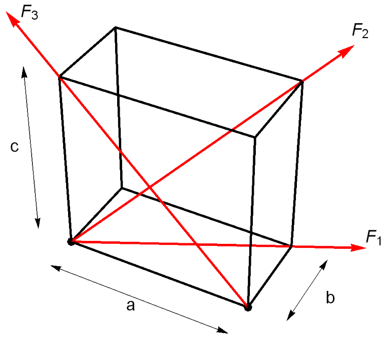
1. izpit iz Osnov mehanike, 2. julija 2020

1. Za prostorski sistem sil podan na sliki s silami v smereh diagonal mejnih ploskev in glavne diagonale kvadra dimenzije $2\,\mathrm{m} \times 1\,\mathrm{m} \times 2\,\mathrm{m}$:



   (a) določi sile in njihova prijemališča;

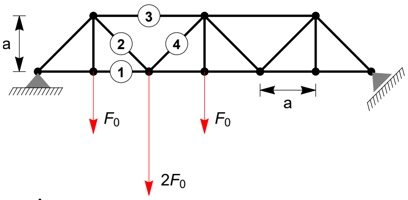
   (b) izračunaj rezultanto sil in navora glede na pol v vogalu kvadra;

   (c) izračunaj invarianto sistema sil;

   (d) določi skupno prijemališče ali os sistema.

   Velikosti sil so $F_1 = \sqrt{5}F_0$, $F_2 = 3F_0$, $F_3 = 2\sqrt{2}F_0$.

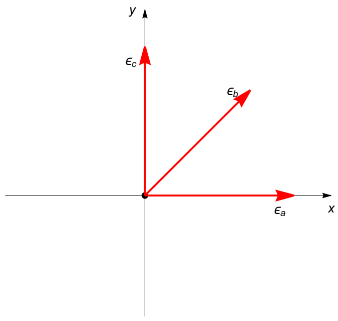
2. Desna podpora paličja na sliki je drsna pod kotom $\pi/4$.



   (a) Določi sile v podporah;

   (b) Izračunaj označene sile palic.

3. V smereh označenih na skici smo z ekstenziometrom izmerili osne deformacije $\epsilon_a = 2\epsilon_0$, $\epsilon_b = -\frac{3}{2}\epsilon_0$, $\epsilon_c = \epsilon_0$.

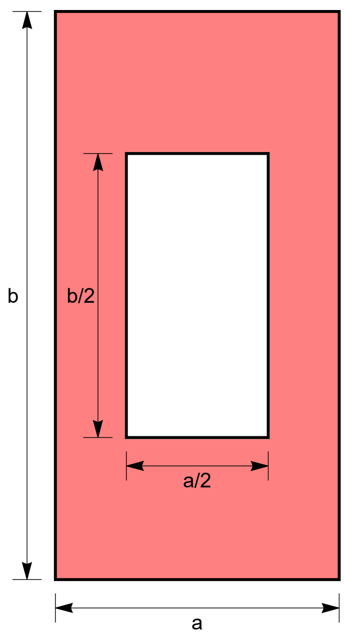


   (a) Določi deformacijski tenzor.

   (b) Določi ekstremalne deformacije in njihove smeri ter nariši Mohrovo krožnico.

   (c) Pri predpostavki, da je deformacija ravninska izračunaj pripadajoči napetostni tenzor, če sta Lamejeva koeficienta enaka $\lambda = 100\,\mathrm{GPa}$ in $\mu = 80\,\mathrm{GPa}$

4. Enostavno podprt nosilec dolžine $l = 4\,\mathrm{m}$ je točkovno obremenjen v točkah, ki so oddaljene od leve podpore za $l/4$, $l/2$ in $3l/4$ s prečnimi silami F_0, $2F_0$ in $3F_0$.



   (a) Določi potek upogibnega momenta in njegovo maksimalno vrednost.

   (b) Izračunaj ploskovni moment preseka na sliki.

   (c) Določi višino b, da bo osna napetost v nosilcu manjša od $\sigma_0 = 80\,\mathrm{MPa}$, če je $a = 4\,\mathrm{cm}$ in $F_0 = 5\,\mathrm{kN}$.

