OSNOVE MEHANIKE & TEHNIČNA MEHANIKA - sinopsis predavanj v šolskem letu 2019/2020

Metalurške tehnologije & Geotehnologija in rudarstvo NTF : Viskokošolski strokovni študij

26. 2. 20 KINEMATIKA IN DINAMIKA

Kinematika

Položaj točke P, opazovalec O, kartezični koordinatni sistem x, y, z.
Koordinate točke $P(x, y, z)$, krajevni vektor $P - O = \vec{OP} = \vec{r}$ od izhodišča O do točke P.
V kartezičnem KS so komponente krajevnega vektorja $\vec{OP}$ enake koordinatam točke P:

$$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}.$$

Osnovne vektorskega računa
i) bazni vektorji $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$;
ii) seštevanje, odštevanje vektorjev, množenje vektorjev s skalarjem;
iii) velikost vektorja;
iv) skalarni produkt;
v) vektorski produkt.

Gibanje, zapis $\vec{r} = \vec{r}(t)$.
Vektor hitrosti: trenutna sprememba položaja po času, oziroma odvod krajevnega vektorja po času.
Kartezični zapis

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}.$$

Geometrijski pomen vektorja hitrosti: vektor hitrosti je tangentni vektor na tir gibanja. Velikost vektorja hitrosti je brzina.
Vektor pospeška: trenutna sprememba vektorja hitrosti po času, oziroma odvod vektorja htrosti po času.
Kartezični zapis

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k}.$$

Geometrijski pomen vektorja pospeška: smer zavijanja.
Osnovne diferencialnega računa:
i) $(f + g)^{\cdot} = \dot{f} + \dot{g}$;
ii) $(fg)^{\cdot} = \dot{f}g + f\dot{g}$;
iii) $f(t) = konst \iff \dot{f} = 0$;
iv) odvod afine funkcije: $f(t) = \alpha + \beta t + x_0 \Rightarrow \dot{f} = \beta$.
v) odvod kvadratne funkcije: $f(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2 \Rightarrow \dot{f} = \beta + 2\gamma t$.
iv) Odvod sinusa, kosinusa: $(\sin \omega t)^{\cdot} = \omega \cos \omega t$, $(\cos \omega t)^{\cdot} = -\omega \sin \omega t$.

Pojem pospeševanja, zaviranja:
i) točka pospešuje, če je $\frac{dv}{dt} > 0 \iff \vec{v} \cdot \vec{a} > 0$;
i) točka zavira, če je $\frac{dv}{dt} < 0 \iff \vec{v} \cdot \vec{a} < 0$.

Osnovni primeri gibanja:
i) premočrtno gibanje: tir leži na premici $\iff \vec{a} \parallel \vec{v}$;
ii) enakomerno gibanje: $\iff \vec{a} = \vec{0} \iff \vec{v} = \vec{v}_0$, gibanje je premočrtno; Za začetne pogoje $x(t = t_0) = x_0$ je $x = v_0(t - t_0) + x_0$.
iii) enakomerno pospešeno $\iff \vec{a} = \vec{a}_0$, gibanje v splošnem ni premočrtno. Re"sitev za premo"crtno gibanje pri pogoju $x(t = t_0) = x_0$ in $\dot{x}(t = t_0) = v_0$ je

$$x = \frac{1}{2}a_0(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + x_0.$$

4. 3. 20 Polarni koordinatni sistem (PKS).
Opis gibanja v PKS, bazna vektorja

$$\vec{e}_r = \cos\varphi\vec{\imath} + \sin\varphi\vec{\imath}, \qquad \vec{e}_\varphi = \vec{e}_r = -\sin\varphi\vec{\imath} + \cos\varphi\vec{\imath}.$$

Velja:

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} = \vec{e}_\varphi \qquad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\vec{e}_r.$$

Verižino pravilo (posredno odvajanje)

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x).$$

Primer: $\frac{d}{dt}\sin\varphi(t) = \cos\varphi(t)\dot{\varphi}$.
Kinematika v polarnem koordinatnem sistemu:
i) $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$, $\dot{r}$ radialna hitrost, $r\dot{\varphi}$ obodna hitrost;
ii) $\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r + \left(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi$, radialni, obodni pospešek.
Kroženje, enakomerno, neenakomerno, kotna hitrost, kotni pospešek.
Kroženje je enakomerno natanko tedaj, ko vektor pospeška kaže proti središču kroženja.
Newtonovi zakoni.
1) Koordinatni sistem(KS) je inercialen (IKS) natanko tedaj, ǩo se prosta materialna točka giblje premočrtno s konstantno brzino ali pa miruje.
2) V IKS velja Newtonova enačba $m\vec{a} = \vec{F}$.
3) Zakon akcije in reakcije $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$.

Pojem IKS.
Gibanje je natanko določeno z Newtonovo enačbo in začetnimi pogoji.
Sistem materialnih točk
Razdelitev sil na zunanje in notranje. Rezultanta notranjih sil je enaka nič; $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij} = \vec{0}$.
$\sum_{i=1}^N m_i\vec{a}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$.
Enačba gibanja masnega središča $m\vec{a}^* = \vec{F}$.
Primer: poševni met po eksploziji.
Masno središče.
Primer: masno središče dveh točk leži na njuni zveznici in jo deli v obratnem razmerju njunih mas.
Zapis masnega središča sistema kot masno središče dveh masnih središč njunih podsistemov.

$$\vec{r}^* = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^N m_i\vec{r}_i = \frac{1}{\hat{m}_1 + \hat{m}_2}(\hat{m}_1\vec{r}_1^{\,*} + \hat{m}_2\vec{r}_2^{\,*})$$

Primer: masno središče sistema treh točk.
Masno središče likov in teles.

