2. izpit iz Osnov mehanike, 5. julij 2021

1. Za prostorski sistem sil podan na sliki s silami v smereh stranic in glavne diagonale kvadra dimenzij $a = 2\,\text{m}$, $b = 1\,\text{m}$ in $c = 2\,\text{m}$:

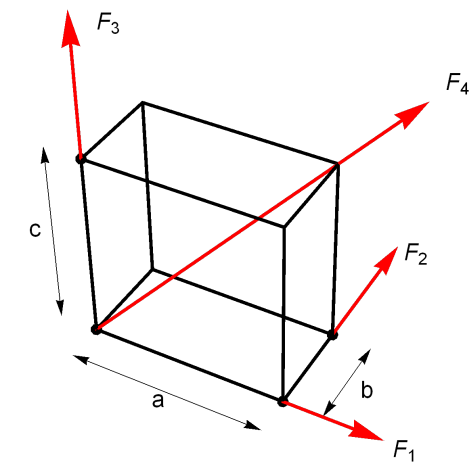
   (a) določi sile in njihova prijemališča;

   (b) izračunaj rezultanto sil in navora glede na pol v izbranem vogalu kvadra;

   (c) izračunaj invarianto sistema sil;

   (d) določi skupno prijemališče ali os sistema.

   Velikosti sil so $F_1 = 1\,\text{kN}$, $F_2 = 1\,\text{kN}$, $F_3 = 2\,\text{kN}$, $F_4 = 3\,\text{kN}$.

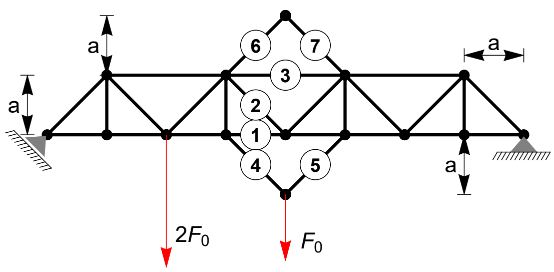


2. Leva podpora paličja na sliki je drsna pod kotom $\pi/4$.

   (a) Določi sile v podporah;

   (b) Izračunaj sili palic F_4, F_5, F_6 in F_7.

   (c) Izračunaj sile palic F_1, F_2 in F_3.



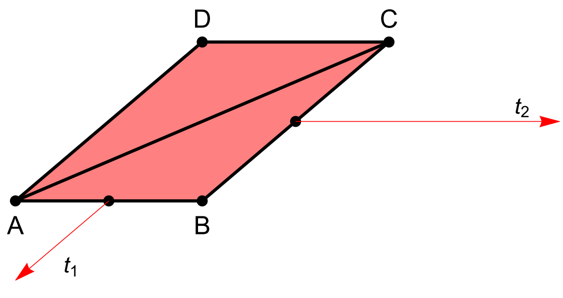
3. Romb z vmesnim kotom $\pi/4$ je v ravninskem napetostnem stanju. Na stranici AB je vektor napetosti enak $\vec{t}_1 = -\sigma_0(\vec{\imath}+\vec{\jmath})$, na stranici BC pa je velikost vektorja napetosti $\vec{t}_2$ enaka $2\sqrt{2}\sigma_0$.

   (a) Določi napetostni tenzor $\underline{\underline{t}}$.

   (b) Za primer $t_{11} > 0$ določi ekstremalno normalno in strižno napetost ter nariši Mohrovo krožnico.

   (c) Izračunaj vektor napetosti na diagonali AC. Izračunaj tudi normalno in strižno napetost.

   (d) Pri predpostavki, da je deformacija ravninska izračunaj pripadajoči deformacijski tenzor, če je $E = 120\,\text{GPa}$ in $\nu = 1/3$.