Rešitve

1. (a) Izhodišče koordinatnega sitema postavimo v prijemališče sil $\vec{F}_1$ in $\vec{F}_2$. Koordinatne osi usmerimo v smeri stranic kvadra, x v smeri stranice z dolžino a, y in z pa v smeri z dolžino b in c. Primejališča sil so tako $A_1(0,0,0)$, $A_2(0,0,0)$ in $A_3(a,0,0)$. Enotski vektorji $\vec{e}_i$ v smeri sil $\vec{F}_1$ so

$$\vec{e}_1 = \frac{a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \vec{e}_2 = \frac{a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad \vec{e}_3 = \frac{-a\vec{\imath} + c\vec{k}}{\sqrt{a^2+c^2}}.$$

Sile so $\vec{F}_i = F_i\vec{e}_i$, $i = 1, 2, 3$. Potem je za dane podatke

$$\vec{F}_1 = (2\vec{\imath} + \vec{\jmath})F_0, \quad \vec{F}_2 = (2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k})F_0, \quad \vec{F}_3 = (-2\vec{\imath} + 2\vec{k})F_0.$$

(b) Rezultanta je

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 4\vec{k})F_0.$$

Momenta sil $\vec{F}_1$ in $\vec{F}_2$ glede na izhodišče sta enaka nič, moment sile $\vec{F}_3$ pa je

$$\vec{N}_3 = \vec{OA}_3 \times \vec{F}_3 = 2\vec{\imath} \times (-2\vec{\imath} + 2\vec{k})F_0\text{m} = -4F_0\vec{\jmath}\text{m}.$$

Tako je

$$\vec{N} = -4F_0\vec{\jmath}\text{m}.$$

(c) Ker je $\vec{R} \cdot \vec{N} = -8F_0\text{m} \neq 0$, sistem nima skupnega prijemališča. Izračunajmo še os sistema. Dobimo jo po formuli

$$\vec{OP}_0 = \frac{\vec{R} \times \vec{N}}{\vec{R} \cdot \vec{R}} = \frac{1}{3}(2\vec{\imath} - \vec{k})\text{m}.$$

2. (a) Sila leve podpore je $\vec{A} = A_1\vec{\imath} + A_2\vec{\jmath}$, desne pa $\vec{B} = B(-\vec{\imath} + \vec{\jmath})/\sqrt{2}$. Momentna enačba s polom v desni podpori se glasi

$$-6 \times A_2 + 5a \times F_0 + 4a \times 2F_0 + 3a \times F_0 = 0 \Rightarrow A_2 = \frac{8F_0}{3},$$

momentna enačba s polom v levi podpori pa je

$$6a \times \frac{1}{\sqrt{2}}B - a \times F_0 - 2a \times 2_0 - 3a \times F_0 = 0 \Rightarrow B = \frac{4\sqrt{2}F_0}{3}.$$

Ravnovesna enačba sil v vodoravni smeri je

$$A_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}B = 0 \Rightarrow A_1 = \frac{4F_0}{3}.$$

(b) Sile palic 1,2 in 3 dobimo s prerezno metodo. Zapišimo ravnovesne pogoje za levi del paličja. Ravnovesje momentov s polom v presečišču palice 2 in 3 je

$$a \times F_1 + a \times A_1 - a \times A_2 = 0 \Rightarrow F_1 = A_2 - A_1 = \frac{4F_0}{3}.$$

Ravnovesje momentov s polom v presečišču palice 1 in 2 je

$$-a \times F_3 + a \times F_0 - 2a \times A_2 = 0 \Rightarrow F_3 = F_0 - 2A_2 = -\frac{13F_0}{3}.$$

Iz ravnovesja sil v navpični smeri potem sledi

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}F_2 - F_0 + A_2 = 0 \Rightarrow F_2 = \sqrt{2}(A_2 - F_0) = \frac{5\sqrt{2}F_0}{3}.$$

Silo F_4 dobimo z vozliščno metodo. Iz ravnovesja v navpični smeri dobimo

$$\frac{1}{\sqrt{2}}F_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}F_4 - 2F_0 = 0 \Rightarrow F_4 = 2\sqrt{2}F_0 - F_2 = \frac{\sqrt{2}F_0}{3}.$$

3. (a) Postavimo koordinatni sistem z osjo x v smeri deformacije ϵ_a in os y v smeri deformacije ϵ_c. Potem vidimo takoj, da je matrika deformacijskega tenzorja oblike

$$\mathbf{e} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} 2 & x \\ x & 1 \end{bmatrix}.$$

Določiti moramo še neznani x. Določimo ga iz pogoja, da je deformacija v smeri, ki oklepa kot $\phi = \pi/4$ z osjo x enaka ϵ_b. Po formuli je potem

$$\epsilon_b = \frac{1}{2}(\epsilon_a + \epsilon_c) + \frac{1}{2}(\epsilon_a - \epsilon_c)\cos 2\phi + x\epsilon_0 \sin 2\phi = \frac{1}{2}(\epsilon_a + \epsilon_c) + x\epsilon_0.$$

Potem je

$$x\epsilon_0 = \epsilon_b - \frac{1}{2}(\epsilon_a + \epsilon_c) = -3\epsilon_0.$$

