2. izpit iz Osnov mehanike, 13. julija 2020

1. Točka se prične v času $t_0 = 0$ premočrtno gibati enakomerno pospešeno s pospeškom a_0. Od časa t_1 naprej, ko doseže brzino v_1, se do časa $t_2 = 2t_1$ giblje enakomerno, nato pa enakomerno zavira tako, da ima v času $t_3 = 4t_1$ trenuto brzino nič.

   (a) Izračunaj pospešek zaviranja.

   (b) Izračunaj brzino in položaj v času t_1, t_2 in t_3.

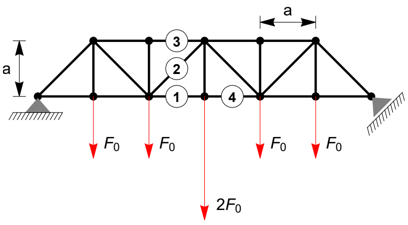
   (c) Za konkretne vrednosti $a_0 = 2\,\mathrm{m/s^2}$, $v_1 = 6\,\mathrm{m/s}$ skiciraj diagrame pospeška, hitrosti in položaja v odvisnosti od časa.

   (d) Naj točka po času t_3 nadaljuje z gibanjem. Kdaj se točka vrne v izhodiščni položaj?

2. Desna podpora paličja na sliki je drsna pod kotom $\pi/4$.

   (a) Določi sile v podporah;

   (b) Izračunaj označene sile palic.



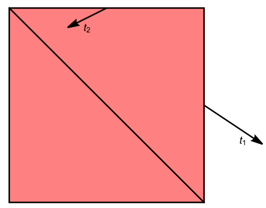
3. Na eni stranici kvadrata je dana napetosti $\vec{t}_1 = (3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath})\sigma_0$, na drugi stranici pa je normalna napetost negativna, velikost vektorja napetosti pa je $\sqrt{5}\sigma_0$, glej skico.

   (a) Dopolni sliko z vektorjema napetosti na preostalih dveh stranicah.

   (b) Določi pripadajoči napetostni tenzor.

   (c) Skiciraj Mohrovo krožnico, določi ekstremalni normalni napetosti in pripadajočo ekstremalno smer. Določi tudi maksimalno strižno napetost.

   (d) Izračunaj normalno in strižno napetost na označeno diagonalo pravokotnika.

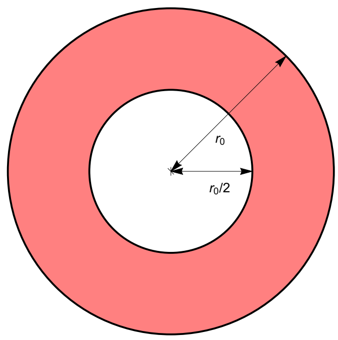


4. Enostavno podprt nosilec dolžine $l = 4\,\mathrm{m}$ je točkovno obremenjen v točkah, ki so oddaljene od leve podpore za $l/4$, $l/2$ in $3l/4$ s prečnimi silami $2F_0$, F_0 in F_0.

   (a) Določi potek upogibnega momenta in njegovo maksimalno vrednost.

   (b) Izračunaj ploskovni moment preseka na sliki.

   (c) Določi polmer r_0, da bo osna napetost v nosilcu manjša od $\sigma_0 = 80\,\mathrm{MPa}$, če je $F_0 = 5\,\mathrm{kN}$.



Rešitve

1. (a) Pospešek od t_0 do t_1 je enak a_0, od t_1 do t_2 je nič, od t_2 do t_3 pa je enak a_2. Potem hitrost od t_0 do t_1 enakomerno narašča do vrednosti $v_1 = a_0 t_1$, od t_1 do t_2 je konstantna, od t_2 do t_3 pa enakomerno pada od vrednosti v_1 do 0. Velja $0 - v_1 = a_2(t_3 - t_2) = 2a_2 t_1$. Potemtakem je $a_2 = -\frac{1}{2} v_1/t_1 = -\frac{1}{2} a_0$.

   (b) Vrednost hitrosti je v času t_1 in t_2 je enaka v_1, v času t_3 pa nič. Položaji so $x_1 = \frac{1}{2} a_0 t_1^2$ v času t_1, $x_2 = x_1 + v_1(t_2 - t_1) = \frac{3}{2} a_0 t_1^2$ in $x_3 = x_2 + \frac{1}{2} a_2 (t_3 - t_2)^2 + v_1(t_3 - t_2) = \frac{5}{2} a_0 t_1^2$.

   (c) Ker je $a_0 = 2\,\mathrm{m/s^2}$ in $v_1 = 6\,\mathrm{m/s}$, je $t_1 = 3\,\mathrm{s}$. Grafi so na sliki 1.

