1. kolokvij iz Osnov mehanike, 13. april 2022

1. Za prostorski sistem sil podan na sliki s silami v smereh stranice in diagonal kvadra dimenzije $3\,\mathrm{m} \times 4\,\mathrm{m} \times 2\,\mathrm{m}$:

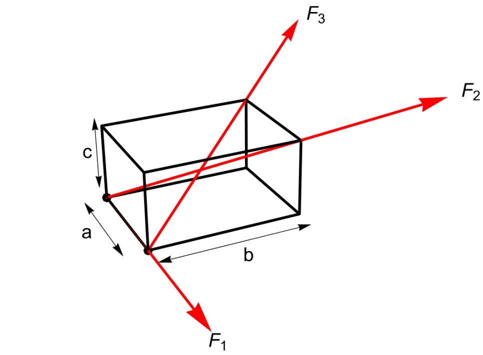
   (a) določi sile in njihova prijemališča;

   (b) izračunaj rezultanto sil in navora glede na pol v vogalu kvadra;

   (c) izračunaj invarianto sistema sil;

   (d) določi skupno prijemališče ali os sistema.

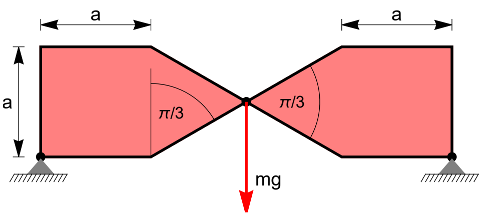
   Velikosti sil so $F_1 = 1\,\mathrm{kN}$, $F_2 = 5\mathrm{kN}$, $F_3 = \sqrt{29}\mathrm{kN}$.



2. Dve homogeni plošči sestavljeni iz kvadrata in enakostarničnega trikotnika sta členkasto spojeni in členkasto podprti tako kot kaže skica. Masa posamezne plošče je m, sila teže pa deluje v navpični smeri navzdol. Spoj plošč je obremenjen s silo tako kot kaže skica.

   (a) Določi masni središči plošč.

   (b) Določi sile v podporah.

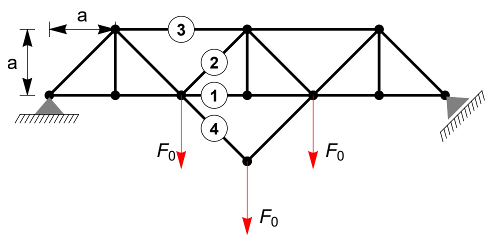


3. Za podano paličje na sliki:

   (a) določi sile v podporah;

   (b) določi silo palice 4.

   (c) izračunaj sile palic 1,2,in 3.

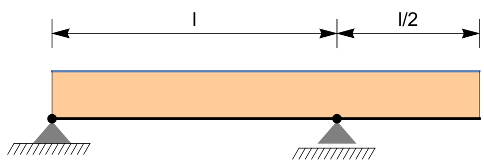


4. Prevesni nosilec je enakomerno linijsko obremenjen z gostoto q_0.

   (a) Izračunaj sile podpor.

   (b) Določi potek prečne sile in upogibnega momenta.

   (c) Kje je upogibni moment po absolutni vrednosti največji?



Rešitve

1. (a) Izhodišče koordinatnega sistema postavimo v oglišče kvadra, koordinatne smeri pa usmerimo v smereh njegovih stranic. Primejališča sil so $A_1(0,0,0)$, $A_2(0,0,0)$ in $A_3(3\,\mathrm{m},0,0)$. Enotski vektorji v smereh sil so $\vec{e}_1 = \vec{\imath}$, $\vec{e}_2 = \frac{1}{5}(3\vec{\imath}+4\vec{\jmath})$ in $\vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{29}}(-3\vec{\imath}+4\vec{\jmath}+2\vec{k})$. Sile so potem $\vec{F}_1 = F_1\vec{e}_1 = \vec{\imath}\mathrm{kN}$, $\vec{F}_2 = F_2\vec{e}_2 = (3\vec{\imath}+4\vec{\jmath})\mathrm{kN}$ in $\vec{F}_3 = F_3\vec{e}_3 = (-3\vec{\imath}+4\vec{\jmath}+2\vec{k})\mathrm{kN}$.

