2. kolokvij iz Osnov mehanike, 3. junij 2020

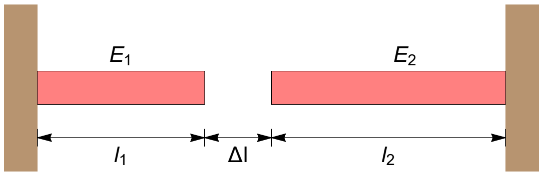
1. Dve elastični palici sta pritrjeni na togi steni, tako kot kaže skica.

   (a) Določi silo na levo palico s katero levo palico staknemo z desno.

   (b) Ko palici staknemo skupaj, ju zavarimo. Določi napetosti v levi in desni palici.

   (c) Za koliko se deformira leva in za koliko desna palica.

   Podatki: $l_1 = 1\,\mathrm{m}$, $l_2 = 2\,\mathrm{m}$, $\Delta l = 2\,\mathrm{mm}$, $A_1 = A_2 = 4\,\mathrm{cm}^2$, $E_1 = 60\,\mathrm{GPa}$, $E_2 = 120\,\mathrm{GPa}$.

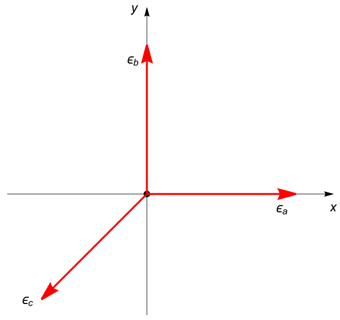


2. Z ekstenziometrom smo izmerili osne deformacije $\epsilon_a = \epsilon_0$, $\epsilon_b = 2\epsilon_0$, $\epsilon_c = -\frac{1}{2}\epsilon_0$, kjer je ϵ_0 majhno pozitivno število.

   (a) Določi deformacijski tenzor.

   (b) Izračunaj ekstremalne osne defrmacije.

   (c) Nariši Mohrovo krožnico in z njeno pomočjo določi smeri maksimalne osne deformacije.



3. Podan je napetostni tenzor za katerega vemo, da je normalna napetost v smeri osi x enaka σ_0, v smeri y osi $-2\sigma_0$, strižna napetost na ravnini z normalo v smeri osi x pa je σ_0.

   (a) Zapiši deformacijski tenzor.

   (b) Izračunaj normalno in strižno napetost na ravnino z normalo v smeri vektorja $\vec{\imath} + \vec{\jmath}$.

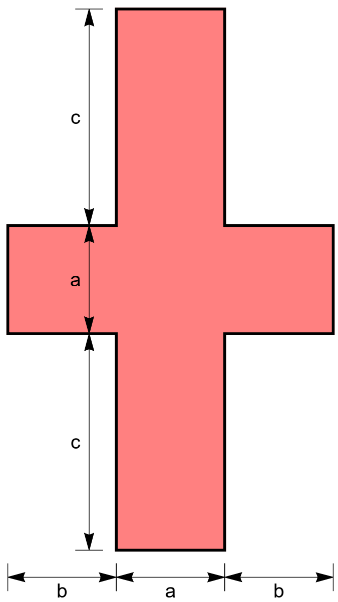
   (c) Podana napetost je napetost v izotropičnem elastičnem materialu z Youngovim modulom $E = 75\,\mathrm{GPa}$ in Poissonovim količnikom $\nu = 1/3$. Izračunaj pripadajočo deformacijo, če je napetostno stanje ravninsko.

4. Enostavno podprt nosilec dolžine $2\,\mathrm{m}$ je obremenjen s konstantno linijsko obremenitvijo z gostoto q_0.

   (a) Določi potek upogibnega momenta in njegovo maksimalno vrednost.

   (b) Izračunaj ploskovni moment preseka na sliki z dimenzijami $b = a$ in $c = 2a$.

   (c) Naj bo $a = 1\,\mathrm{cm}$. Določi največjo dopustno obremenitev, da bo napetost v nosilcu manjša od $\sigma_0 = 210\,\mathrm{MPa}$.



