2. izpit iz Osnov mehanike 5. julija 2019

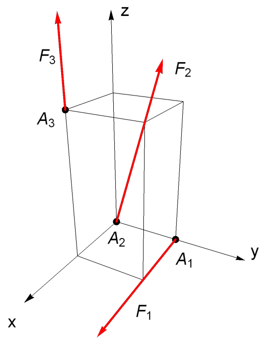
1. Za prostorski sistem sil podan na sliki s silami v smereh stranic in diagonale kvadra dimenzije $1\,\mathrm{m} \times 1\,\mathrm{m} \times 2\,\mathrm{m}$:

   (a) določi sile in njihova prijemališča;

   (b) izračunaj rezultanto sil in navora glede na pol v koordiantnem izhodišču O;

   (c) izračunaj invarianto sistema sil in določi skupno prijemališče ali os sistema.

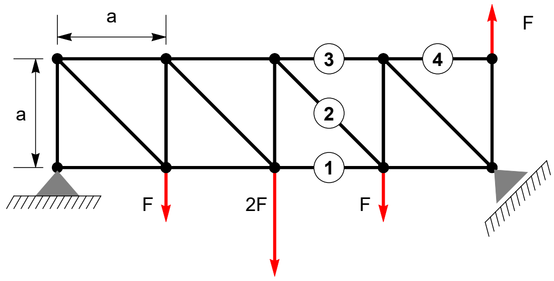
   Velikosti sil so $F_1 = F_0$, $F_2 = \sqrt{6}F_0$, $F_3 = 2F_0$.



2. Za podano paličje na sliki, desna podpora je drsna pod kotom $\pi/4$:

   (a) določi sile v podporah;

   (b) izračunaj označene sile palic.



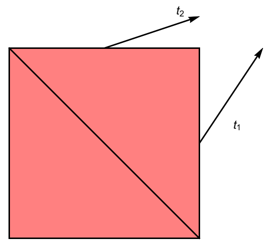
3. Na eni stranici kvadrata je dana napetosti $\vec{t_1} = (2\vec{i} + 3\vec{j})\sigma_0$, na drugi pa je velikost vektorja napetosti $\vec{t_2}$ enaka $\sqrt{10}\sigma_0$, glej skico.

   (a) Dopolni sliko z vektorjema napetosti na preostalih dveh stranicah.

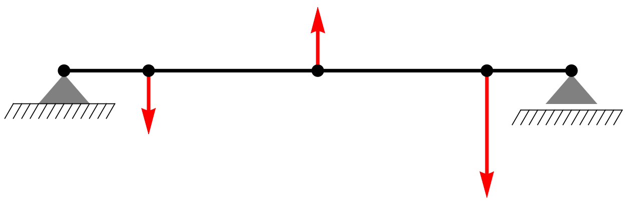
   (b) Določi pripadajoči napetostni tenzor.

   (c) Skiciraj Mohrovo krožnico in določi ekstremalni normalni napetosti. Določi tudi maksimalno strižno napetost.

   (d) Določi normalno in strižno napetost na označeno diagonalo pravokotnika.



4. Enostavno podprti nosilec dolžine $l = 1\,\mathrm{m}$ je točkovno obremenjen v razdaljah $l_1 = l/6$, $l_2 = l/2$ in $l_3 = 5l/6$ od leve podpore s silama $F_1 = F_0$, $F_2 = -F_0$ in $F_3 = 2F_0$ tako kot kaže skica.



   (a) Določi potek prečne sile in upogibnega momenta.

   (b) Nosilec je votel in ima krožni presek s polmerom $a = 2\,\mathrm{cm}$ in debelino stene $\delta = 2\,\mathrm{mm}$. Izračunaj ploskovni moment preseka.

   (c) Določi dopustno obremenitev F_0 tako, da bo napetost v nosilcu po absolutni velikosti manjša od $\sigma_0 = 100\,\mathrm{MPa}$.

Rešitve

1. (a) Primejališča sil so $A_1(0,1,0)$, $A_2(0,0,0)$ in $A_3(1,0,2)$, sile pa so $\vec{F}_1 = F_0\vec{\imath}$, $\vec{F}_2 = (\vec{\imath}+\vec{\jmath}+2\vec{k})F_0$ in $\vec{F}_3 = 2F_0\vec{k}$.

