2. kolokvij iz Osnov mehanike, 30. maja 2019

1. Vodoraven enostavno podprti nosilec dolžine $4a$ je točkovno podprt v točkah P_1, P_2 in P_3, ki so oddaljene od levega krajišča nosilca za a, $2a$ in $3a$. Sile v podporah so usmerjene vertikalno navzdol in so po velikosti enake $F_1 = F_0$, $F_2 = 2F_0$ in $F_3 = 3F_0$.

   (a) Določi sili podpor.

   (b) Skiciraj potek prečne sile.

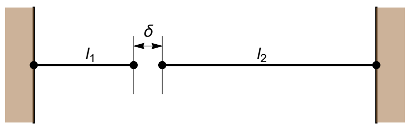
   (c) Skiciraj potek upogibnega momenta in določi položaj in vrednost njegovega maksimuma.

2. Med palicama, ki sta pritrjeni na togi steni je razmak δ, glej skico. Palici sta elastični, imata enak presek S in enak Youngov modul E, dolžini pa sta l_1 in $l_2 = 2l_1$. Palici spojimo. Pri tem se leva palica raztegne za Δl_1, desna pa za Δl_2.

   (a) Izračunaj razmerje $\Delta l_1 : \Delta l_2$.

   (b) Določi sili v palicah.

   (c) Za koliko moramo segrete palici, da bo napetost v palicah enaka nič?

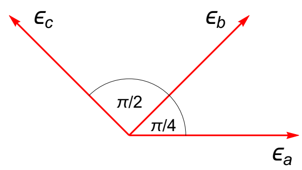


3. Za dani material smo z ekstenziometrom izmerili osne deformacije $\epsilon_\mathrm{a} = 0$, $\epsilon_\mathrm{b} = (-1+\sqrt{3})\,\epsilon_0$ in $\epsilon_\mathrm{c} = -(1+\sqrt{3})\epsilon_0$ v označenih smereh na skici.

   (a) Določi infinitezimalni deformacijski tenzor.

   (b) skiciraj Mohrovo krožnico.

   (c) Izračunaj ektremalni osni deformaciji in pripadajoči smeri.



4. V elastičnem telesu je homogeno napetostno stanje z napetostnim tenzorjem

$$\underline{\underline{t}} = \begin{bmatrix} 20 & 10 & 0 \\ 10 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \mathrm{MPa}.$$

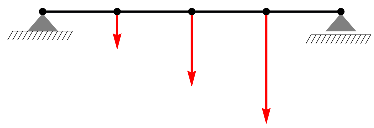
   (a) Določi vektor napetosti na ravnino z normalo v smeri vektorja $\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$.

   (b) Izračunaj normalno in strižno napetost na to ravnino.

   (c) Poišči pripadajočo elastično deformacijo, če je material izotropičen in je $E = 120\,\mathrm{GPa}$ ter $\nu = 1/3$.

Rešitve

1. (a) Prvo narišimo obremenjeni nosilec. Silo leve podpore A dobimo iz ravnovesja momentov v polu desne podpore. Velja

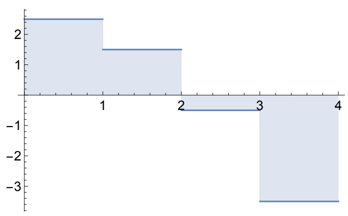


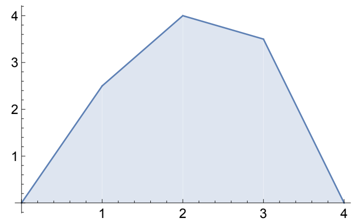
$$-4aA + 3aF_0 + 4aF_0 + 3aF_0 = 0.$$

Od tod $A = 5F_0/2$. Podobno dobimo silo desne podpore $B = 7F_0/2$.

(b) Potek prečne sile je odsekoma konstanten. Njena vrednost v levem krajišču je enaka sili podpore A, nato pa ima v vsaki točki obremenitve skok.

(c) Upogibni moment je na krajiščih enak nič, izven točk obremenitev pa velja $dM/dx = Q$. Moment je potemtakem odsekoma linearen. Upogibni moment je maksimalen pri $x = 2a$. Imamo $M(x = a) = 5aF_0/2$ in potem $M_{\max} = M(x = 2a) = 5aF_0/2 + 3aF_0/2 = 4aF_0$.





