1. izpit iz Osnov mehanike 27. junija 2019

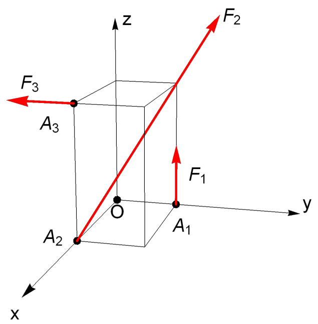
1. Za prostorski sistem sil podan na sliki s silami v smereh stranic in diagonale kvadra dimenzije $2\,\mathrm{m} \times 1\,\mathrm{m} \times 2\,\mathrm{m}$:

   (a) določi sile in njihova prijemališča;

   (b) izračunaj rezultanto sil in navora glede na pol v koordiantnem izhodišču O;

   (c) izračunaj invarianto sistema sil in določi skupno prijemališče ali os sistema.

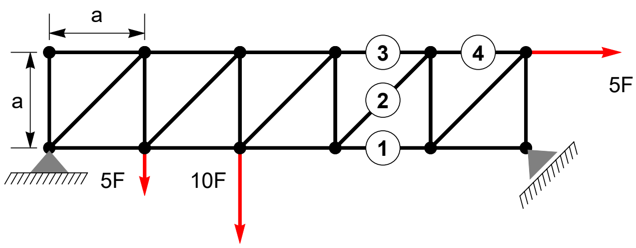
   Velikosti sil so $F_1 = 1\,\mathrm{kN}$, $F_2 = 3\,\mathrm{kN}$, $F_3 = 1\,\mathrm{kN}$.



2. Za podano paličje na sliki, desna podpora je drsna pod kotom $\pi/4$:

   (a) določi sile v podporah;

   (b) izračunaj označene sile palic.

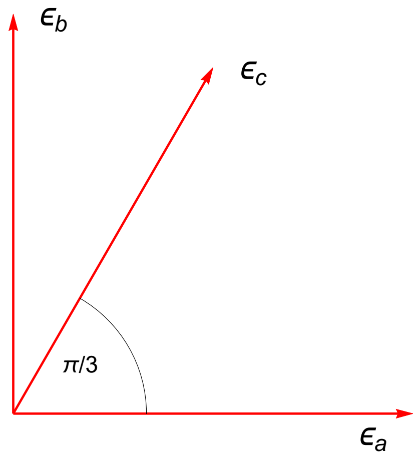


3. Za dani material smo z ekstenziometrom izmerili osne deformacije $\epsilon_a = 3\,\epsilon_0$, $\epsilon_b = 3\,\epsilon_0$ in $\epsilon_c = \epsilon_0(6-\sqrt{3})/2$ v označenih smereh na skici.

   (a) Določi infinitezimalni deformacijski tenzor.

   (b) Nariši Mohrovo krožnico ter določi ekstremalni osni deformaciji in njuni smeri.

   (c) Material je v ravninskem deformacijskem stanju. Za Lamejeva koeficienta $\lambda = 80\mathrm{GPa}$ in $\mu = 80\mathrm{GPa}$ izračunaj pripadajoči napetostni tenzor.



4. Enostavno podprti nosilec dolžine $l = 10\,\mathrm{cm}$ je točkovno obremenjen v razdaljah $l_1 = l/6$, $l_2 = l/2$ in $l_3 = 5l/6$ od leve podpore s silama $F_1 = F_2 = F_0$ in $F_3 = 2F_0$ navpično navzdol.

   (a) Določi potek upogibnega momenta.

   (b) Nosilec je votel, ima kvadratni presek dimenzije $a\times a$ in notranjo debelino stene $t = a/20$. Izračunaj ploskovni moment preseka. Določi njegovo vrednost za $a = 2\,\mathrm{cm}$.

   (c) Določi dopustno obremenitev F_0 tako, da bo napetost v nosilcu po absolutni velikosti manjša od $\sigma_0 = 37.5\,\mathrm{MPa}$.

Rešitve

1. (a) Primejališča sil so $A_1(0,1,0)$, $A_2(2,0,0)$ in $A_3(2,0,2)$, sile pa so $\vec{F}_1 = \vec{k}\,\mathrm{kN}$, $\vec{F}_2 = (-2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k})\mathrm{kN}$ in $\vec{F}_3 = -\vec{\jmath}\mathrm{kN}$.