   (b) Rezultanta je
$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (\vec{\imath}+8\vec{\jmath}+2\vec{k})\mathrm{kN}.$$
   Momenti so $\vec{OA_1} \times \vec{F}_1 = \vec{0}$, $\vec{OA_2} \times \vec{F}_2 = \vec{0}$ in $\vec{OA_3} \times \vec{F}_3 = 3\vec{\imath} \times (-3\vec{\imath}+4\vec{\jmath}+2\vec{k})\mathrm{kN}$. Rezultanta navorov je
$$\vec{N} = \sum_{i=1}^{3} \vec{OA_i} \times \vec{F}_i = 6(-\vec{\jmath}+2\vec{k})\mathrm{kNm}.$$

   (c) Ker je $\vec{R}\cdot\vec{N} = -24\,(\mathrm{kN})^2\mathrm{m} \neq 0$, sistem nima skupnega prijemališča. Izračunajmo še os sistema. Dobimo jo po formuli
$$\vec{OP_0} = \frac{\vec{R}\times\vec{N}}{\vec{R}\cdot\vec{R}} = \frac{2}{23}(18\vec{\imath}-4\vec{\jmath}-\vec{k})\mathrm{m}.$$

2. (a) Izračunali bomo masno središče levega lika. Lik je sestavljen iz kvadrata in enakostraničnega trikotnika. Izhodišče koordinatnega sistema postavimo v levo podporo, os x pa v smeri proti desni podpori. Očitno je y koordinata masnega središča enaka $a/2$. Izračunajmo še x koordinato. Sestavimo tabelo

Lik	A	x_*
kvadrat	a^2	$a/2$
trikotnik	$a^2\sqrt{3}/4$	$a + a\sqrt{3}/6$

   Tu smo upoštevali, da je masno središče trikotnika v smeri osi x enako eni tretini višine trikotnika. Potem je
$$x_* = \frac{x_1A_1 + x_2A_2}{A_1 + A_2} = \frac{\left(5+2\sqrt{3}\right)a}{2\left(4+\sqrt{3}\right)} \approx 0.738314a.$$

   (b) Označimo silo leve podpore $\vec{A} = A_1\vec{\imath} + A_2\vec{\jmath}$ in silo desne podpore $\vec{B} = B_1\vec{\imath} + B_2\vec{\jmath}$. Iz simetrije problema sledi, da je $A_2 = B_2$. Potem iz ravnovesne enačbe sil v navpični smeri sledi $2A_2 - 3mg = 0$ in tako
$$A_2 = B_2 = \frac{3}{2}mg.$$
   Ravnovesna enačba v vodoravni smeri se glasi $A_1 + B_1 = 0$. Postavimo pol navora v spoj plošč. Ravnovesna enačba navora na levo ploščo je potem
$$-a(1+\frac{\sqrt{3}}{2})A_2 + \frac{a}{2}A_1 + (a(1+\frac{\sqrt{3}}{2}) - x_*)mg = 0.$$
   Od tod sledi
$$A_1 = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\frac{x_*}{a}\right).$$

3. (a) Silo leve podpore zapišemo v obliki $\vec{A} = A_1\vec{\imath} + A_2\vec{\jmath}$, silo desne pa $\vec{B} = B(-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\imath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath})$. Momentna enačba s polom v levi podpori se glasi

$$-2aF_0 - 3aF_0 - 4aF_0 + 6aB\frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow B = \frac{3}{\sqrt{2}}F_0.$$

Momentna enačba s polom v desni podpori je

$$2aF_0 + 3aF_0 + 4aF_0 - 6aA_2 = 0 \Rightarrow A_2 = \frac{3}{2}F_0.$$

Ravnovesna enačba sil v vodoravni smeri je

$$A_1 - B\frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow A_1 = \frac{3}{2}F_0.$$