   (d) Za $t \geq t_2$ velja

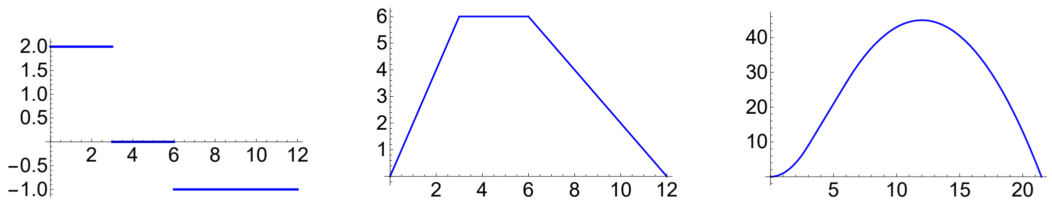
$$x = x(t) = x_2 + v_1(t - t_2) + \frac{1}{2} a_2 (t - t_2)^2 = \frac{3}{2} a_0 t_1^2 + a_0 t_1 (t - 2t_1) - \frac{1}{4} a_0 (t - 2t_1)^2.$$

   Iščemo rešitev enačbe $x(t_4) = 0$. Po krajšem računu dobimo kvadratno enačbo

$$(t_4 - 2t_1)^2 - 4t_1(t_4 - 2t_1) - 6t_1^2 = 0.$$

   Rešitev je

$$t_4 = (4 + \sqrt{10}) t_1.$$



Slika 1: Grafi pospeška, hitrosti in položaja v odvisnosti od časa.

2. (a) Sila leve podpore je $\vec{A} = A_1 \vec{\imath} + A_2 \vec{\jmath}$, desne pa $\vec{B} = B(-\vec{\imath} + \vec{\jmath})/\sqrt{2}$. Momentna enačba s polom v desni podpori se glasi

$$-6 \times A_2 + 5a \times F_0 + 4a \times F_0 + 3a \times 2F_0 + 2a \times F_0 + a \times F_0 = 0 \Rightarrow A_2 = 3F_0,$$

   momentna enačba s polom v levi podpori pa je

$$6a \times \frac{1}{\sqrt{2}} B - a \times F_0 - 2a \times F_0 - 3a \times 2F_0 - 4a \times F_0 - 5a \times F_0 = 0 \Rightarrow B = 3\sqrt{2} F_0.$$

   Ravnovesna enačba sil v vodoravni smeri je

$$A_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} B = 0 \Rightarrow A_1 = 3F_0.$$

   (b) Sile palic 1,2 in 3 dobimo s prerezno metodo. Zapišimo ravnovesne pogoje za levi del paličja. Ravnovesje momentov s polom v presečišču palice 2 in 3 je

$$a \times F_1 + a \times F_0 + 2a \times F_0 + a \times A_1 - 3a \times A_2 = 0 \Rightarrow F_1 = 3F_0.$$

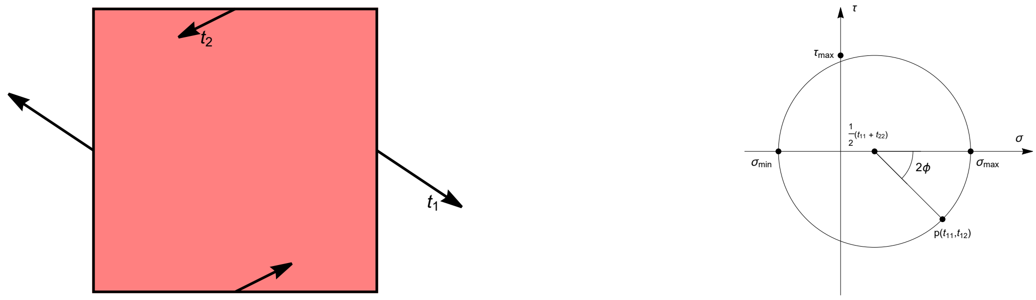
   Ravnovesje momentov s polom v presečišču palice 1 in 2 je

$$-a \times F_3 + a \times F_0 - 2a \times A_2 = 0 \Rightarrow F_3 = -5F_0.$$

   Iz ravnovesja sil v navpični smeri potem sledi

$$\frac{1}{\sqrt{2}} F_2 - 2F_0 + A_2 = 0 \Rightarrow F_2 = -\sqrt{2} F_0.$$

   Silo F_4 dobimo z vozliščno metodo. Iz ravnovesja v vodoravni smeri sledi $F_4 = F_1 = 3F_0$.



Slika 2: Slika napetosti na robu in Mohrova krožnica.

3. (a) Dopolnjena skica napetosti je na sliki 3a.