   (b) Rezultanta je
$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (-2\vec{\imath} + 3\vec{k})\mathrm{kN}.$$
   Momenti so
$$\vec{OA}_1 \times \vec{F}_1 = \vec{\imath}\mathrm{kNm}, \quad \vec{OA}_2 \times \vec{F}_2 = (-4\vec{\jmath} + 2\vec{k})\,\mathrm{kNm}, \quad \vec{OA}_3 \times \vec{F}_3 = (2\vec{\imath} - 2\vec{k})\,\mathrm{kNm}$$
   in tako
$$\vec{N} = \sum_{i=1}^{3} \vec{OA}_i \times \vec{F}_i = (3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath})\mathrm{kNm}.$$

   (c) Ker je $\vec{R} \cdot \vec{N} = -6\,(\mathrm{kN})^2\mathrm{m} \neq 0$, sistem nima skupnega prijemališča. Izračunajmo še os sistema. Dobimo jo po formuli
$$\vec{OP}_0 = \frac{\vec{R} \times \vec{N}}{\vec{R} \cdot \vec{R}} = \frac{1}{13}(12\vec{\imath} + 9\vec{\jmath} + 8\vec{k})\mathrm{m}.$$

2. (a) Sila leve podpore je $\vec{A} = A_1\vec{\imath} + A_2\vec{\jmath}$, desne pa $\vec{B} = B(-\vec{\imath} + \vec{\jmath})/\sqrt{2}$. Momentna enačba s polom v desni podpori se glasi
$$-5a \times A_2 + 4a \times 5F + 3a \times 10F - a \times 5F = 0 \Rightarrow A_2 = 9F,$$
   momentna enačba s polom v levi podpori pa je
$$5a \times \frac{1}{\sqrt{2}}B - a \times 5F - 2a \times 10F - a \times 5F = 0 \Rightarrow B = 6\sqrt{2}F.$$
   Ravnovesna enačba sil v vodoravni smeri je
$$A_1 + 5F - \frac{1}{\sqrt{2}}B = 0 \Rightarrow A_1 = F.$$

   (b) Sile palic 1,2 in 3 dobimo s prerezno metodo. Zapišimo ravnovesne pogoje za levi del paličja. Ravnovesje momentov s polom v presečišču palice 2 in 3 je
$$a \times F_1 + 2a \times 10F + 3a \times 5F - 4a \times 9F + a \times F = 0 \Rightarrow F_1 = 0.$$
   Ravnovesje momentov s polom v presečišču palice 1 in 2 je
$$-a \times F_3 + a \times 10F + 2a \times 5F - 3a \times 9F = 0 \Rightarrow F_3 = -7F.$$
   Iz ravnovesja sil v navpični smeri potem sledi
$$\frac{1}{\sqrt{2}}F_2 + 9F - 5F - 10F = 0 \Rightarrow F_2 = 6\sqrt{2}F.$$
   Sedaj, ko poznamo v presečišču palice 2 in 3 sili F_2 in F_3 lahko določimo tudi F_4. Iz ravnovesja v vodoravni smeri sledi
$$-F_3 - \frac{1}{\sqrt{2}}F_2 + F_4 = 0 \Rightarrow F_4 = -F.$$

3. (a) Postavimo koordinatni sistem z osjo x v smeri deformacije ϵ_a in osjo y v smeri ϵ_b. Potem

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} 3\epsilon_0 & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{12} & 3\epsilon_0 \end{bmatrix}.$$

Določiti moramo še ϵ_{12}. Določimo ga lahko s pomočjo formule

$$\epsilon_c = \frac{1}{2}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + \frac{1}{2}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22}) \cos 2\varphi + \epsilon_{12} \sin 2\varphi,$$

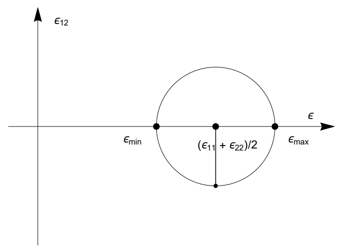
kjer je $\varphi = \pi/3$. Tako dobimo enačbo

$$\epsilon_0(6 - \sqrt{3})/2 = 3\epsilon_0 + \epsilon_{12} \sin \frac{2\pi}{3}.$$

Rešitev enačbe je $\epsilon_{12} = -\epsilon_0$. Deformacijski tenzor je

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(b) Središče Mohrove krožnice je v $\frac{1}{2}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) = 3\epsilon_0$, polmer pa je $\sqrt{\left(\frac{1}{2}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})\right)^2 + \epsilon_{12}^2} = \epsilon_0$.