(b) Silo F_4 dobimo z vozliščno metodo. Iz enačbe

$$2F_4\frac{1}{\sqrt{2}} = F_0$$

sledi

$$F_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}F_0.$$

(c) Za izračun sil palic 1,2 in 3 lahko sedaj uporabimo prerezno metodo. Zapišimo ravnovesne pogoje za levi del paličja. Ravnovesje momentov s polom v presečišču palice 2 in 3 je

$$aA_1 - 2aA_2 + aF_0 + aF_1 + a\sqrt{2}F_4 = 0 \Rightarrow F_1 = F_0.$$

Ravnovesje momentov s polom v presečišču palice 1 in 2 je

$$-aF_3 - 2aA_2 = 0 \Rightarrow F_3 = -3F_0.$$

Iz ravnovesja sil v navpični smeri potem sledi

$$A_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}F_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}F_4 - F_0 = 0 \Rightarrow F_2 = 0.$$

4. (a) Označimo silo leve podpore z $\vec{A} = A_1\vec{\imath} + A_2\vec{\jmath}$, desne pa z $\vec{B} = B_2\vec{\jmath}$. Linijski obremenitvi je ekvipolentna točkovna obremenitev sile $\vec{F}$ velikosti $\frac{3}{2}lq_0$ v smeri navpično navzdol s prijemališčem točki na osi nosilca, v oddaljenosti $\frac{3}{4}l$ od leve podpore.
Iz momentne enačbe s polom v levi podpori sledi

$$-\frac{3}{4}l \times \frac{3}{2}lq_0 + lB_2 = 0$$

in od tod

$$B_2 = \frac{9}{8}lq_0.$$

Iz momentne enačbe s polom v desni podpori sledi

$$A_2 = \frac{3}{8}lq_0.$$

Ker v vodoravni smeri ni obremenitve, je $A_1 = 0$.

(b) Potek prečne sile je odsekoma linearen s skokom navzgor v desni podpori, ki je enak sili podpore. V levem krajišču je prečna sila enaka sili desne podpore, v desnem krajišču pa je enaka nič. Smerni koeficient padanja prečne sile je q_0. Tako je pri $\frac{3}{8}l$ vrednost prečne sile enaka nič, pri $x = l$ pa z leve $-\frac{5}{8}lq_0$, z desne pa $\frac{1}{2}lq_0$.

Upogibni moment je v krajiščih enak nič in je sestavljen iz dveh navzdol obrnjenih parabol. Temeni parabol sta tam, kjer je prečna sila enaka nič, torej pri $\frac{3}{8}l$ in $\frac{3}{2}l$. Ker za $x < l$ velja $Q(x) = -q_0 x + \frac{3}{8}lq_0$, je na tem delu

$$M(x) = -\frac{1}{2}q_0 x^2 + \frac{3}{8}q_0 l x.$$

Tu smo upoštevali, da je $M(0) = 0$. Na desnem delu je $Q(x) = \frac{1}{2}lq_0 + (l - x)q_0 = \frac{3}{2}lq_0 - xq_0$ in zato

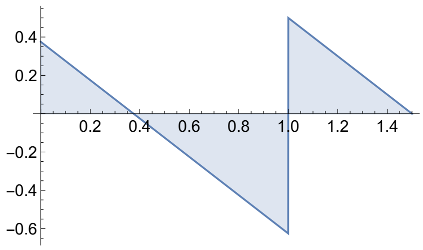
$$M(x) = -\frac{1}{2}q_0 x^2 + \frac{3}{2}lq_0 x + C.$$

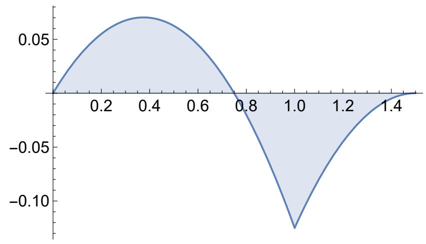
Ker je $M(3l/2) = 0$, je

$$C = -\frac{9}{8}q_0 l^2$$

in za $x \geq l$

$$M(x) = -\frac{1}{2}q_0 x^2 + \frac{3}{2}lq_0 x - \frac{9}{8}q_0 l^2 = -\frac{1}{2}q_0\left(x - \frac{3}{2}l\right)^2.$$





(c) Izračunajmo upogibni moment pri $x = \frac{3}{8}l$ in $x = l$. Dobimo

$$M\left(\frac{3}{8}l\right) = \frac{9}{128}q_0 l^2 \qquad M(l) = -\frac{1}{8}q_0 l^2.$$

Po absolutni vrednosti je največji moment v podpori.