11. 3. 20 Primer: masno središče trikotnika.
Vrtilna količina točke $\vec{l}(O) = \vec{OP} \times m\dot{\vec{r}}$.
Vrtilna količina sistema materialnih točk $\vec{L}(O) = \sum_{i=1}^N \vec{l}_i(O)$, $\vec{l}_i(O) = \vec{r}_i \times m_i\dot{\vec{r}}_i$.
Odvod vrtilne količine.
Navor(moment) sile $\vec{F}$ s prijemališčem v P glede na pol O: $\vec{N}(O) = \vec{OP} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$.
Odvisnost navora od pola

$$\vec{N}(O) = \vec{OO_1} \times \vec{F} + \vec{N}(O_1).$$

Navor zunanjih, navor notranjih sil.
Pojem centralne sile.
Izrek o vrtilni količini: če so notranje sile centralne, je odvod vrtilne količine enak navoru zunanjih sil.
Zaprti sistem,

zakon o ohranitvi vrtilne količine;

zakon o ohranitvi gibalne količine.

Definicija togega gibanja.

Togi sistem, togo telo.

Togo gibanje je natanko določeno z gibanjem treh nekolinearnih točk.

Število prostostnih stopenj togega telesa.

Razcep togega gibanja na translatorno in rotacijsko gibanje.

Translatorni del gibanja togega telesa določa enačba gibanja masnega središča. Rotacijski del gibanja togega telesa določa izrek o vrtilni količini.

Dinamika togega sistema je natanko določena z enačbo gibanja masnega središča in izrekom o vrtilni količini.

STATIKA TOGEGA TELESA

Togo telo je v statičnem ravnovesju natanko tedaj, ko

a) rezultanta vseh zunanjih sil je enaka nič;

b) rezultanta navorov zunanjih sil je enaka nič;

Togo telo se v danem koordinatnem sistemu ne giblje natanko tedaj, ko je

a) v statičnem ravnovesju in

b) miruje v začetnem trenutku;

Nezadostnost posameznih pogojev.

i) $\vec{F} = \vec{0}$, $\vec{N} \neq \vec{0}$ + telo miruje v začetnem trenutku;

ii) $\vec{F} \neq \vec{0}$, $\vec{N} = \vec{0}$ + telo miruje v začetnem trenutku;

iii) $\vec{F} = \vec{0}$, $\vec{N} = \vec{0}$ + telo ne miruje v začetnem trenutku.

Sistem sil $\mathcal{F} = \{(P_1, \vec{F}_1), \ldots, (P_n, \vec{F}_n)\}$, rezultanta sistema sil $\vec{R}(\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$, moment sistema sil $\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \sum_{i=1}^n \vec{OP_i} \times \vec{F}_i$.

Definicija Sistema sil $\mathcal{F}_1$ in $\mathcal{F}_2$ sta ekvipolentna, če velja:

i) $\vec{R}(\mathcal{F}_1) = \vec{R}(\mathcal{F}_2)$ in

ii) $\vec{N}(\mathcal{F}_1, O) = \vec{N}(\mathcal{F}_2, O)$ za vsak O.

Odvisnost momenta od pola. Velja

$$\vec{N}(\mathcal{F}, O_1) = \vec{O_1O_2} \times \vec{R}(\mathcal{F}) + \vec{N}(\mathcal{F}, O_2).$$

Trditev Sistema sil $\mathcal{F}_1$ in $\mathcal{F}_2$ sta ekvipolentna natanko tedaj, ko je $\vec{R}(\mathcal{F}_1) = \vec{R}(\mathcal{F}_2)$ in obstaja pol O tako, da $\vec{N}(\mathcal{F}_1, O) = \vec{N}(\mathcal{F}_2, O)$.

Trditev Sistema sil $\mathcal{F}_1$ in $\mathcal{F}_2$ sta ekvipolentna natnako tedaj, ko je $\vec{N}(\mathcal{F}_1, O_i) = \vec{N}(\mathcal{F}_2, O_i)$ za tri nekolinearne točke O_1, O_2 in O_3.

Dva ekvivalentna sistema sil imata enak dinamični efekt na togo telo.

Dinamika togega telesa pod vplivom sistema sil $\mathcal{F}$ je natanko določena z $\vec{R}(\mathcal{F})$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, O)$.

Definicija Sistem sil $\mathcal{F}$ je:

ravninski, če vsa prijemališča in sile ležijo v isti ravnini;

ravnovesen, če je $\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{0}$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \vec{0}$;

dvojica, če je $\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{0}$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, O) \neq \vec{0}$;

ima skupno prijemališče, če obstaja točka P_0 tako, da je $\vec{R}(\mathcal{F}) \neq \vec{0}$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, P_0) = \vec{0}$;

Če je sistem sil $\mathcal{F}$ ravnovesen, je $\vec{N}(\mathcal{F}, O)$ za vsako točko O.