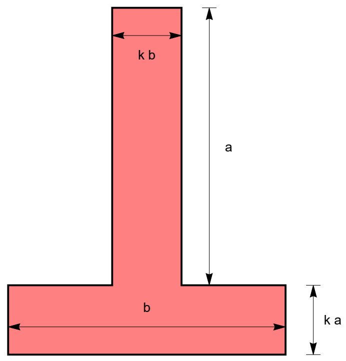


4. Enostavno podprti nosilec dolžine $l = 1\,\mathrm{m}$ je v razdaljah $l_1 = 1/4\,\mathrm{m}$, $l_2 = 1/2\,\mathrm{m}$ in $l_3 = 3/4\,\mathrm{m}$ od leve podpore točkovno obremenjen s silami $F_1 = 3F_0$, $F_2 = 2F_0$ in $F_3 = F_0$. Vse sile delujejo navzdol.

   (a) Določi maksimalen upogibni momenta.

   (b) Za presek nosilca na skici ($k < 1$) določi središče in ploskovni moment drugega reda.

   (c) Določi dopustno obremenitev F_0 tako, da je natezna napetost v nosilcu manjša od $\sigma_0 = 120\,\mathrm{MPa}$.



Rešitve

1. (a) Izhodišče koordinatnega sitema postavimo v levo spodnje oglišče, koordinatne osi pa usmerimo v smeri stranic kvadra, x v smeri stranice z dolžino a, y in z pa v smeri z dolžino b in c. Primejališča sil so tako $A_1(a,0,0)$, $A_2(a,b,0)$, $A_3(0,0,c)$ in $A_4(0,0,0)$. Enotski vektorji $\vec{e}_i$ v smeri sil $\vec{F}_1$ so

$$\vec{e}_1 = \vec{\imath}, \quad \vec{e}_2 = \vec{\jmath}, \quad \vec{e}_3 = \vec{k}, \quad \vec{e}_4 = \frac{a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Sile so $\vec{F}_i = F_i\vec{e}_i$, $i = 1,2,3,4$. Potem je za dane podatke

$$\vec{F}_1 = F_0\vec{\imath}, \quad \vec{F}_2 = F_0\vec{\jmath}, \quad \vec{F}_3 = 2F_0\vec{k}, \quad \vec{F}_4 = F_0(2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k}).$$

(b) Rezultanta je

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = F_0(3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 4\vec{k})F_0.$$

Za izračun momenta po principu polznosti sil prijemališča sil $\vec{F}_1$ in $\vec{F}_3$ prestavimo v izhodišče $O(0,0,0)$. Potem je

$$\vec{N}(O) = \vec{OA}_2 \times \vec{F}_2 = 2F_0\mathrm{m}\vec{k}.$$

(c) Invarianta sistema sil je $\vec{R}\cdot\vec{N} = 8F_0\mathrm{m}$.

(d) Ker invarianta ni enaka nič, sistem sil nima skupnega prijemališča. Os sistema dobimo po formuli

$$\vec{OP}_0 = \frac{\vec{R}\times\vec{N}}{\vec{R}\cdot\vec{R}} = \frac{2}{29}(2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath})\mathrm{m}.$$

2. (a) Sila leve podpore je $\vec{A} = A(\vec{\imath} + \vec{\jmath})/\sqrt{2}$, desne pa $\vec{B} = B_1\vec{\imath} + B_2\vec{\jmath}$. Momentna enačba s polom v levi podpori se glasi

$$-2a \times 2F_0 - 4a \times F_0 + 8a \times B_2 = 0 \Rightarrow B_2 = F_0,$$

momentna enačba s polom v desni podpori pa je

$$-8a \times \frac{1}{\sqrt{2}}A + 6a \times 2F_0 + 4a \times F_0 = 0 \Rightarrow A = 2\sqrt{2}F_0.$$

Ravnovesna enačba sil v vodoravni smeri je

$$A\frac{1}{\sqrt{2}} + B_1 = 0 \Rightarrow B_1 = -2F_0.$$

(b) Ker presečišče palic 6 in 7 ni obremenjeno, je $F_6 = F_7 = 0$. Nadalje iz ravnovesja sil v presečišču palic 4 in 5 sledi $F_4 = F_5 = F_0/\sqrt{2}$.

