); $C_{44} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})$.
g) izotropija (2);

Podajnostni tenzor, zapis zveze med $\underline{\underline{\epsilon}}$ in $\underline{\underline{t}}$ za ortotropičen material

$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_2 & -\nu_{13}/E_3 & 0 & 0 & 0 & \\ -\nu_{21}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{23}/E_3 & 0 & 0 & 0 & \\ -\nu_{31}/E_1 & -\nu_{32}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1/\mu_{23} & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\mu_{13} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 1/\mu_{12} \end{bmatrix}$$

Hookov zakon za izotropičen material

$$\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} t_{ij} - \frac{\nu}{E}(t_{11} + t_{22} + t_{33})\delta_{ij}$$

oziroma

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{t}} - \frac{\nu}{E}(\mathrm{Sl}\,\underline{\underline{t}})\underline{\underline{I}}.$$

Zveza E, ν, G.
Enakomerna kompresija, kompresijski modul $\kappa = \frac{E}{3(1-2\nu)}$.
Za nestisljivi material je $\nu = \frac{1}{2}$.
Lamejeva koeficienta $\mu = G$, $\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}$,

$$\underline{\underline{t}} = 2\mu\underline{\underline{\epsilon}} + \lambda(\mathrm{Sl}\,\underline{\underline{\epsilon}})\underline{\underline{I}}.$$

30. 5. 18 Ravninska napetost.
Ravninska deformacija; modificirana modula

$$\hat{E} = \frac{E}{1-\nu^2}, \qquad \hat{\nu} = \frac{\nu}{1-\nu}.$$

Termalni raztezek $\underline{\underline{\epsilon}}_{\mathrm{T}} = \alpha \Delta T \underline{\underline{I}}$.
Termoelastčnost, deformacija je vsota elastične in termalne deformacije.

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{t}} - \frac{\nu}{E}(\mathrm{Sl}\,\underline{\underline{t}})\underline{\underline{I}} + \alpha\Delta T\underline{\underline{I}}.$$

Primer: izračun napetostnega stanja elastičnega vključka v togi matriki.

Upogib nosilca

Nevtralna os.
Osnovne predpostavke:
a) dolžina nosilca je bistveno večja od lateralnih dimenzij.
b) dolžina nosilca je bistveno večja od lateralnih dimenzij.
c) nevtralna os je težična os in se ujema z osjo x;
d) ravnine pravokotne na nevtralno os v referenčni legi se deformirajo v ravnine, ki so pravokotne na deformirano nevtralno os.

Deformacija vlaken $\epsilon = \frac{z}{R}$, napetost $\sigma = z\frac{E}{R}$.
Določitev zveze med upogibnim momentom M in napetostjo.
Euler - Bernoullijeva enačba $M = \frac{EI}{R}$.
Ploskovni moment I.
Primer: izračun ploskovnega momenta

a) pravokotnik, $I = ab^3/12$;
b) krožni presek $I = \pi R^4/4$;
c) tankostenski krožni presek $I = \pi R^3$t;
Izrek o paralelnih oseh, $\hat{I} = z_0^2 A + I$.
Primer: ploskovni moment I nosilca.
Zveza $\sigma = E\epsilon = \frac{M}{I} z$.
Primer: konzolni nosilec dolžine $l = 2m$ s tankostenskim krožnim presekom je točkovno obremenjen na svojem koncu. Določi debelino, da bo osna napetost pod dopustno vrednostjo.

6. 6. 18 Upogib nevtralne osi $w(x)$, aproksimacija $\frac{1}{R} = -\frac{d^2 w}{dx^2}$.
Enačba upogiba $\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2 w}{dx^2}\right) = q$.
Robni pogoji enačbe upogiba nosilca:
a) členkasta podpora;
b) konzolno vpetje;
c) prosti konec;
d) predpisana prečna obremenitev na koncu;
e) predpisan upogibni moment na koncu.
Primer: upogib konzolnega nosilca, ki je točkovno obremenjen na prostem koncu:
a) z uporabo upogibnega momenta;
b) z integracijo enačbe upogiba.
Primer:
a) upogib konzolnega nosilca z linijsko obremenitvijo;
b) upogib enostavno podprtega nosilca.
Primer: upogib konzolnega nosilca, ki je na prostem koncu podprt z elastično podporo.
Potek strižne napetosti.
Linearni ploskovni moment(statični moment) $S(z) = \int_{A*} \zeta \, dA$.
Izpeljava formule $\tau(z) = \frac{QS(z)}{Ib(z)}$.
Primer: strižna napetost na pravokotnem preseku:
a) izračun $S(z)$;
b) izračun strižne napetosti;
c) integracija strižne napetosti po preseku in kontrola enakosti $Q = \int_A \tau(z) \, dA$.
Strižna napetost tankostenskega nosilca.
Primer: nosilec z ležečim U presekom.
a) Izračun središča in I.
b) Izračun poteka strižnih napetosti na pokončnem delu nosilca.
c) Izpeljava formule $\tau(s) = \frac{QS(s)}{It(s)}$.
d) Izračun $\tau(s)$.
e) Strižni center.
Termalni upogib nosilca, razlika temperature po prerezu, termalni moment.
Primer: konzolni nosilec.
a) Izračun upogiba za linerano razliko temperature po preseku.
b) Izračun sile na prostem koncu, ki prepreči upogib.

Torzija
Zapis pomika na preseku $\vec{u} = \phi(x)(-z\vec{\jmath} + y\vec{k}) + \psi(y,z)\vec{\imath}$.
Izračun pripadajoče deformacije in napetosti.