Osnovni principi statike; operacije nad sistemom sil, ki ohranjajo ekvipolentnost

a) princip o aditivnosti sil s skupnim prijemališčem;

b) princip o polznosti sile;

18. 3. 20

c) princip o uravnoteženemu paru sil.

Redukcija ravninskega sistema $\{(P_1, \vec{F}_1), (P_2, \vec{F}_2)\}$ dveh sil na skupno prijemališče:

a) $\vec{F}_1 \nparallel \vec{F}_2$;

b) $\vec{F}_1 \parallel \vec{F}_2$ in $\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 > 0$;

c) $\vec{F}_1 \parallel \vec{F}_2$, $\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 < 0$ in $\left|\vec{F}_1\right| \neq \left|\vec{F}_2\right|$;

Poljuben ravninski sistem dveh sil $\{(P_1, \vec{F}_1), (P_2, \vec{F}_2)\}$, ki ni dvojica, moremo reducirati na sistem z eno samo silo $\{(P_0, \vec{F}_1 + \vec{F}_2)\}$, kje je P_0 skupno prijemališče.

Moment dvojice je neodvisen od pola: $\vec{N}(\mathcal{F}, O_1) = \vec{N}(\mathcal{F}, O_2)$ za poljubna pola O_1 in O_2. Pravimo, da je navor prosti vektor.

Ekvivalentnost dvojice sil in navora; konstrukcija dvojice sil za dani navor.

Unija sistema sil

$$\vec{R}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) = \vec{R}(\mathcal{F}_1) + \vec{R}(\mathcal{F}_2), \qquad \vec{N}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2, O) = \vec{N}(\mathcal{F}_1, O) + \vec{N}(\mathcal{F}_2, O).$$

Unija dvojice je dvojica ali ravnovesni sistem sil.

Redukcija prostorskega sistema sil na poljubno izbrano redukcijsko točko; prestavitveni moment.

Definicija Sistem sil $\mathcal{F}$ je *dinama*, če je $\vec{R}(\mathcal{F}) \neq \vec{0}$ in obstaja taka točka P_0, da velja

1) $\vec{N}(\mathcal{F}, P_0) \neq \vec{0}$;

2) $\vec{N}(\mathcal{F}, P_0) \parallel \vec{R}(\mathcal{F})$.

Definicija *Os sistem sil* $\mathcal{F}$ je premica v smeri $\vec{R}(\mathcal{F})$, ki gre skozi točko P_0 v kateri je $\vec{N}(\mathcal{F}, P_0) \parallel \vec{R}(\mathcal{F})$.

Analitična določitev osi sistema. Krajevni vektor od poljubnega pola O do točke P_0 na osi sistema je

$$O\vec{P}_0 = \frac{\vec{R}(\mathcal{F}) \times \vec{N}(\mathcal{F}, O)}{\left|\vec{R}(\mathcal{F})\right|^2}.$$

Invarianta sistema sil $I(\mathcal{F}) = \vec{R}(\mathcal{F}) \cdot \vec{N}(\mathcal{F}, O)$.

Trditev Invarianta sistema sil je neodvisna od pola.

Redukcija sistema sil

1) $I(\mathcal{F}) = 0$

1a) $\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{0}$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \vec{0}$: *ravnovesni sistem sil*;

1b) $\vec{R}(\mathcal{F}) \neq \vec{0}$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \vec{0}$: *sistem sil s skupnim prijemališčem v* O;

1c) $\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{0}$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, O) \neq \vec{0}$: *dvojica sil*;

1d) $\vec{R}(\mathcal{F}) \neq \vec{0}$, $\vec{N}(\mathcal{F}, O) \neq \vec{0}$ in $\vec{R}(\mathcal{F}) \perp \vec{N}(\mathcal{F}, O)$: *sistem sil ima skupno prijemališče* na osi sistema;

2) $I(\mathcal{F}) \neq 0$: sistem sil nima skupnega prijemališča. Sistem sil je *dinama*.

Primer: sistem sil z vzporednimi silami $\vec{F} = m_i \vec{F}_0$. Če je $m = \sum_{i=1}^{N} m_i \neq 0$ je ta sistem sil ekvipolenten rezultanti $m\vec{F}_0$, ki ima prijemališče v masnem središču.

Poljubni ravninski sistem sil lahko reduciramo na dve sili, ki imata prijemališči v poljubno izbranih točkah.

Poljubni prostorski sistem sil lahko reduciramo na tri sile, ki imajo prijemališča v poljubno izbranih treh nekolinearnih točkah.

25. 3. 20 **Trditev** Dva prostorska(ravninska)sistema sil $\mathcal{F}_1$ in $\mathcal{F}_2$ sta ekvipolentna natanko tedaj, ko $\vec{N}(\mathcal{F}_1, P_i) = \vec{N}(\mathcal{F}_2, P_i)$ za "stiri(tri) to"cke P_i, ki ne le"zijo na isti ravnini(premici).

Posledica Prostorski(ravninski) sistema sil $\mathcal{F}$ je ravnovesen natanko tedaj, ko $\vec{N}(\mathcal{F}, P_i) = \vec{0}$ v "stirih(treh) to"ckah P_i, ki ne le"zijo na isti ravnini(premici).

Osnova naloga statike: uravnovešenje danega sistema sil, določitev sil podpor.