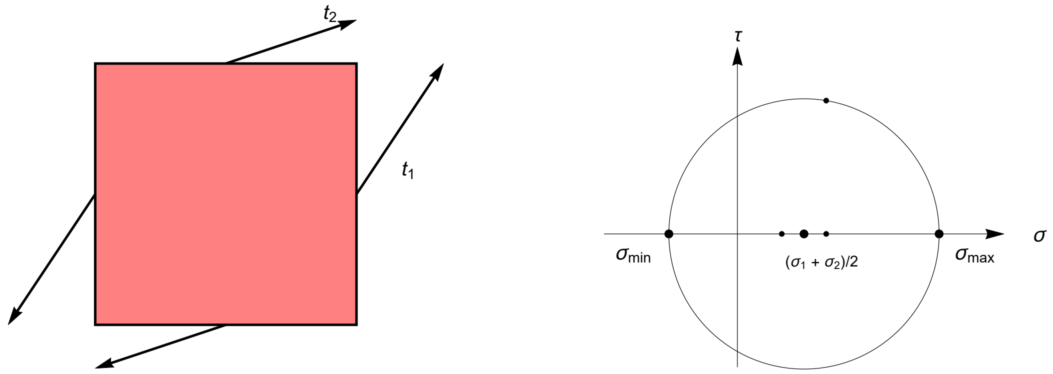
   (b) Rezultanta je
$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (2\vec{\imath}+\vec{\jmath}+4\vec{k})F_0.$$
   Momenti so
$$O\vec{A}_1 \times \vec{F}_1 = -F_0\vec{k}, \quad O\vec{A}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{0}, \quad O\vec{A}_3 \times \vec{F}_3 = -2F_0\vec{\jmath}$$
   in tako
$$\vec{N} = \sum_{i=1}^{3} O\vec{A}_i \times \vec{F}_i = (-2\vec{\jmath}-\vec{k})F_0.$$

   (c) Ker je $\vec{R}\cdot\vec{N} = -6F_0^2 \neq 0$, sistem nima skupnega prijemališča. Izračunajmo še os sistema. Dobimo jo po formuli
$$O\vec{P}_0 = \frac{\vec{R}\times\vec{N}}{\vec{R}\cdot\vec{R}} = \frac{1}{21}(7\vec{\imath}+2\vec{\jmath}-4\vec{k})\mathrm{m}.$$

2. (a) Sila leve podpore je $\vec{A} = A_1\vec{\imath}+A_2\vec{\jmath}$, desne pa $\vec{B} = B(-\vec{\imath}+\vec{\jmath})/\sqrt{2}$. Momentna enačba s polom v desni podpori se glasi
$$-4a \times A_2 + 3a \times F + 2a \times 2F + a \times F = 0 \Rightarrow A_2 = 2F,$$
   momentna enačba s polom v levi podpori pa je
$$4a \times \frac{1}{\sqrt{2}}B + 4a \times F - a \times F - 2a \times 2F - 3a \times F = 0 \Rightarrow B = \sqrt{2}F.$$
   Ravnovesna enačba sil v vodoravni smeri je
$$A_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}B = 0 \Rightarrow A_1 = F.$$

   (b) Sile palic 1,2 in 3 dobimo s prerezno metodo. Zapišimo ravnovesne pogoje za levi del paličja. Ravnovesje momentov s polom v presečišču palice 2 in 3 je
$$a \times F_1 + a \times A_1 + a \times F - 2a \times A_2 = 0 \Rightarrow F_1 = 2F.$$
   Ravnovesje momentov s polom v presečišču palice 1 in 2 je
$$-a \times F_3 + a \times 2F + 2a \times F - 3a \times A_2 = 0 \Rightarrow F_3 = -2F.$$
   Iz ravnovesja sil v vodoravni smeri potem sledi
$$\frac{1}{\sqrt{2}}F_2 + F_1 + F_3 + A_1 = 0 \Rightarrow F_2 = -\sqrt{2}F.$$
   Za kontrolo preverimo, da je vsota sil v navpični smeri enaka nič
$$-\frac{1}{\sqrt{2}}F_2 - F - 2F + A_2 = 0.$$
   Sila palice F_4 pa je očitno enaka nič.

3. (a) Dopolnjena skica napetosti je



Slika 1: Slika napetosti na robu in Mohrova krožnica.