Rešitve

1. (a) Levo palico moramo raztegniti za Δl. Potem je $\epsilon = \Delta l/l_1$ in $\sigma = E_1\epsilon = E_1\Delta l/l_1$. Iskana osna sila raztega je potem

$$F = \sigma A_1 = \frac{A_1 E_1 \Delta l}{l_1} = 48\,\mathrm{kN}.$$

(b) Naj bo ϵ_1 deformacija leve in ϵ_2 deformacija desne palice potem ko palici zavarimo skupaj. Potem je razteg leve palice $\Delta l_1 = \epsilon_1 l_1$, desne pa $\Delta l_2 = \epsilon_2 l_2$. Velja $\Delta l_1 + \Delta l_2 = \Delta l$. Napetosti v palici sta enaki, $\sigma_1 = \sigma_2$. Potem je $E_1\epsilon_1 = E_2\epsilon_2$. Tako imamo dve enačbi

$$\epsilon_1 l_1 + \epsilon_2 l_2 = \Delta l \quad \text{in} \quad E_1\epsilon_1 = E_2\epsilon_2.$$

Rešitev je

$$\epsilon_1 = \frac{\Delta l E_2}{E_2 l_1 + E_1 l_2} = 10^{-3}, \qquad \epsilon_2 = \frac{\Delta l E_1}{E_2 l_1 + E_1 l_2} = \frac{1}{2}10^{-3}.$$

Napetost v palici je

$$\sigma = E_1\epsilon_1 = \frac{\Delta l E_1 E_2}{E_2 l_1 + E_1 l_2} = 60\,\mathrm{MPa}.$$

Pripadajoča osna sila je $24\,\mathrm{kN}$.

(c) Raztega palic sta $\Delta l_i = \epsilon_i l_i$. Potem je

$$\Delta l_1 = \frac{l_1 E_2 \Delta l}{E_2 l_1 + E_1 l_2} = 1\,\mathrm{mm}, \qquad \Delta l_2 = \frac{l_2 E_1 \Delta l}{E_2 l_1 + E_1 l_2} = 1\,\mathrm{mm}.$$

2. (a) Postavimo koordinatni sistem z osjo x v smeri deformacije ϵ_a in os y v smeri deformacije ϵ_b. Potem vidimo takoj, da je matrika deformacijskega tenzorja oblike

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \epsilon_a & x \\ x & \epsilon_b \end{bmatrix}.$$

Določiti moramo še neznani x. Določimo ga iz pogoja, da je deformacija v smeri, ki oklepa kot $\phi = 5\pi/4$ z osjo x enaka ϵ_c. Po formuli je potem

$$\epsilon_c = \frac{1}{2}(\epsilon_a + \epsilon_b) + \frac{1}{2}(\epsilon_a - \epsilon_b)\cos 2\phi + x\sin 2\phi = \frac{1}{2}(\epsilon_a + \epsilon_b) + x.$$

Potem je

$$x = \epsilon_c - \frac{1}{2}(\epsilon_a + \epsilon_b) = -2\epsilon_0.$$

Deformacijski tenzor je tako

$$\mathbf{e} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

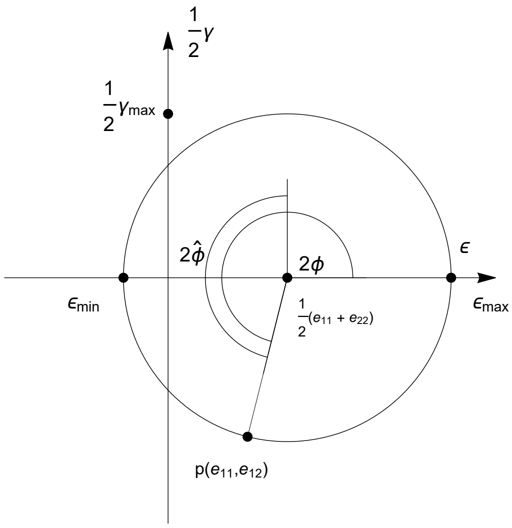
(b) Ekstremalne osne deformacije izračunamo po formuli

$$\epsilon_{ext} = \frac{1}{2}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})^2 + \epsilon_{12}^2} = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{17})\epsilon_0.$$