Primer: enostavno podprt togi nosilec.

a) statično določen primer;

b) statično nedoločen primer.

K lasifikacija podpor

a) vpeta(konzolna) podpora;
b) nepomi"cna "clenkasta podpora;
c) ravninsko pomi"cna "clenaksta podpora;
d) linijsko pomi"cna "clenaksta podpora;

Osnovni koraki pri reševanju osnovne naloge statike togega telesa:

a) identifikacija sil in njihovih prijemališč;
b) postavitev KS in vektorski zapis sil in prijemališč;
c) zapis ravnovesnih enačb;
d) reševanje ravnovesnih enačb;
e) analiza rezultata.

Primer: (sistem sil s skupnim prijemališčem) določi silo, ki potisne kolo s polmerom r_0 čez robnik višine h;

Trenje

Sila podlage je rezultanta ploskovne porazdelitve sil, tangentna komponenta, normalna komponenta.
Sila trenja je komponenta sile podlage v tangentni smeri in kaže v nasprotno smer kot gibanje.
Prijemališče sile podlage.
Drsno(dinamično) trenje, dotikalno(oprijemalno, statično) trenje.
Coulombov zakon trenja.
Tabela koeficientov oprijemalnega(koeficient lepenja) in drsnega trenja. Drsenje klade na strmini, torni kot.
Spuščanje, dvigovanje klade po strmini; samozapornost.
Vijačna dvigalka, $M = Gr_0 \tan(\alpha + a\alpha_0)$, α strmina vijačnice, α_0 torni kot.

1. 4. 20 Klinasti jermen, efektivni koeficient trenja $\hat{k} = k/sin\alpha$.
Trenje vrvi na kolutu.
Ravnovesna enačba

$$\frac{d\vec{S}}{d\varphi} + \vec{n} + \vec{f} = \vec{0}.$$

Izpeljava formule $S_2 = S_1 \mathrm{e}^{k\varphi_0}$.
Vrednosti kvocienta S_2/S_1 pri $k = \frac{1}{2}$ za različne ovojne kote φ_0.
Primer: zdrs vrvi na kolutu škripca.

Statika sistema togih teles

Spoji med telesi, sile in navori v spojih.
Klasifikacija spojev:

a) popolni spoj, prenos vseh sil in momentov;
b) tečaj, prenos vseh sil in momentov pravokotnih na os tečaja;
c) križni zglob, prenos vseh sil in momenta v smeri osi zgloba;
d) krogelni zglob, prenos vseh sil brez prenosa momenta;
e) linijski drsnik, prenos sil pravokotnih na smer drsnika in vseh momentov;
f) ploščati drsnik, prenos sile pravokotne na ravnino drsnika in vseh momentov;
g) kombinacija drsnika in zgloba.

Primer: A lestev, določitev pogoja zdrsa.
Potek reševanja nalog statike sistema togih teles:

a) identifikacija zunanjih sil;
b) razčelnitev sistema na toge komponente;
c) identifikacija sil in momentov v spojih;
d) postavitev diagramov prostih teles;
e) zapis ravnotežnih enačb;
f) raševanje sistema ravnotežnih enačb.

Paličje

Paličje je togi sistem sestavljen iz palic pod vplivom sil s prijemališči v spojih palic.

v število spojev, p število palic; Formula za enostavno ravninsko paličje : $2v-3=p$.
Formula za enostavno prostorsko paličje $3v-6=p$.
Sile v palicah, natezne, tlačne.
Ravnovesne enačbe paličja.
Enostavno paličje je pri statično določenih podporah statično določeno.
Vozliščna metoda.
Primer: paličje treh enakokrakih trikotnikov:

a) določitev sil v podporah;
b) določitev sil v palicah.

Metoda prereza; kdaj jo lahko uporabimo.
Primer: določitev sil v izbranih palicah.
Primerjava vozliščne metode in metode prereza.

8. 4. 20 **Ravninski nosilci**

Linijska obremenitev nosilca.
Ekvipolentna to"ckovna obremenitev.
Primeri:

a) enakomerna(konstantna) porazdelitev;
b) linearna porazdelitev.

Notranje količine nosilca,nNavidezni prerez nosilca, vpliv desnega dela nosilca na levi del preko notranjih količin;

a) osna sila $V(x)$;
b) prečna sila $Q(x)$;
c) upogibni moment $M(x)$.

Določitev notranjih količin z metodo prereza.
Primer: točkovno obremenjen enostavno podprt nosilec:

a) potek osne sile;
b) potek prečne sile;
c) potek upogibnega momenta.

Primer: konstantna linijska obremenitev enostavno podprtega nosilca:

a) potek osne sile;
b) potek prečne sile;
c) potek upogibnega momenta.

Ugotovitve: pri enostavno podprtem nosilcu velja:

a) prečna sila je na levem krajišču enaka sili leve podpore;
b) prečna sila je na desnem krajišču enaka negativni vrednosti sili desne podpore;
c) prečna sila ima pri točkovni obremenitvi v točkah obremenitve nezveznosti s skokom, ki je enak sili obremenitve v tej točki;
d) upogibni moment je enak nič v krajiščih;
e) upogibni moment je pri točkovno obremenjenem nosilcu odsekoma linearen.