(c) Za izračun sil palic 1,2 in 3 lahko sedaj uporabimo prerezno metodo saj sta sili palic 4 in 5 znani. Zapišimo ravnovesne pogoje za desni del paličja. Ravnovesje momentov s polom v presečišču palice 1 in 2 je

$$a \times F_3 + 4a \times B_2 - a \times \frac{1}{2}F_0 = 0 \Rightarrow F_3 = -\frac{7}{2}F_0.$$

Ravnovesje momentov s polom v presečišču palice 2 in 3 je

$$-a \times F_1 - a\frac{3}{2}\sqrt{2} \times F_5 + a \times B_1 + 5a \times B_2 = 0 \Rightarrow F_1 = \frac{3}{2}F_0.$$

Iz ravnovesja sil v navpični smeri potem sledi

$$\frac{1}{\sqrt{2}}F_2 - \frac{1}{2}F_0 + B_2 = 0 \Rightarrow F_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}F_0.$$

3. (a) Koordinatno os x postavimo v smer stranice AB, y pa navpično navzgor. Normala na stranico AB je $\vec{n}_1 = -\vec{\jmath}$. Potem je $\vec{t_1} = \underline{\underline{t}}(-\vec{\jmath})$. Tako dobimo enačbo

$$-\sigma_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{12} & t_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Od tod sledi $t_{12} = t_{22} = \sigma_0$. Določiti moramo še t_{11}.
Normala na stranico BC je $\vec{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath} - \vec{\jmath})$. Potem je $\vec{t_2} = \underline{\underline{t}} \cdot \vec{n}_2$ oziroma

$$\vec{t_2} = \begin{bmatrix} t_{11} & \sigma_0 \\ \sigma_0 & \sigma_0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} t_{11} - \sigma_0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tako dobimo enačbo

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |t_{11} - \sigma_0| = 4\sigma_0.$$

Rešitvi sta $t_{11} = 5\sigma_0$ in $t_{11} = -3\sigma_0$.

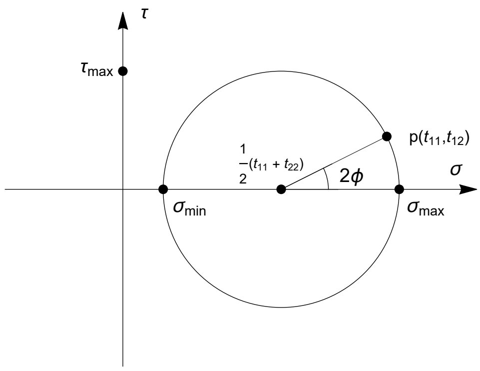
(b) Pri pogoju $t_{11} > 0$ je

$$\underline{\underline{t}} = \sigma_0 \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Središče Mohrove krožnice je pri $\sigma = 3\sigma_0$, polmer krožnice pa je

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{(t_{11} - t_{22})^2 + 4t_{12}^2 \sigma_0} = \sqrt{5}\sigma_0.$$

Exstremalni napetosti sta tako $\sigma_{max} = (3 + \sqrt{5})\sigma_0$ in $\sigma_{min} = (3 - \sqrt{5})\sigma_0$. Maksimalna strižna napetost je $\frac{1}{2}(\sigma_{max} - \sigma_{min}) = \sqrt{5}\,\sigma_0$.



Slika 1: Mohrova krožnica.

(c) Enotski vektor v smeri diagonale AC je $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\vec{\imath} + \vec{\jmath})$. Normala na AC je potem $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{\imath} - 2\vec{\jmath})$. Vektor napetosti je

$$\vec{t} = \underline{\underline{t}} \cdot \vec{n} = \sigma_0 \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Normalna napetost je

$$t_n = \vec{t} \cdot \vec{n} = \sigma_0,$$

strižna pa je

$$t_s = \sqrt{\left|\vec{t}\right|^2 - t_n^2} = \sigma_0.$$

(d) Deformacijski tenzor dobimo s Hookovim zakonom

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{t}} - \frac{\nu}{E}\mathrm{Sl}\,\underline{\underline{I}}.$$

Pri danih podatkih je

$$\underline{\underline{e}} = \frac{\sigma_0}{180}\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