(b) Ker je podan vektor napetosti na stranici z normalo v smeri osi x je

$$\underline{\underline{t}} = \sigma_0 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & t_{22} \end{bmatrix}.$$

Potem $\vec{t}_2 = \underline{\underline{t}}\vec{\jmath} = \sigma_0(3\vec{\imath} + t_{22}\vec{\jmath})$. Velikost je $|\, t_2 \,| = \sqrt{9 + t_{22}^2}$. Iz enačbe $\left|\, \vec{t}_2 \,\right| = \sigma_0\sqrt{10}$ in slike potem sledi $t_{22} = \sigma_0$. Napetostni tenzor je tako

$$\underline{\underline{t}} = \sigma_0 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Središče Mohrove krožnice je pri $\sigma = 3\sigma_0/2$, polmer krožnice pa je $\sqrt{37}\sigma_0/2$. Exstremalni napetosti sta tako $\sigma_{\max} = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{37})\sigma_0$ in $\sigma_{min} = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{37})\sigma_0$. Maksimalna strižna napetost je $\frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) = \frac{1}{2}\sqrt{37}\,\sigma_0$.

(d) Normala na diagonalo je $\vec{n} = (\vec{\imath} + \vec{\jmath})/\sqrt{2}$. Vektor napetosti je

$$\vec{t} = \underline{\underline{t}} \cdot \vec{n} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{2}} \left(5\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}\right).$$

Normalna napetost je $t_n = \vec{t} \cdot \vec{n} = \frac{9}{2}\sigma_0$, strižna pa $\tau = \sqrt{\left|\, \vec{t} \,\right|^2 - t_n^2} = \sigma_0/2$.

4. (a) Prvo določimo silo podpor. Levo označimo z A, desno z B. Ravnovesje momentov s polom v levi podpori nam da

$$-\frac{l}{6}F_0 + \frac{l}{2}F_0 - \frac{5l}{3}F_0 + lB = 0 \Rightarrow B = \frac{4}{3}F_0,$$

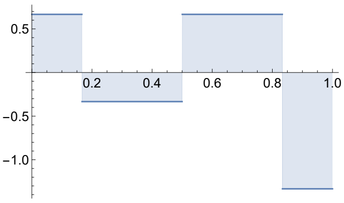
iz ravnovesja momentov s polom v desni podpori pa sledi

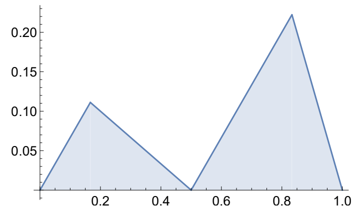
$$\frac{5l}{6}F_0 - \frac{l}{2}F_0 + \frac{l}{3}F_0 - lA = 0 \Rightarrow A = \frac{2}{3}F_0.$$

Pravilnost računa potrdi revnovesje sil v vertikalni smeri $A + B - 2F = 0$.

Nosilec je točkovno obremenjen, prečna sila v levi podpori je enaka sili podpore, v točkah obremenitve pa ima skok enak obremenitvi. Tako velja $Q(x) = \frac{2}{3}F_0$ za $x \in [0, l/6)$, $Q(x) = -\frac{1}{3}F_0$ za $x \in (l/6, l/2)$, $Q(x) = \frac{2}{3}F_0$ za $x \in (l/2, 5l/6)$ in $Q(x) = -\frac{4}{3}F_0$ za $x \in (5l/6, l)$. Upogibni moment narašča odsekoma linearno, pri $x = l/6$ dosže vrednost $M = \frac{1}{9}lF_0$, pri $x = l/2$ je $M = \frac{1}{9}lF_0 - \frac{1}{3}F_0 \times (\frac{1}{2} - \frac{1}{6}) = 0$, pri $x = 5l/6$ pa je $M = \frac{2}{9}lF_0$. Maksimalni upogibni moment je tako

$$M_{\max} = \frac{2}{9}lF_0.$$





(b) Ploskovni moment kroga s polemrom r je $\frac{1}{4}\pi r^4$. Potem je ploskovni moment votlega krožnega preseka enak

$$I = \frac{1}{4}\pi(a^4 - (a-\delta)^4) = 4.321\,57 \times 10^{-8}\mathrm{m}^4.$$

Tankostenska aproksimacija nam da

$$I \approx \pi\frac{1}{4}\left(a^4 - a^4 + 4a^3\delta\right) = \pi a^3\delta = 5.026\,55 \times 10^{-8}\mathrm{m}^4.$$

Tankostenska aproksimacija ni dovolj dobra.

(c) Osna napetost nosilca je dana s formulo $\sigma = \frac{M}{I}z$. Ker je presek simetričen, je ekstremalna vrednost dosežena pri $\pm r$. Veljati mora

$$\sigma_0 \geq \frac{M_{\max}a}{2I} \geq \frac{2rlF_0}{9I}.$$

Od tod sledi

$$F_0 \leq \frac{9I\sigma_0}{2rl} = 972.354\mathrm{N}.$$