Primer: linearna linijska obremenitev enostavno podprtega nosilca:
Izpeljava formul za zvezno linijsko obremenitev $p(x)\vec{\imath}+q(x)\vec{k}$. Če je linijska obremenitev zvezna v okolici x_0, potem pri $x=x_0$ veljajo ravnovesne enačbe

$$\frac{dV}{dx}=-p(x), \qquad \frac{dQ}{dx}=-q(x), \qquad \frac{dM}{dx}=Q(x).$$

Določitev notranjih količin in sil ter momentov podpore z diferencialno metodo; z upoštevanjem diferencialne zveze med Q in q ter M in Q.
Primer: linearna linijska obremenitev enostavno podprtega nosilca.
Konzolni nosilec.
Primer: konstantna linijska obremenitev konzolnega nosilca.
Robni pogoji diferencialne metode.
Primer: konstantna linijska obremenitev prevesnega nosilca.

Ugotovitve: pri enostavno podprtem prevesnem nosilcu velja:
a) prečna sila na prostih krajiščih je enaka nič;
b) v podporah ima prečna sila skok enak sili podpore;
c) upogibni moment je enak nič v prostih krajiščih;

15. 4. 20 TRDNOST

Osna deformacija in napetost

Pisava; referenčni(nedeformiran) položaj: B,P, P(X,Y,Z); prostorski(deformiran) položaj: b,p, p(x,y,z).
Mere deformacije:

a) relativna sprememba dolžin

$$\epsilon_1 = \frac{|\,p_1p_2\,| - |\,P_1P_2\,|}{|\,P_1P_2\,|},$$

b) Cauchyjeva mera deformacije

$$\epsilon_2 = \frac{|\,p_1p_2\,|^2 - |\,P_1P_2\,|^2}{|\,P_1P_2\,|^2}$$

c) logaritemska mera

$$\epsilon = \log\frac{|\,p_1p_2\,|}{|\,P_1P_2\,|}$$

Za majhne deformacije je $\epsilon_2 = 2\epsilon_1$, $\epsilon_1 = \epsilon$.
Pri togem pomiku je mera deformacije enaka nič.
Osna deformacija
Referenčni položaj X, deformirani položaj x; funkcija pomika $x = X + u(X)$.
Enakomerna deformacija $u(X) = \Delta l/l$, $\epsilon_1 = \Delta l/l$.
Logaritemska mera $\epsilon = \log(l + \Delta l)/l$; aditivnost logaritemske mere.
Osna napetost $\sigma = F/A$.
Deformacijsko napetostni diagram.
Značilne točke in območja na deformacijsko napetostnem diagramu.
Območje proporcionalnosti, Hookov zakon $\sigma = E\epsilon$.
Tabela Youngovih modulov E, mej tečenj σ_Y in nateznih trdnosti σ_S.
Primer: določi dopustno deformacijo, da napetost ne preseže meje tečenja.
Reševanje statično nedoločenih nalog.
Primer: nosilec obešen na štiri žice.
Termoelastičnost.
Primer: določi napetost palice med dvema togima stenama pri spremembi temperature za ΔT.

22. 4. 20 Ravnovesna enačba osne napetosti in deformacije

$$\frac{d}{dx}\left(\sigma(x)A(x)\right) + p(x) = 0,$$

Enačba za pomik

$$\frac{d}{dx}\left(AE\frac{du}{dx}\right) + p(x) = 0.$$

kjer je $p(x)$ dolžinska gostota sile.
Dolžinska gostota sile teže je $p(x) = \rho(x)A(x)g$.
Primer: problem vodnega stolpa
Primer: deformacija palice zaradi lastne teže.

Napetostni tenzor

Poševni presek palice, stržna napetost, odvisnost od kota preseka.

Vektor napetosti $\vec{t}$ je gostota površinske sile na prerezu.
Vektor napetosti $\vec{t} = \vec{t}(p, \vec{n})$ je linearen v $\vec{n}$. To pomeni, da obstaja tenzor napetosti $\underline{\underline{t}}$ tako, da je $\vec{t} = \underline{\underline{t}}\,\vec{n}$.
Tenzor napetosti je simetričen in ima 6 neodvisnih komponent.
Zapis tenzorja napetosti:

$$\underline{\underline{t}} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{12} & t_{22} & t_{23} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \sigma_2 & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Normalna napetost, vektor normalne napetosti; strižna napetost, vektor strižne napetosti.
Pomen komponent napetostnega tenzorja v danem KS:

a) diagonalni elementi so enaki normalnim napetostim v koordinatnih smereh;
a) izven diagonalni elementi so enaki projekciji vektorjev strižne napetosti na koordinatne osi.

Osnovna napetostna stanja.

a) Enoosno napetostno stanje; izrčun normalne in strižne napetosti.
b) Hidrostatično napetostno stanje $\underline{\underline{t}} = -p\,\underline{\underline{I}}$; v vsaki smeri je normalna napetost enaka $-p$, strižna napetost je enaka nič.
c) Strižno napetostno stanje, obstaja KS v katerem je vsota diagonalnih elementov napetostnega tenzorja enaka nič. Izračun normalne in strižne napetosti.
d) Ravninsko napetostno stanje.