Iz slike preberemo $\epsilon_{\max} = 4\epsilon_0$ in $\epsilon_{\min} = 2\epsilon_0$, smer maksimalne osne deformacije pa je $\varphi_{\max} = -\pi/4$.

(c) napetostni tenzor je dan z

$$\underline{\underline{t}} = 2\mu\underline{\underline{\epsilon}} + \lambda \mathrm{Sl}(\underline{\underline{\epsilon}})\underline{\underline{I}}$$

Potem je

$$\underline{\underline{t}} = \left(2\begin{bmatrix} 3\epsilon_0 & -1 \\ -1 & 3\epsilon_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6\epsilon_0 & 0 \\ 0 & 6\epsilon_0 \end{bmatrix}\right) 80\,\mathrm{GPa} = 2\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} 80\epsilon_0 \mathrm{GPa}.$$

4. (a) Prvo določimo silo podpor. Levo označimo z A, desno z B. Ravnovesje momentov s polom v levi podpori nam da

$$-\frac{l}{6}F_0 - \frac{l}{2}F_0 - \frac{5l}{3}F_0 + lB = 0 \Rightarrow B = \frac{7}{3}F_0,$$

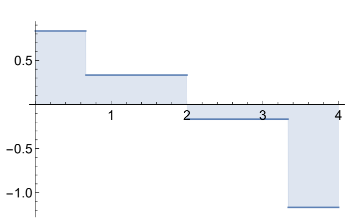
iz ravnovesja momentov s polom v desni podpori pa sledi

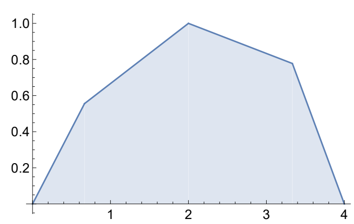
$$\frac{5l}{6}F_0 + \frac{l}{2}F_0 + \frac{l}{3}F_0 - lA = 0 \Rightarrow A = \frac{5}{3}F_0.$$

Pravilnost računa potrdi revnovesje sil v vertikalni smeri $A + B - 3F = 0$.

Nosilec je točkovno obremenjen, prečna sila v levi podpori je enaka sili podpore, v točkah obremenitve pa ima skok enak obremenitvi. Tako velja $Q(x) = \frac{5}{3}F_0$ za $x \in [0, l/6)$, $Q(x) = \frac{2}{3}F_0$ za $x \in (l/6, l/2)$, $Q(x) = -\frac{1}{3}F_0$ za $x \in (l/2, 5l/6)$ in $Q(x) = -\frac{7}{3}F_0$ za $x \in (5l/6, l)$. Upogibni moment narašča odsekoma linearno, pri $x = l/6$ dosže vrednost $M = \frac{5}{18}lF_0$, pri $x = l/2$ je $M = \frac{5}{18}lF_0 + \frac{2}{3}F_0 \times (\frac{1}{2} - \frac{1}{6}) = \frac{1}{2}lF_0$. Maksimalni upogibni moment je tako

$$M_{max} = \frac{1}{2}lF_0.$$





(b) Ploskovni moment kvadrata s stranico a je $\frac{1}{12}a^4$. Potem je ploskovni moment votlega preseka enak

$$I = \frac{1}{12}a^4 - \frac{1}{12}(a-2t)^4 = 4.585\,33 \times 10^{-9}\mathrm{m}^4.$$

Omenimo, da je za tankostensko aproksimacijo

$$I \approx \frac{1}{12}\left(a^4 - a^4 + 4a^3 2t\right) = \frac{2}{3}a^3 t = \frac{1}{30}a^4 = 5.333\,33 \times 10^{-9}\mathrm{m}^4.$$

Tankostenska aproksimacija torej v tem primeru ni dobra.

(c) Osna napetost nosilca je dana s formulo $\sigma = \frac{M}{I}z$. Ker je presek simetričen, je ekstremalna vrednost dosežena pri $\pm\frac{1}{2}a$. Veljati mora

$$\sigma_0 \geq \frac{M_{\max}a}{2I} \geq \frac{alF_0}{4I}.$$

Od tod sledi

$$F_0 \leq \frac{4I\sigma_0}{al} = 343.9\mathrm{N}.$$