2. izpit iz Osnov mehanike 10. julija 2018

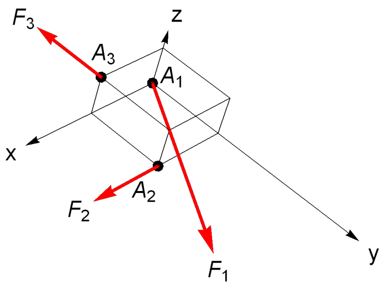
1. Za prostorski sistem sil podan na sliki s silami v smereh stranic in diagonale kvadra dimenzije $2\,\mathrm{m} \times 2\,\mathrm{m} \times 1\,\mathrm{m}$:

   (a) določi sile in njihova prijemališča;

   (b) izračunaj rezultanto sil in navora glede na pol v koordiantnem izhodišču;

   (c) izračunaj invarianto sistema sil in določi skupno prijemališče ali os sistema.

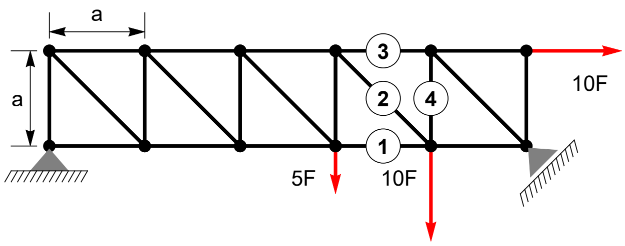
   Velikosti sil so $F_1 = 3\,\mathrm{kN}$, $F_2 = 1\,\mathrm{kN}$, $F_3 = 1\,\mathrm{kN}$.



2. Za podano paličje na sliki, desna podpora je drsna pod kotom $\pi/4$:

   (a) določi sile v podporah;

   (b) izračunaj označene sile palic.



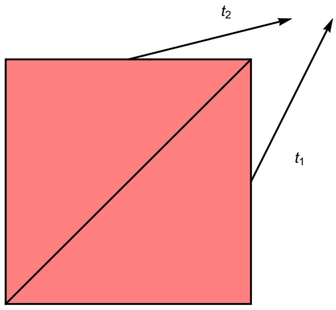
3. Na eni stranici kvadrata je dana napetosti $\vec{t}_2 = (40\vec{i} + 10\vec{j})$MPa, na drugi pa je velikost vektorja napetosti $\vec{t}_1$ enaka $20\sqrt{5}$MPa, glej skico.

   (a) Dopolni sliko z vektorjema napetosti na preostalih dveh stranicah.

   (b) Določi pripadajoči napetostni tenzor.

   (c) Skiciraj Mohrovo krožnico in določi ekstremalni normalni napetosti. Določi tudi maksimalno strižno napetost.

   (d) Določi normalno in strižno napetost na označeno diagonalo pravokotnika.

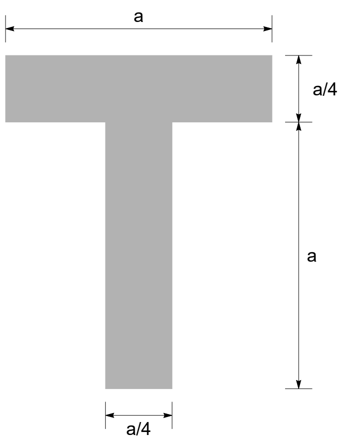


4. Enostavno podprti nosilec dolžine $l = 16\,\mathrm{cm}$ je točkovno obremenjen v razdalji $l_1 = 4\,\mathrm{cm}$ in $l_2 = 8\,\mathrm{cm}$ od leve podpore s silama $F_1 = F_0$ in $F_2 = 2F_0$ navpično navzdol.

   (a) Določi potek upogibnega momenta.

   (b) Za presek nosilca na skici dimenzij $a = 2\,\mathrm{cm}$ določi središče in ploskovni moment drugega reda.

   (c) Določi dopustno obremenitev F_0 tako, da je natezna napetost v nosilcu manjša od $\sigma_0 = 60\,\mathrm{MPa}$.



Rešitve

1. (a) Primejališča sil so $A_1(0,0,0)$, $A_2(2,2,0)$ in $A_3(2,0,1)$, sile pa so $\vec{F}_1 = (2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k})$kN, $\vec{F}_2 = \vec{\imath}\,$kN in $\vec{F}_3 = -\vec{\jmath}\,$kN.