28. 5. 20 Ravnovesna enačba.
Komponentni zapis tenzorja napetosti.
Ravninski primer: odvisnost komponent napetostnega tenzorja od postavitve koordinatnega sistema.
V koordinatnem sistemu z osema $\vec{\imath}' = \cos\varphi\vec{\imath} + \sin\varphi\vec{\jmath}$ in $\vec{\jmath}' = -\sin\varphi\vec{\imath} + \cos\varphi\vec{\jmath}$ je

$$\begin{aligned} t'_{11} &= \frac{1}{2}(t_{11}+t_{22}) + \frac{1}{2}(t_{11}-t_{22})\cos 2\varphi + t_{12}\sin 2\varphi, \\ t'_{22} &= \frac{1}{2}(t_{11}+t_{22}) - \frac{1}{2}(t_{11}-t_{22})\cos 2\varphi - t_{12}\sin 2\varphi, \\ t'_{12} &= -\frac{1}{2}(t_{11}-t_{22})\sin 2\varphi + t_{12}\cos 2\varphi. \end{aligned}$$

Invariante napetostnega tenzorja sta:

a) sled napetostnega tenzorja (vsota diagonalnih elementov matrike deformacijskega tenzorja je neodvisna od koordinatnega sistema);
b) determinanta napetostnega tenzorja.

Ekstremalne lastnosti napetostnega tenzorja

Določitev smeri največje, najmanjše normalne napetosti.
Smeri ekstremalne normalne napetosti sta

$$\varphi^1_\sigma = \frac{1}{2}\arctan\frac{2t_{xy}}{t_x - t_y}, \quad \varphi^2_\sigma = \varphi^1_\sigma + \frac{\pi}{2}.$$

Smeri največje in najmanjše normalne napetosti oklepata pravi kot.
Največja normalna napetost je

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{2}\left(t_x + t_y + \sqrt{(t_x-t_y)^2 + 4t_{xy}^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Sl}\,\underline{\underline{t}} + \sqrt{(\mathrm{Sl}\,\underline{\underline{t}})^2 - 4\det\underline{\underline{t}}}\right),$$

najmanjša pa

$$\sigma_{\min} = \frac{1}{2}\left(t_x + t_y - \sqrt{(t_x-t_y)^2 + 4t_{xy}^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Sl}\,\underline{\underline{t}} - \sqrt{(\mathrm{Sl}\,\underline{\underline{t}})^2 - 4\det\underline{\underline{t}}}\right).$$

Ekstremalnim normalnim napetostim pravimo tudi glavne napetosti, njunima smerema pa glavne smeri.

Ekstremalna strižna napetost je

$$\tau_{\text{ext}} = \pm\frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}).$$

Pripadajoča smer ekstremalne stržne napetosti oklepa kot $\pi/4$ s smerjo ekstremalne normalne napetosti.
V koordinatnem sistemu z osema v smereh ekstremalnih normalnih napetosti je strižna komponenta pripadajoče matrike napetostnega tenzorja enaka nič.
Glavne smeri napetostnega tenzorja.
Ekstremalne vrednosti deformacijskega tenzorja so neodvisne od izbire koordinatnega sistema.
Mohrova krožnica.
Primer: Mohrova krožnica za
a) enoosno deformacijo;
b) enostavni strig.
c) ravninsko hidrostatično napetostno stanje.

6. 5. 20 **Prostorska deformacija**
Opis deformacije z vektorjem pomika $\vec{r} = \vec{R} + \vec{u}$.
Lokalizacija mere deformacije, sprememba dolžin za infinitezimalno bližnje točke.
Parcialni odvod.
Gradinet pomika

$$\operatorname{Grad}\vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X} & \frac{\partial u_1}{\partial Y} & \frac{\partial u_1}{\partial Z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X} & \frac{\partial u_2}{\partial Y} & \frac{\partial u_2}{\partial Z} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X} & \frac{\partial u_3}{\partial Y} & \frac{\partial u_3}{\partial Z} \end{bmatrix}.$$

Gradinet deformacije

$$\Delta\vec{r} = \underline{\underline{F}}\Delta\vec{R}, \quad \underline{\underline{F}} = (\underline{\underline{I}} + \operatorname{Grad}\vec{u}).$$

Transponiranje; osnovni lastnosti
a) $\vec{a}\cdot\underline{\underline{A}}\,\vec{b} = \underline{\underline{A}}^T\,\vec{a}\cdot\vec{b}$;
b) $\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\right)^T = \underline{\underline{B}}^T\underline{\underline{A}}^T$.
Deformacijski tenzor

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{F}}^T\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}\right).$$

Deformacijski tenzor je simetričen.
Zapis deformacijskega tenzorja s pomikom $\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}(\operatorname{Grad}\vec{u} + (\operatorname{Grad}\vec{u})^T + (\operatorname{Grad}\vec{u})^T(\operatorname{Grad}\vec{u}))$.
Infinitezimalni deformacijski tenzor

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{Grad}\vec{u} + (\operatorname{Grad}\vec{u})^T\right).$$

Komponentni zapis infinitezimalnega deformacijskega tenzorja

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \epsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \epsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X} & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_1}{\partial Y} + \frac{\partial u_2}{\partial X}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_1}{\partial Z} + \frac{\partial u_3}{\partial X}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial u_2}{\partial X} + \frac{\partial u_1}{\partial Y}) & \frac{\partial u_2}{\partial Y} & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_2}{\partial Z} + \frac{\partial u_3}{\partial Y}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial u_3}{\partial X} + \frac{\partial u_1}{\partial Z}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_3}{\partial Y} + \frac{\partial u_2}{\partial Z}) & \frac{\partial u_3}{\partial Z} \end{bmatrix}$$

