3. izpit iz Osnov mehanike 7. septembra 2018

1. Točka se giblje premočrtno po osi x. V času od 0 do t_1 se giblje enakomerno z brzino v_1, od t_1 do t_2 enakomerno pospešeno s pospeškom a_2, od t_2 do t_3 pa enakomerno zavira tako, da ima v času t_3 trenuto brzino nič.

   (a) Izračunaj pospešek zaviranja.

   (b) Izračunaj brzino in položaj v času t_1, t_2 in t_3.

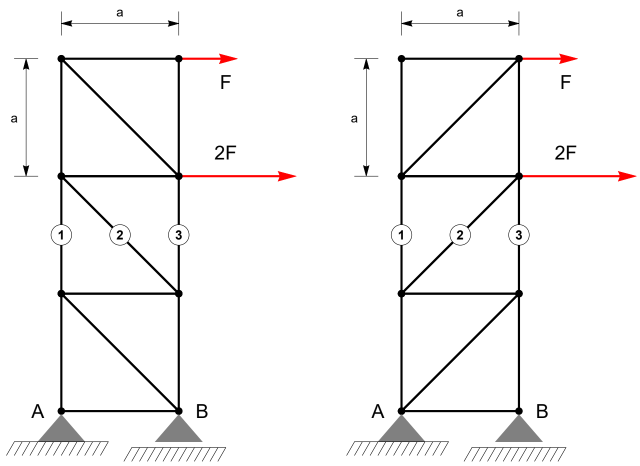
   (c) Za konkretne vrednosti $v_1 = 1\,\mathrm{m/s}$, $a_2 = 0.5\,\mathrm{m/s^2}$, $t_1 = 5\,\mathrm{s}$, $t_2 = 10\,\mathrm{s}$ in $t_3 = 17s$ skiciraj diagrame pospeška, hitrosti in položaja v odvisnosti od časa.

2. Podani sta dve paličji, glej skico.

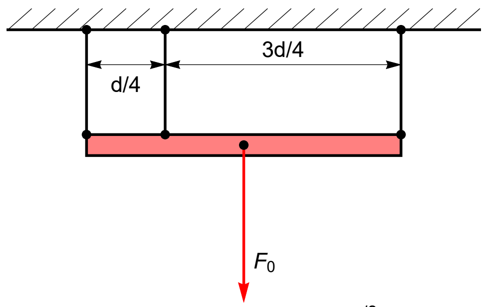
   (a) Izračunaj sile v podporah.

   (b) Določi sile označenih palic.

   (c) Ugotovi, katero paličje ima manjše kompresibilne sile označenih palic.



3. S stropa je na treh žici obešen togi nosilec dolžine d, glej sliko. Žice so enako dolge, imajo enak Youngov modul E in presek A. Za obremenitev na skici določi sile žic.

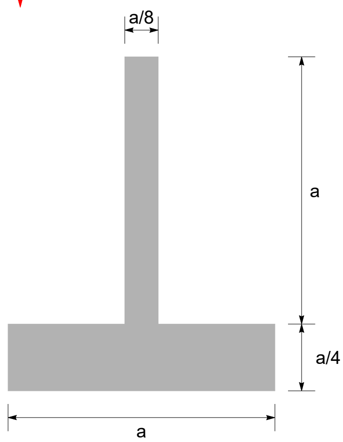


4. Enostavno podprti nosilec dolžine $l = 3\,\mathrm{m}$ je točkovno obremenjen v razdalji $l_1 = 1\,\mathrm{m}$ in $l_2 = 2\,\mathrm{m}$ od leve podpore s silama $F_1 = F_2 = F_0$ navpično navzdol.

   (a) Določi potek upogibnega momenta.

   (b) Za presek nosilca na skici dimenzij $a = 4\,\mathrm{cm}$ določi središče in ploskovni moment drugega reda.

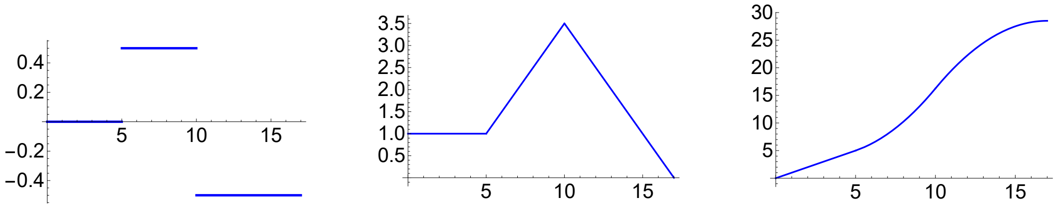
   (c) Določi dopustno obremenitev F_0 tako, da je natezna napetost v nosilcu manjša od $\sigma_0 = 40\,\mathrm{MPa}$.