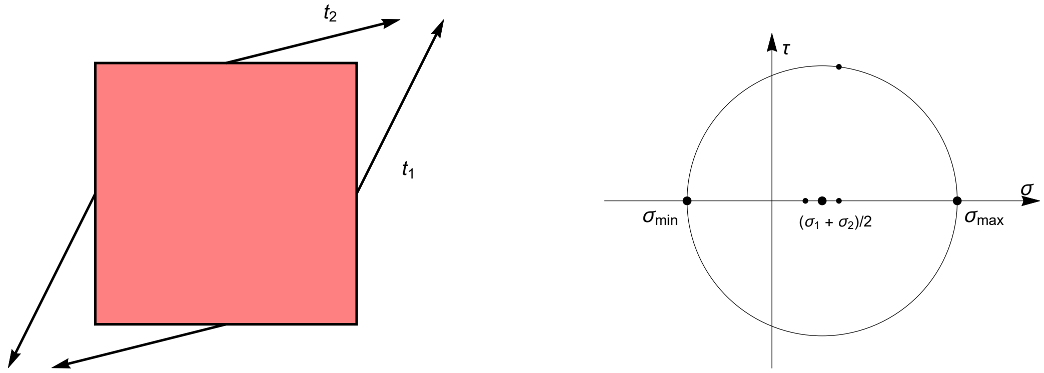
   (b) Rezultanta je
$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (3\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k})\,\text{kN}.$$
   Momenti so
$$\vec{OA}_1 \times \vec{F}_1 = \vec{0}, \quad \vec{OA}_2 \times \vec{F}_2 = -2\vec{k}\,\text{kNm}, \quad \vec{OA}_3 \times \vec{F}_3 = (\vec{\imath} - 2\vec{k}\,)\text{kNm}$$
   in tako
$$\vec{N} = \sum_{i=1}^{3} \vec{OA}_i \times \vec{F}_i = (\vec{\imath} - 4\vec{k})\,\text{kNm}.$$

   (c) Ker je $\vec{R} \cdot \vec{N} = -1\,(\text{kN})^2\text{m} \neq 0$, sistem nima skupnega prijemališča. Izračunajmo še os sistema. Dobimo jo po formuli
$$\vec{OP}_0 = \frac{\vec{R} \times \vec{N}}{\vec{R} \cdot \vec{R}} = \frac{1}{11}\left(-4\vec{\imath} + 13\vec{\jmath} - \vec{k}\right).$$

2. (a) Silo leve podpore zapišemo v obliki $\vec{A} = (A_1\vec{\imath} + A_2\vec{\jmath})/\sqrt{2}$, silo desne podpore pa $\vec{B} = B(-\vec{\imath} + \vec{\jmath})/\sqrt{2}$ Momentna enačba s polom v desni podpori se glasi
$$-5aA_2 + 10aF + 10aF - 10aF = 0 \Rightarrow B_2 = 2F,$$
   momentna enačba s polom v levi podpori pa
$$-10aF - 15aF - 40aF + \frac{1}{\sqrt{2}}5B = 0 \Rightarrow A = 13\sqrt{2}F.$$
   Ravnovesna enačba sil v vodoravni smeri je
$$A_1 - 13F + 10F = 0 \Rightarrow A_1 = 3F.$$

   (b) Sile palic 1,2 in 3 dobimo s prerezno metodo. Zapišimo ravnovesne pogoje za levi del paličja. Ravnovesje momentov s polom v presečišču palice 1 in 2 je
$$-aF_3 + 5aF - 4aA_2 = 0 \Rightarrow F_3 = -3F.$$
   Ravnovesje momentov s polom v presečišču palice 1 in 2 je
$$aF_1 - 3aA_2 + aA_1 = 0 \Rightarrow F_3 = 3F.$$
   Iz ravnovesja sil v vodoravni smeri potem sledi
$$F_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}F_2 + F_3 + A_1 = 0 \Rightarrow F_2 = -3\sqrt{2}F.$$
   Sedaj, ko poznamo v presečišču palice 1 in 2 sili F_1 in F_2 lahko določimo tudi F_4. Iz ravnovesja v navpični smeri sledi
$$\frac{1}{\sqrt{2}}F_2 + F_4 = 0 \Rightarrow F_4 = 3F.$$

3. (a) Dopolnjena skica napetosti je



Slika 1: Slika napetosti na robu in Mohrova krožnica.

