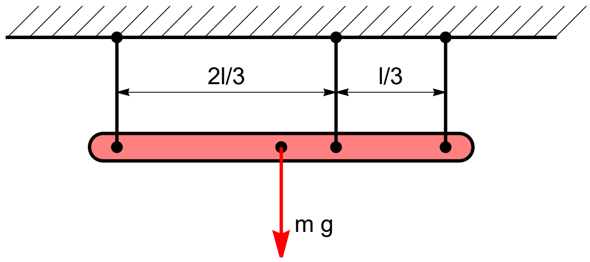
2. kolokvij iz Osnov mehanike, 26. maj 2022

1. Homogeni nosilec je obešen na tri elastične žice tako kot kaže skica. Žice imajo enak presek, Youngov modul prve in tretje žice je E, srednje pa $2E$.

    (a) Zapiši ravnovesne enačbe.

    (b) Izračunaj sile žic.

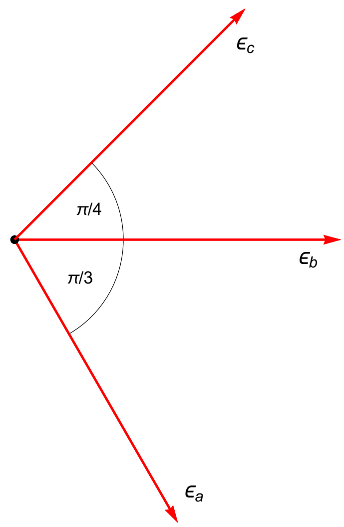


2. V smereh označenih na skici smo z ekstenziometrom izmerili osne deformacije $\epsilon_a = -\epsilon_0/2$, $\epsilon_b = 2\epsilon_0$, $\epsilon_c = -\epsilon_0/\sqrt{3}$.

    (a) Določi deformacijski tenzor.

    (b) Določi ekstremalne deformacije in skiciraj Mohrovo krožnico.

    (c) V kateri smeri je osna deformacija največja?



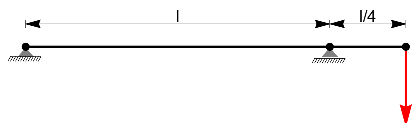
3. V izotropičnem materialu smo pri dani deformaciji

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

izmerili normalni napetosti $\sigma_1 = -\sigma_0$ v smeri osi $\vec{\imath}$ in $\sigma_3 = 2\sigma_0$ v smeri osi $\vec{k}$.

- Določi Yongov modul in Poissonov količnik.
- Določi napetostni tenzor.

4. Enostavno podprt prevesni nosilec na sliki je na prevesu obremenjen s silo F_0, glej sliko.



    (a) Določi potek upogibnega momenta in njegovo maksimalno vrednost.

    (b) Nosilec je votel. Zunanji rob je kvadrat dimenzije $a \times a$, notranji pa $b \times b$, kjer je $b = ka$ in k število med 0 in 1. Izračunaj ploskovni moment preseka.

    (c) Določi pogoj na koeficient k, da bo napetost v nosilcu po absolutni velikosti manjša od σ_0. Izračun naredi za konkretne vrednosti $l = 2\,\mathrm{m}$, $a = 2\,\mathrm{cm}$, $\sigma_0 = 120\,\mathrm{MPa}$, $F_0 = 240N$.

Rešitve

1. (a) Sile žic označimo s F_1, F_2 in F_3. Ravnovesni enačbi sta

$$
\begin{aligned}
F_1 + F_2 + F_3 &= mg, \\
\frac{2}{3}F_2 + F_3 &= \frac{1}{2}mg.
\end{aligned}
$$