(c) Po formuli sta smeri ekstremalne deformacije

$$\phi_1 = \frac{1}{2}\arctan\frac{2\epsilon_{12}}{\epsilon_{11} - \epsilon_{22}} \quad \text{in} \quad \phi_2 = \phi_1 + \frac{\pi}{2}.$$

Ker je $\phi_1 = \frac{1}{2}\arctan 4 \approx 38°$, vidimo iz slike Mohrove krožnice, da je smer maksimalne osne deformacije enaka $\phi_2 \approx 128°$. Skica Mohrove krožnice je



3. (a) Iz podatkov naloge razberemo, da je

$$\mathbf{t} = \sigma_0 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

(b) Enotski vektor v smeri $\vec{\imath}+\vec{\jmath}$ je $\vec{n} = 1/\sqrt{2}(\vec{\imath}+\vec{\jmath})$. Vektor napetosti na ravnino s to normalo je

$$\vec{t} = \mathbf{t}\,\vec{n} = \sigma_0 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Normalna napetost je

$$t_n = \vec{t} \cdot \vec{n} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\sigma_0}{2}.$$

Strižna napetost je

$$t_s = \sqrt{\vec{t} \cdot \vec{t} - t_n^2} = \frac{3\,|\sigma_0|}{2}.$$

(c) Deformacija sledi iz Hookovega zakona

$$\mathbf{e} = \frac{1+\nu}{E}\mathbf{t} - \frac{\nu}{E}\,\mathrm{sl}\,\mathbf{t}\,\mathbf{i},$$

kjer je $\mathbf{i}$ enotska matrika. Izračunajmo posebej

$$\frac{1+\nu}{E} = \frac{4}{225}1/\mathrm{GPa}, \qquad \frac{\nu}{E} = \frac{1}{225}1/\mathrm{GPa} \quad \text{in} \quad \mathrm{sl}\,\mathbf{t} = -\sigma_0.$$

Potem je

$$\mathbf{e} = \frac{\sigma_0}{225} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} 1/\mathrm{GPa}.$$

4. (a) Za upogibni moment velja zveza

$$\frac{\mathrm{d}^M}{\mathrm{d}x^2} = -q_0.$$

Potem je

$$M = \frac{1}{2}q_0x^2 + C_1x + C_2.$$

Ker je nosilec enostavno podprt, je $M(x=0) = M(x=l) = 0$. Tako je $C_2 = 0$ in

$$\frac{1}{2}q_0l^2 + C_1l = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{2}q_0l.$$

Upogibni moment je tako

$$M = \frac{1}{2} q_0 x(l - x).$$

Maksimalni upogib je na sredini, $M_{\mathrm{max}} = q_0 l^2/8$.

(b) Križ je sestavljen iz sredinskega pravokotnika in dveh pravokotnikov levo in desno. Geometrijsko središče križa je na sredini. Ploskovni moment sredinskega pravkotnika je

$$I_1 = \frac{1}{12} a(a + 2c)^3.$$

Ploskovna momenta prevokotnikov na levi in desni sta enak. Velja

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{12} ba^3 + z_0^2 ab = \frac{1}{12} ba^3,$$

saj je $z_0 = 0$. Tako je ploskovni moment križa enak

$$I = I_1 + 2I_2 = \frac{1}{12} a(a + 2c)^3 + \frac{1}{6} ba^3 = \frac{125}{12} a^4 + \frac{1}{6} a^4 = \frac{127}{12} a^4.$$

(c) Osno napetost vlakna s koordinato z določimo po formuli

$$\sigma = \frac{M}{I} z.$$

Osna napetost je tako ekstremalna, ko je z na robu. Velajti mora $\sigma \leq \sigma_0$. Tako dobimo pogoj

$$\frac{q_0 l^2}{8} \frac{12}{127a^4} \frac{5a}{2} \leq \sigma_0.$$

Veljati mora

$$q_0 \leq \frac{508 \sigma_0 a^3}{15 l^2} = 1778\,\mathrm{N/m}.$$