4. (a) Prvo določimo silo podpor. Levo označimo z A, desno z B. Ravnovesje momentov s polom v levi podpori nam da

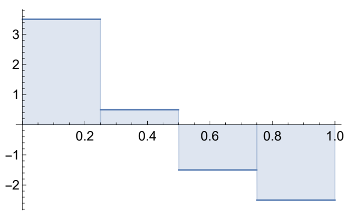
$$-\frac{l}{4} \times 3F_0 - \frac{l}{2} \times 2F_0 - \frac{3l}{4} \times F_0 + lB = 0 \Rightarrow B = \frac{5}{2}F_0,$$

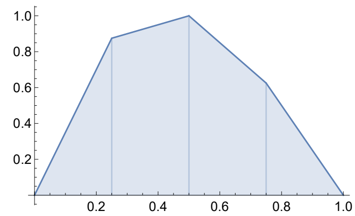
iz ravnovesja momentov s polom v desni podpori pa sledi

$$\frac{3l}{4} \times 3F_0 + \frac{l}{2} \times 2F_0 + \frac{l}{4} \times F_0 - lA = 0 \Rightarrow A = \frac{7}{2}F_0.$$

Pravilnost računa potrdi ravnovesje sil v vertikalni smeri $A + B - 6F = 0$.
Nosilec je točkovno obremenjen, prečna sila v levi podpori je enaka sili podpore, v točkah obremenitve pa ima skok enak obremenitvi. Tako velja $Q(x) = \frac{7}{2}F_0$ za $x \in [0, l/4)$, $Q(x) = \frac{1}{4}F_0$ za $x \in (l/4, l/2)$, $Q(x) = -\frac{3}{4}F_0$ za $x \in (l/2, 3l/4)$ in $Q(x) = -\frac{7}{4}F_0$ za $x \in (l/4, l]$. Upogibni moment narašča odsekoma linearno, pri $x = l/4$ doseže vrednost $M = \frac{7}{8}lF_0$, pri $x = l/2$ je $M = \frac{7}{8}lF_0 + \frac{l}{8}lF_0 = lF_0$. Nato se upogibni moment prične manjšati. Maksimalni upogibni moment je potem

$$M_{\max} = lF_0.$$





(b) T presek je sestavljen iz dveh pravokotnikov. Spodnjega označimo z A_1, zgornjega z A_2. Očitno je

$$|A_1| = |A_2| = kab.$$

Masni središči pravokotnikov sta od spodnje stranice oddaljeni za $c_1 = \frac{1}{2}ka$ in $c_2 = a(k + \frac{1}{2})a$. Potem je masno srediče preseka oddaljeno za

$$c = \frac{1}{A_1 + A_2}(c_1 A_1 + c_2 A_2) = \frac{1}{4}a(1 + 3k).$$

V središce postavimo sedaj koordinatni sistem z osjo z usmerjeno navpično navzdol. Ploskovni moment preseka je $I = I_1 + I_2$, kjer je

$$I_1 = (c - c_1)^2 A_1 + \frac{1}{12}b(ka)^3 \quad \text{in} \quad I_2 = (c - c_2)^2 A_2 + \frac{1}{12}kba^3.$$

Tako dobimo

$$I = \frac{5}{24}a^3bk^3 + \frac{1}{4}a^3bk^2 + \frac{5}{24}a^3bk.$$

(c) Osna napetost je enaka $\sigma = \frac{M}{I}z$. Veljati mora

$$\frac{M_{\max}}{I}|z_{\max}| \leq \sigma_{\max}.$$

Določiti moramo še z_{max}. V ta namen izračunamo razdaljo sredi'šča do spodnjega in zgornjega roba preseka. Razdalja so spodnjega roba je $z_1 = c$, do zgornjega pa $z_2 = a(k+1) - c = \frac{1}{4}a(3 + k)$. Pri pogoju $k < 1$ je $z_2 > z_1$. Tako dobimo pogoj

$$F_0 \leq \frac{4I\sigma_{\max}}{(3 + k)la}.$$