Rešitve

1. (a) Hitrost od t_0 do t_1 je konstantna, položaj pa narašča linearno do $x_1 = v_1 t_1 = 5\,\mathrm{m}$, od t_1 do t_2 hitrost narašča linearno do $v_2 = v_1 + a_2(t_2 - t_1) = 3.5\,\mathrm{m/s}$. Položaj v času t_2 je $x_2 = \frac{1}{2}a_2(t_2-t_1)^2 + v_1(t_2-t_1) + x_1 = 16.25\,\mathrm{m}$. Od t_2 do t_3 hitrost enakomerno pada do 0. Torej $0 = a_3(t_3-t_2)+v_2$. Od tod sledi, da je pospešek zaviranje enak $a_3 = v_2/(t_3-t_2) = -0.5\,\mathrm{m/s^2}$. Položaj v času t_3 je $x_3 = \frac{1}{2}a_3(t_3-t_2)^2 + v_2(t_3-t_2) + x_2 = 28.5\,\mathrm{m}$.

   (b) Skice grafov pospeška, hitrosti in položaja so



Slika 1: Grafi pospeška, hitrosti in položaja v odvisnosti od časa.

2. (a) Prvo izračunamo sile podpor. Ker sta obe paličji enako obremenjeni, imata enake sile podpor. Sila v levi podpori je $\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j}$, v desni pa $\vec{B} = B_2\vec{j}$. Vsota sil v vodoravni smeri je nič. Potem $A_1 = -3F$. Iz momentne enačbe s polom v B sledi $-a \times A_2 - 2a \times 2F - 3a \times F = 0$ in od tod $A_2 = -7F$. Nadalje velja $A_2 + B_2 = 0$ in tako $B_2 = -A_2 = 7F$.

   (b) Izračunajmo sedaj sile označenih palic levega paličja. Paličje navidezno prerežemo skozi označene palice. Zgornji odrezani del je pod vplivom označenih palic v ravnovesju. Postavimo pol momentne enačbe v presek prve in druge palice. Potem $0 = -a \times F_3 - a \times F$ in tako $F_3 = -F$. Sedaj postavimo pol momentne enačbe v presek druge in tretje palice. Potem $0 = a \times F_1 - a \times 2F - 2a \times F$ in $F_1 = 4F$. Vsota sil v vodoravni smeri mora biti enaka nič. Torej $0 = F_2/\sqrt{2} + F + 2F$ in $F_2 = -3\sqrt{2}F$. Za kontrolo preverimo, če je vsota v navpični smeri tudi enaka nič. Izračunajmo $-F_1 - F_2/\sqrt{2} - F_3 = -4F + F + 3F = 0$. Tako smo za levo paličje dobili

$$F_1 = 4F, \quad F_2 = -3\sqrt{2}F, \quad F_3 = -F.$$

   Poglejmo sedaj še drugo paličje. Postavimo pol v presečišče prve in druge palice. Potem $0 = -a \times F_3 - a \times 2F - 2a \times F$ in $F_3 = -4F$.Za presečišče druge in tretje palice velja $0 = a \times F_1 - a \times F$. Torej $F_1 = F$. Ravnovesna enačba v vodoravni smeri je $0 = -F/\sqrt{2} + F + 2F$ in tako $F_2 = 3\sqrt{2}F$. Za kontrolo $-F_1 - F_2/\sqrt{2} - F_3 = -F - 3F + 4F = 0$. Sile desnega paličja so

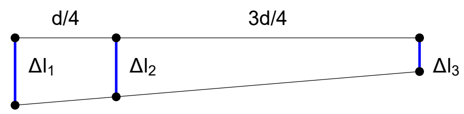
$$F_1 = F, \quad F_2 = 3\sqrt{2}F, \quad F_3 = -4F.$$

   (c) Ker je $-4 < -3\sqrt{2}$, ima levo paličje večje kompresibilne sile označenih palic, zato je desna postavitev boljša.

3. Sile žic označimo z F_1, F_2 in F_3. Ravnovesni enačbi, vsota sil v navpični smeri in ravnovesje momentov sta

$$0 = F_1 + F_2 + F_3 - F_0,$$
$$0 = -\frac{d}{2}F_0 + \frac{d}{4}F_2 + dF_3.$$

Sile žic so osne sile dane s Hookovim zakonom $F_i = AE\Delta l_i/l$, kjer je l nedeformirana dolžina žice, Δl_i pa njen raztezek, glej skico.