(b) Ker je podan vektor napetosti na stranici z normalo v smeri osi y je

$$\underline{\underline{t}} = \begin{bmatrix} t_{11} & 40 \\ 40 & 10 \end{bmatrix} \text{MPa}.$$

Potem $\vec{t_1} = (x\vec{\imath} + 40\vec{\jmath})\text{MPa}$ in $|\, t_1 \,| = \sqrt{x^2 + 1600}\,\text{MPa}$. Iz pogoja $\left|\, \vec{t_1} \,\right| = 20\sqrt{5}\,\text{MPa}$ potem sledi $20\sqrt{5} = \sqrt{x^2 + 1600}$. Rešitev enačbe je $x = \pm 20$, iz slike pa sledi $x = 20$. Napetostni tenzor je tako

$$\underline{\underline{t}} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} 10\,\text{MPa}.$$

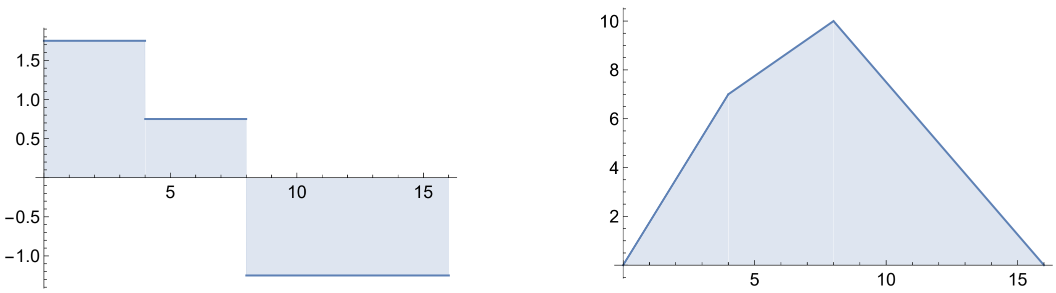
(c) Središče Mohrove krožnice je pri $\sigma = 15$, polmer krožnice pa je $5\sqrt{65}$. Exstremalni napetosti sta tako $\sigma_{max} = 5(3 + \sqrt{65})\text{MPa}$ in $\sigma_{min} = 5(3 - \sqrt{65})\text{MPa}$. Maksimalna strižna napetost je $\frac{1}{2}(\sigma_{max} - \sigma_{min}) = 5\sqrt{65}\,\text{MPa}$

(d) Normala na diagonalo je $\vec{n} = (-\vec{\imath} + \vec{\jmath})/\sqrt{2}$. Vektor napetosti je

$$\vec{t} = \underline{\underline{t}} \cdot \vec{n} = 5\sqrt{2}\,(2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath})\,\text{MPa}.$$

Normalna napetost je $t_n = \vec{t} \cdot \vec{n} = -25\,\text{MPa}$, strižna pa $\tau = \sqrt{\left|\,\vec{t}\,\right|^2 - t_n^2} = 5\,\text{MPa}$.

4. (a) Prvo določimo sili podpor. Označimo levo z A, desno z B. Iz ravnovesnih enačb dobimo $A = 7F_0/4$ in $B = 5F_0/4$. Skici poteka prečne sile in upogibnega momenta sta:



Slika 2: Potek prečne sile in upogibnega momenta.

Maksimalni upogibni moment je $M_{max} = 4\,\text{cm} \times A + 4\,\text{cm} \times (A - F_1) = 10F_0\text{cm}$.

(b) T nosilec je sestavljen iz dveh pravokotnikov. Določimo prvo masno središče. Postavimo pomožni koordinatni sistem na sredino stičišča pravokotnikov in usmerimo os z navzdol.

z koordinati masnega središča sta potem $z_1 = -a/8$ in $z_2 = 1/2$. Ploščini sta $A_1 = A_2 = a^2/4$. Masno središce je potem

$$z_0 = \frac{1}{A_1 + A_2}(z_1 A_1 + z_2 A_2) = \frac{3a}{16}.$$

Postavimo sedaj izhodišče koordinatnega sistema v izračunano masno središče. Novi koordinati masnih središč pravokotnikov sta $z_1^* = -5a/6$ in $z_2^* = 5a/6$. Ploskovna momenta posameznih pravokotnikov sta

$$I_1 = \frac{1}{12}a(a/4)^3 + A_1(z_1^*)^2 = \frac{79a^4}{3072}$$

in

$$I_2 = \frac{1}{12}(a/4)a^3 + A_2(z_2^*)^2 = \frac{139a^4}{3072}.$$

Potem

$$I = 109a^4/1536 = \frac{109}{96} \cdot 10^{-8}\mathrm{m}^4.$$

(c) Dopustno silo F_0 določa neenakost

$$\frac{M_{\max}}{I} z \leq \sigma_0.$$

Napetost pa je natezna na spodnjem delu preseka, zato $z = a - \frac{3a}{16} = \frac{13a}{16} = \frac{13}{8}\mathrm{cm}$. Potem po krajšem računu dobimo

$$F_0 \leq \frac{10900}{13}\mathrm{N} \doteq 839\,\mathrm{N}.$$