Zapis infinitezimalne deformacije v smeri enotskega vektorja $\vec{n}$

$$\epsilon_1 = \epsilon_1(\vec{n}) = \vec{n}\cdot\underline{\underline{\epsilon}}\,\vec{n}.$$

Pomen komponent deformacijskega tenzorja
a) diagonalni elementi so enaki relativnim spremembam v smereh koordinatnih osi;
b) izven diagonalni elementi so enaki polovični spremembi kota med koordinatnimi osmi.
Sprememba volumna.

$$\frac{\Delta v}{\Delta V} - 1 = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \operatorname{Sl}\underline{\underline{\epsilon}}.$$

Relativna sprememba volumna je enaka vsoti diagonalnih elementov deformacijskega tenzorja oziroma sledi deformacijskega tenzorja.
Deformacija je homogena, če je deformacijski tenzor konstanten.
Primer: strižna deformacija pravokotnika.
a) Določitev pomika iz slike.
b) Izračun spremembe dolžine diagonale s pomočjo slike.
c) Izračun deformacijskega tenzorja.
d) Izračun spremembe dolžine diagonale s pomočjo deformacijskega tenzorja.
Osnovni načini deformacij:
a) enoosna;
b) enakomerni razteg ali skrčitev, $\underline{\underline{\epsilon}} = \epsilon \underline{\underline{I}}$;
c) strižna deformacija, $\mathrm{Sl}\,\underline{\underline{\epsilon}} = 0$;
d) ravninska deformacija; $u_1 = u_1(X, Y)$, $u_2 = u_2(X, Y)$, $u_3 = 0$.

13. 5. 20 **Ravninska deformacija**
Odvisnost komponente deformacijskega tenzorja od koordinatnega sistema, anlogija z napetostnim tenzorjem.
V koordinatnem sistemu z osema $\vec{\imath}' = \cos\varphi\vec{\imath} + \sin\varphi\vec{\jmath}$ in $\vec{\jmath}' = -\sin\varphi\vec{\imath} + \cos\varphi\vec{\jmath}$ je

$$\begin{aligned}
\epsilon'_{11} &= \frac{1}{2}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + \frac{1}{2}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})\cos 2\varphi + \epsilon_{12}\sin 2\varphi, \\
\epsilon'_{22} &= \frac{1}{2}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) - \frac{1}{2}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})\cos 2\varphi - \epsilon_{12}\sin 2\varphi, \\
\epsilon'_{12} &= -\frac{1}{2}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})\sin 2\varphi + \epsilon_{12}\cos 2\varphi,
\end{aligned}$$

Osna deformacija v smeri $\vec{n} = \cos\varphi\vec{\imath} + \sin\varphi\vec{\jmath}$ je

$$\epsilon_1(\vec{n}) = \vec{n}\cdot\underline{\underline{\epsilon}}\,\vec{n} = \epsilon_1(\varphi) = \frac{1}{2}(\epsilon_x + \epsilon_y) + \frac{1}{2}(\epsilon_x - \epsilon_y)\cos 2\varphi + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\sin 2\varphi.$$

Ekstremalne lastnosti deformacijskega tenzorja

Smeri ekstremalne osne deformacije sta

$$\varphi_1^{\mathrm{a}} = \frac{1}{2}\arctan\frac{2\epsilon_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y}, \quad \varphi_2^{\mathrm{a}} = \varphi_1^{\mathrm{a}} + \frac{\pi}{2}.$$

Ekstremalna osna deformacija je

$$\epsilon_1^{\max,\min} = \frac{1}{2}\left(\epsilon_x + \epsilon_y \pm \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}\right).$$

V koordinatnem sistemu z osema v smereh ekstremalnih osnih deformacij je stržna komponenta pripadajočega deformacijskega tenzorja enaka nič.
Mera strižne deformacije v ravnini med seboj pravokotnih enotskih vektorjev $\vec{m}$ in $\vec{n}$ je $\gamma(\vec{m},\vec{n}) = 2\vec{m}\cdot\underline{\underline{\epsilon}}\,\vec{n}$.
Smeri ekstremalne osne deformacije oklepajo s smerema ekstremalne strižne deformacije kot $\pi/4$.
Ekstremalna strižna deformacija je

$$\gamma_{\mathrm{ext}} = \pm(\epsilon_1^{\max} - \epsilon_1^{\min}).$$

Posplošeni Hookov zakon
Linearna zveza med napetostjo in deformacijo, elastični tenzor, podajnostni tenzor.
Število materialnih parametrov.
Zapis zveze med $\underline{\underline{t}}$ in $\underline{\underline{\epsilon}}$, Voigtov zapis z elastično matriko reda 6×6.
Simetrije elastičnega tenzorja in število materialnih parametrov za posamezne simetrije.
a) anizotropija (21);

b) monoklinična (13);
c) ortotropična (9);
d) kubična (3);
f) tranzverzalna izotropija (5); $C_{44} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})$ oziroma $S_{44} = \frac{1}{2}(S_{11} - S_{12})$.
g) izotropija (2);

Podajnostni tenzor, zapis zveze med $\underline{\underline{\epsilon}}$ in $\underline{\underline{t}}$ za ortotropičen material