Deformacijski tenzor je tako

$$\mathbf{e} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

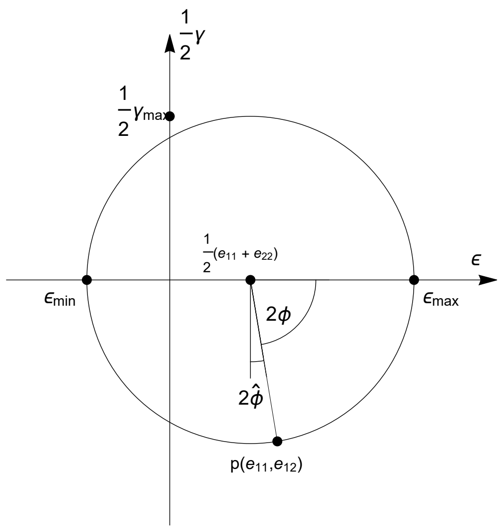
(b) Ekstremalne osne deformacije izračunamo po formuli

$$\epsilon_{ext} = \frac{1}{2}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})^2 + \epsilon_{12}^2} = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{37})\epsilon_0.$$

(c) Po formuli sta smeri ekstremalne deformacije

$$\phi_1 = \frac{1}{2}\arctan\frac{2\epsilon_{12}}{\epsilon_{11} - \epsilon_{22}} \quad \text{in} \quad \phi_2 = \phi_1 + \frac{\pi}{2}.$$

Ker je $\phi_1 = -\frac{1}{2}\arctan 6 \approx -40.27°$, vidimo iz slike Mohrove krožnice, da je smer maksimalne osne deformacije enaka ϕ_1. Skica Mohrove krožnice je



(d) Napetost sledi iz Hookovega zakona

$$\mathbf{t} = 2\mu\mathbf{e} + \lambda\,\mathrm{sl}\,\mathbf{e}\,\mathbf{i},$$

kjer je $\mathbf{i}$ enotska matrika. Potem je

$$\mathbf{t} = 2\mu\epsilon_0 \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 3\lambda\epsilon_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} 620 & -480 & 0 \\ -480 & 460 & 0 \\ 0 & 0 & 300 \end{bmatrix} \text{GPa}.$$

4. (a) Prvo določimo silo podpor. Levo označimo z A, desno z B. Ravnovesje momentov s polom v levi podpori nam da

$$-\frac{l}{4} \times F_0 - \frac{l}{2} \times 2F_0 - \frac{3l}{4} \times 3F_0 + lB = 0 \Rightarrow B = \frac{7}{2}F_0,$$

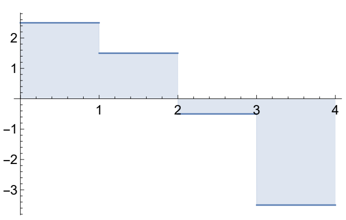
iz ravnovesja momentov s polom v desni podpori pa sledi

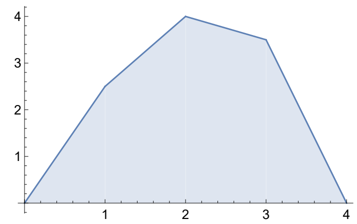
$$\frac{3l}{4} \times F_0 + \frac{l}{2} \times F_0 + \frac{l}{5} \times 3F_0 - lA = 0 \Rightarrow A = \frac{5}{2}F_0.$$

Pravilnost računa potrdi ravnovesje sil v vertikalni smeri $A + B - 6F = 0$.

Nosilec je točkovno obremenjen, prečna sila v levi podpori je enaka sili podpore, v točkah obremenitve pa ima skok enak obremenitvi. Tako velja $Q(x) = \frac{5}{2}F_0$ za $x \in [0, l/4)$, $Q(x) = \frac{3}{2}F_0$ za $x \in (l/4, l/2)$, $Q(x) = -\frac{1}{2}F_0$ za $x \in (l/2, 3l/4)$ in $Q(x) = -\frac{7}{2}F_0$ za $x \in (l/4, l)$. Upogibni moment narašča odsekoma linearno, pri $x = l/4$ doseže vrednost $M = \frac{5}{8}lF_0$, pri $x = l/2$ je $M = \frac{5}{8}lF_0 + \frac{3l}{8}F_0 = lF_0$. Nato se upogibni moment prične manjšati. Maksimalni upogibni moment je potem

$$M_{max} = lF_0.$$





(b) Presek je razlika dveh pravokotnikov. Ploskovni moment je tako

$$I = \frac{1}{12}ab^3 - \frac{1}{12}\frac{a}{2}\frac{b^3}{8} = \frac{5ab^3}{64}.$$

(c) Osna napetost nosilca je dana s formulo $\sigma = \frac{M}{I}z$. Ker je presek simetričen, je ekstremalna vrednost dosežena pri $\pm\frac{1}{2}b$. Veljati mora

$$\sigma_0 \geq \frac{M_{max}b}{2I} = \frac{blF_0}{2I} = \frac{32lF_0}{5ab^2}.$$

Tako dobimo

$$b \geq 4\sqrt{\frac{2lF_0}{5a\sigma_0}} = 0.2\,\mathrm{m}.$$