2. (a) Sili F_1 in F_2 v palicah sta enaki. Potem velja

$$F_1 = ES\frac{\Delta l_1}{l_1} = ES\frac{\Delta l_2}{l_2} = F_2.$$

Upoštevajmo, da je $l_2 = 2l_1$. Potem je $\Delta l_1 = \frac{\Delta l_2}{2}$ in $\Delta l_1 : \Delta l_2 = 1 : 2$.

(b) Za pomika palic velja $\Delta l_1 + \Delta l_2 = \delta$ in tako $\Delta l_1 = \delta/3$. Sila je potem enak

$$F = ES\frac{\delta}{3l_1}.$$

(c) V palicah ne bo napetosti, če palici segrejemo natanko toliko, da v prvotnem položaju ne bosta razmaknjeni. Veljati mora torej $\alpha\Delta T = \delta/3l_1$ in tako

$$\Delta T = \frac{\delta}{3l_1\alpha}.$$

3. (a) Če postavimo koordinatni sistem tako, da os x kaže v smeri deformacije ϵ_a, ima deformacijski tenzor v tem koordinatnem sistemu obliko

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} \end{bmatrix}.$$

Neznana ϵ_{12} in ϵ_{22} določimo s pomočjo formule

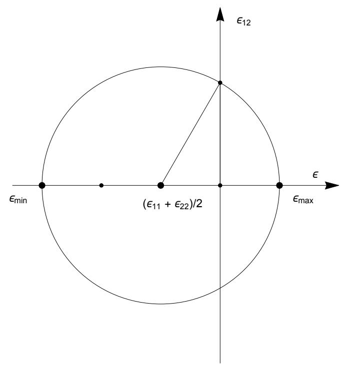
$$\epsilon_{b,c} = \frac{1}{2}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + \frac{1}{2}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})\cos 2\varphi + \epsilon_{12}\sin 2\varphi,$$

kjer je $\varphi = \pi/4$ oziroma $\varphi = 3\pi/4$. Tako dobimo enačbi

$$(-1 + \sqrt{3})\epsilon_0 = \frac{1}{2}\epsilon_{22} + \epsilon_{12}$$
$$-(1 + \sqrt{3})\epsilon_0 = \frac{1}{2}\epsilon_{22} - \epsilon_{12}.$$

Rešitev sistema je $\epsilon_{22} = -2\epsilon_0$ in $\epsilon_{12} = \sqrt{3}\epsilon_0$. Deformacijski tenzor je tako

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -2 \end{bmatrix}.$$



(b) Središče Mohrove krožnice je v $\frac{1}{2}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) = -\epsilon_0$, polmer pa je $\sqrt{\left(\frac{1}{2}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})\right)^2 + \epsilon_{12}^2} = 2\epsilon_0$.

(c) Ekstremalni osni preberemo z Mohrove krožnice ali pa izračunamo po formuli

$$\epsilon_{\max} = \frac{1}{2}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + \sqrt{\left(\frac{1}{2}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})\right)^2 + \epsilon_{12}^2}$$

Tako dobimo $\epsilon_{\max} = \epsilon_0$ in $\epsilon_{\min} = -3\epsilon_0$. Smer dobimo po formuli

$$\tan 2\varphi = \frac{2\epsilon_{12}}{\epsilon_{11} - \epsilon_{22}} = \sqrt{3}.$$

Potem $\varphi_1 = \pi/6$ in $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi/2 = 2\pi/3$. Iz skice Mohrove krožnice vidimo, da je $\pi/6$ kot maksimalne osne deformacije.

4. (a) Enotski vektor v smeri $\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$ je $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}\right)$. Vektor napetosti je potem

$$\vec{t} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 20 & 10 & 0 \\ 10 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{MPa} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 30 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix} \text{MPa}.$$

(b) Normalna napetost je $t_n = \vec{t} \cdot \vec{n} = \frac{40}{3}$MPa. Strižna napetost je

$$t_s = \sqrt{\vec{t} \cdot \vec{t} - t_n^2} = \frac{10}{3}\sqrt{26}\text{MPa}$$

(c) Deformacijski tenzor dobimo po formuli

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{t}} - \frac{\nu}{E}(\text{Sl}\,\underline{\underline{t}})\underline{\underline{I}}.$$

Izračunajmo

$$\frac{1+\nu}{E} = \frac{1}{90\text{GPa}} \qquad \frac{\nu}{E} = \frac{1}{360\text{GPa}}.$$

Potem je

$$\underline{\underline{\epsilon}} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 1/6 & 1/9 & 0 \\ 1/9 & 1/18 & 0 \\ 0 & 0 & -1/6 \end{bmatrix}$$