(b) Ker je podan vektor napetosti na stranici z normalo v smeri osi x je

$$\underline{\underline{t}} = \sigma_0 \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & t_{22} \end{bmatrix}.$$

Potem $\vec{t}_2 = \underline{\underline{t}}\vec{\jmath} = \sigma_0(-2\vec{\imath} + t_{22}\vec{\jmath})$. Velikost je $|t_2| = \sqrt{4 + t_{22}^2}$. Iz enačbe $\left|\vec{t}_2\right| = \sigma_0\sqrt{5}$ in pogoja, da je $t_{22}, 0$ sledi, da je $t_{22} = -\sigma_0$. Napetostni tenzor je tako

$$\underline{\underline{t}} = \sigma_0 \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

(c) Središče Mohrove krožnice je pri $\sigma = \sigma_0$, polmer krožnice pa je $\frac{1}{2}\sqrt{(t_{11} - t_{22})^2 + 4t_{12}^2}\sigma_0 = 2\sqrt{2}\sigma_0$. Exstremalni napetosti sta tako $\sigma_{max} = (1 + 2\sqrt{2})\sigma_0$ in $\sigma_{min} = (1 - 2\sqrt{2})\sigma_0$. Maksimalna strižna napetost je $\frac{1}{2}(\sigma_{max} - \sigma_{min}) = 2\sqrt{2}\,\sigma_0$. Smer maksimalne normalne napetosti dobimo po formuli

$$\phi_{max} = \frac{1}{2}\arctan\frac{2t_{12}}{t_{11} - t_{22}} = -\frac{\pi}{8}.$$

(d) Normala na diagonalo je $\vec{n} = (\vec{\imath} + \vec{\jmath})/\sqrt{2}$. Vektor napetosti je

$$\vec{t} = \underline{\underline{t}} \cdot \vec{n} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{2}}\,(\vec{\imath} - 3\vec{\jmath})\,.$$

Normalna napetost je $t_n = \vec{t} \cdot \vec{n} = -\sigma_0$, strižna pa $\tau = \sqrt{\left|\vec{t}\right|^2 - t_n^2} = 2\sigma_0$.

(e) i. Prvo določimo silo podpor. Levo označimo z A, desno z B. Ravnovesje momentov s polom v levi podpori nam da

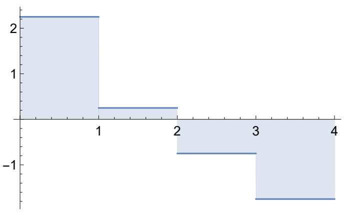
$$-\frac{l}{4} \times 2F_0 - \frac{l}{2} \times F_0 - \frac{3l}{4} \times F_0 + lB = 0 \Rightarrow B = \frac{7}{4}F_0,$$

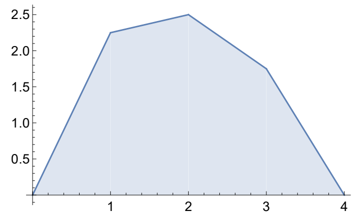
iz ravnovesja momentov s polom v desni podpori pa sledi

$$\frac{3l}{4} \times 2F_0 + \frac{l}{2} \times F_0 + \frac{l}{4} \times F_0 - lA = 0 \Rightarrow A = \frac{9}{4}F_0.$$

Pravilnost računa potrdi ravnovesje sil v vertikalni smeri $A + B - 4F = 0$.
Nosilec je točkovno obremenjen, prečna sila v levi podpori je enaka sili podpore, v točkah obremenitve pa ima skok enak obremenitvi. Tako velja $Q(x) = \frac{9}{4}F_0$ za $x \in [0, l/4)$, $Q(x) = \frac{1}{4}F_0$ za $x \in (l/4, l/2)$, $Q(x) = -\frac{3}{4}F_0$ za $x \in (l/2, 3l/4)$ in $Q(x) = -\frac{7}{4}F_0$ za $x \in (l/4, l)$. Upogibni moment narašča odsekoma linearno, pri $x = l/4$ doseže vrednost $M = \frac{9}{16}lF_0$, pri $x = l/2$ je $M = \frac{9}{16}lF_0 + \frac{l}{16}lF_0 = \frac{5}{8}lF_0$. Nato se upogibni moment prične manjšati. Maksimalni upogibni moment je potem

$$M_{max} = \frac{5}{8}lF_0.$$





ii. Presek je razlika dveh krogov. Ploskovni moment je tako

$$I = \frac{1}{4}\pi r_0^4 - \frac{1}{4}\pi (r_0/2)^2 = \frac{15\pi}{64} r_0^4.$$

iii. Osna napetost nosilca je dana s formulo $\sigma = \frac{M}{I} z$. Ker je presek simetričen, je ekstremalna vrednost dosežena pri $\pm r_0$. Veljati mora

$$\sigma_0 \geq \frac{M_{\max} r_0}{I} = \frac{5 l r_0 F_0}{8I} = \frac{8 l F_0}{3\pi r_0^3}.$$

Tako dobimo

$$r_0 \geq \left(\frac{8 l F_0}{3\pi \sigma_0} \right)^{1/3} = 9.4\,\mathrm{cm}.$$