$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_2 & -\nu_{13}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{21}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{23}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{31}/E_1 & -\nu_{32}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\mu_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\mu_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\mu_{12} \end{bmatrix}$$

E_i Youngovi moduli, ν_{ij} Poissonovi količniki, strižni moduli $\mu_{ij} = G_{ij}$.
Hookov zakon za izotropičen material

$$\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} t_{ij} - \frac{\nu}{E}(t_{11} + t_{22} + t_{33})\delta_{ij}$$

oziroma

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{t}} - \frac{\nu}{E}(\mathrm{Sl}\, \underline{\underline{t}})\underline{\underline{I}}.$$

Zveza $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$.
Lamejeva koeficienta $\mu = G$, $\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}$,

$$\underline{\underline{t}} = 2\mu \underline{\underline{\epsilon}} + \lambda(\mathrm{Sl}\, \underline{\underline{\epsilon}})\underline{\underline{I}}.$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}, \qquad E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}.$$

Enakomerna kompresija, kompresijski modul $\kappa = \frac{E}{3(1-2\nu)}$.
Nestisljivi material $\nu = \frac{1}{2}$, vrednosti Poissonovega količnika $\nu \in (-1, \frac{1}{2}]$.

20. 5. 209

Ravninska napetost.
Ravninska deformacija; modificirana modula

$$\hat{E} = \frac{E}{1-\nu^2}, \qquad \hat{\nu} = \frac{\nu}{1-\nu}.$$

Termalni raztezek $\underline{\underline{\epsilon}}_{\mathrm{T}} = \alpha \Delta T \underline{\underline{I}}$.
Termoelastčnost, deformacija je vsota elastične in termalne deformacije.

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{t}} - \frac{\nu}{E}(\mathrm{Sl}\, \underline{\underline{t}})\underline{\underline{I}} + \alpha \Delta T \underline{\underline{I}}.$$

Primer: izračun napetostnega stanja elastičnega vključka v togi matriki.

Upogib nosilca

Nevtralna os, centralna os.
Osnovne predpostavke:
a) dolžina nosilca je bistveno večja od lateralnih dimenzij.
b) nevtralna os je centralna os in se ujema z osjo x v referen"cni legi;

c) ravnine pravokotne na nevtralno os v referenčni legi se deformirajo v ravnine, ki so pravokotne na deformirano nevtralno os;
d) nosilec je simetri"cen glede na ravnini xz in yz.

Deformacija vlaken $\epsilon = \frac{z}{R}$, napetost $\sigma = z\frac{E}{R}$.
Določitev zveze med upogibnim momentom M in napetostjo.
Euler - Bernoullijeva enačba $M = \frac{EI}{R}$.
Zveza $\sigma = E\epsilon = \frac{M}{I}z$.
Ploskovni moment I.
Primer: izračun ploskovnega momenta

a) pravokotnik, $I = ab^3/12$;
b) krožni presek $I = \pi R^4/4$;
c) tankostenski pravokotnik.

Primer: enostavno podprti nosilec dolžine $l = 2$m s tankostenskim krožnim presekom je točkovno obremenjen na svoji polovici. Določi debelino, da bo osna napetost pod dopustno vrednostjo.
Izrek o paralelnih oseh, $\hat{I} = z_0^2 A + I$.
Primer: ploskovni moment I nosilca.
Določitev z_0 koordinate nevtralne osi v referenčnem položaju. Pogoj

$$0 = \int_A E(z - z_0)\, dA.$$

Če je presek homogen, je $z_0 = z_*$.
Primer: na jekleni I nosilec višine h in površine $h^2/6$ je postavljena betonska plošča dimenzije $b \times h/2$. Določi b tako, da bo v betonski plošči kompresijsko, v nosilcu pa natezno napetostno stanje.

27. 5. 20 Upogib nevtralne osi $w(x)$, aproksimacija $\frac{1}{R} = -\frac{d^2w}{dx^2}$.
Enačba upogiba $\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2w}{dx^2}\right) = q$.
Robni pogoji enačbe upogiba nosilca:

a) členkasta podpora;
b) konzolno vpetje;
c) prosti konec;
d) predpisana prečna obremenitev na koncu;
e) predpisan upogibni moment na koncu.

Primer:

a) upogib enostavno podprtega nosilca z linijsko obremenitvijo, določitev maksimalnega upogiba
$$w_{\max} = \frac{5q_0 l^4}{384EI};$$
b) upogib enostavno podprtega nosilca s točkovno obremenitvijo, določitev maksimalnega upogiba
$$w_{\max} = \frac{Ql^3}{48EI}.$$

Nosilci z večimi polji obremenitev.
Troto"ckovno podprti nosilec.
Metoda superpozicije.
Potek strižne napetosti.
Linearni ploskovni moment(statični moment) $S(z) = \int_{A*} \zeta\, dA$.
Formula $\tau(z) = \frac{QS(z)}{Ib(z)}$.
Primer: strižna napetost na pravokotnem preseku:

a) izračun $S(z)$;
b) izračun strižne napetosti;

Temperaturnii upogib nosilca, razlika temperature po prerezu, temperaturni moment.
Primer: konzolni nosilec, izračun upogiba za linerano razliko temperature po preseku.
Uklon nosilca.
Izra"cun kriti"cne obremenitve

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$