Ko obesimo nosilec, se žice raztegnejo in ker je nosilec tog, pritrdišča žic na nosilec ostanejo na isti premici. Smerni koeficient premice je določen s parom dveh točk. Ker je za oba para enak, sledi enačba

$$\frac{4(\Delta l_2 - \Delta l_1)}{d} = \frac{4(\Delta l_3 - \Delta l_2)}{3d}.$$

oziroma

$$4\Delta l_2 = 3\Delta l_1 + \Delta l_3.$$

Vstavimo v ravnovesne enačbe še Hookov zakon. Tako dobimo sistem

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{AE\Delta l_1}{l} + \frac{AE\Delta l_2}{l} + \frac{AE\Delta l_3}{l}, \\ \frac{d}{2}F_0 &= \frac{AEd\Delta l_2}{4l} + \frac{AEd\Delta l_3}{l}, \\ 4\Delta l_2 &= 3\Delta l_1 + \Delta l_3. \end{aligned}$$

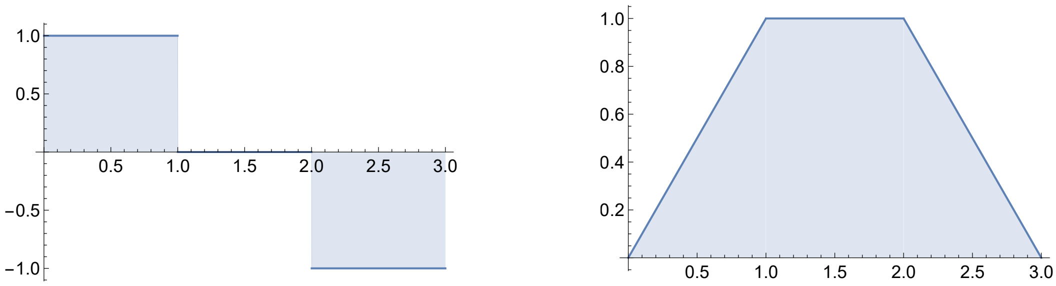
Rešitev sistema je

$$\Delta l_1 = \frac{21F_0}{26AE}, \quad \Delta l_2 = \frac{12F_0}{13AE}, \quad \Delta l_3 = \frac{33F_0}{26AE}.$$

Iskane sile pa so

$$F_1 = \frac{7F_0}{26}, \quad F_2 \frac{4F_0}{13}, \quad F_3 = \frac{11F_0}{26}.$$

4. (a) Prvo določimo sili podpor. Označimo levo z A, desno z B. Nosilec je obremenjen simetrično, zato dobimo takoj $A = B = F_0$. Prečna sila je odsekoma konstantna, v levi podpori je enaka sili podpore, v točkah obremenitve pa ima skok enak obremenitvi. Upogibni moment je odsekoma linearen, njegov odvod pa je enak prečni sili. Tako dobimo skici poteka prečne sile in upogibnega momenta.



Slika 2: Brezdimenzijski potek prečne sile in upogibnega momenta za $F_0 = 1$.

Maksimalni upogibni moment je $M_{max} = 1\,\text{cm} \times A = F_0\,\text{cm}$.

(b) T nosilec je sestavljen iz dveh pravokotnikov. Določimo prvo masno središče. Postavimo pomožni koordinatni sistem na sredino stičišča pravokotnikov in usmerimo os z navgor. z koordinati masnega središča sta potem $z_1 = -a/8$ in $z_2 = a/2$. Ploščini sta $A_1 = a^2/4$ in $A_2 = a^2/8$. Masno sredisče je potem

$$z_0 = \frac{1}{A_1 + A_2}(z_1 A_1 + z_2 A_2) = \frac{a}{12}.$$

Postavimo sedaj izhodišče koordinatnega sistema v izračunano masno središče. Novi koordinati masnih središč pravokotnikov sta $z_1^* = -5a/24$ in $z_2^* = 5a/12$. Ploskovna momenta posameznih pravokotnikov sta

$$I_1 = \frac{1}{12}a(a/4)^3 + A_1(z_1^*)^2 = \frac{7a^4}{576}$$

in

$$I_2 = \frac{1}{12}(a/8)a^3 + A_2(z_2^*)^2 = \frac{37a^4}{1152}.$$

Potem

$$I = 17a^4/384 = \frac{34}{3} \cdot 10^{-8}\mathrm{m}^4.$$

(c) Dopustno silo F_0 določa neenakost

$$\frac{M_{\mathrm{max}}}{I} z \leq \sigma_0.$$

Napetost pa je natezna na spodnjem delu preseka, zato $z = a/4 + a/12 = a/3 = \frac{4}{3}\,\mathrm{cm}$. Potem po krajšem računu dobimo

$$F_0 \leq 340\,\mathrm{N}.$$