Ker so žice elastične, velja $F_1 = AE\frac{\Delta d_1}{d}$, $F_1 = 2AE\frac{\Delta d_2}{d}$ in $F_3 = AE\frac{\Delta d_3}{d}$. Tu smo z A označili presek žic, z E Youngov modul, z d dolžino neraztegnjenih žic in z Δd_i razteg i-te žice. Pri zapisu Youngovih modulov smo upoštevali, da ima srednja žica modul $2E$. Ker je nosilec raven, veljaja zveza

$$
\frac{\Delta d_2 - \Delta d_1}{2d/3} = \frac{\Delta d_3 - \Delta d_2}{d/3}.
$$

Upoštevajmo to enačbo in izrazimo sile z deformacijami. Tako dobimo sistem

$$
\begin{aligned}
\Delta d_1 + 2\Delta d_2 + \Delta d_3 &= a, &(1)\\
4\Delta d_2 + 3\Delta d_3 &= \frac{3a}{2}, &(2)\\
-\Delta d_1 + 3\Delta d_2 - 2\Delta d_3 &= 0, &(3)
\end{aligned}
$$

kjer je $a = mgd/AE$.

(b) Seštejemo enačbi (1) in (3). Tako dobimo

$$
5\Delta d_2 - \Delta d_3 = a. \qquad (4)
$$

Pomnožimo (4) s 3 in jo prištejemo k enačbi (2). Potem je $19\Delta d_2 = 9a/2$. Po krajšem računu potem sledi

$$
\Delta d_1 = \frac{13}{38}a, \quad \Delta d_2 = \frac{9}{38}a \quad \Delta d_3 = \frac{7}{38}a.
$$

Iskane sile so:

$$
F_1 = \frac{13}{38}mg, \quad \Delta d_2 = \frac{18}{38}mg \quad \Delta d_3 = \frac{7}{38}mg.
$$

2. (a) Postavimo koordinatno os x v smeri deformacije ϵ_b. Potem je deformacijski tenzor oblike

$$
\underline{\underline{\epsilon}} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} 2 & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} \end{bmatrix}.
$$

Sedaj bomo uporabili formulo

$$
\epsilon(\varphi) = \frac{1}{2}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + \frac{1}{2}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})\cos 2\varphi + \epsilon_{12}\sin 2\varphi
$$

za kota $\varphi = -\pi/3$ in $\varphi = \pi/4$. Upoštevajmo, da je $\cos(-2\pi/3) = -\frac{1}{2}$ in $\sin(-2\pi/3) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Po krajšem računu dobimo

$$
-2 = \frac{3}{2}\epsilon_{22} - \sqrt{3}\epsilon_{12}. \qquad (5)
$$

Za kot $\varphi = \pi/4$ pa

$$
-1 - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\epsilon_{22} + \epsilon_{12}. \qquad (6)
$$

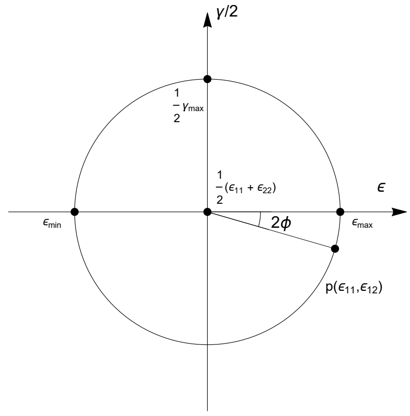
Pomnožimo (6) s -3 in prištejemo k (5). Tako dobimo $\epsilon_{12} = -1/\sqrt{3}$ in nato še $\epsilon_{22} = -2$. Iskani deformacijski tenzor je

$$
\underline{\underline{\epsilon}} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} 2 & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} & -2 \end{bmatrix}.
$$

(b) Mohrova krožnica ima središče v izhodišču koordinatnega sistema $(\sigma, \frac{1}{2}\gamma)$. Polmer krožnice je

$$r = \sqrt{\epsilon_{12}^2 + (\frac{1}{2}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22}))^2} = \epsilon_0\sqrt{13/3}.$$

Potem je $\epsilon_{max} = \epsilon_0\sqrt{13/3}$ in $\epsilon_{min} = -\epsilon_0\sqrt{13/3}$. Skica Mohrove krožnice je na desni.



(c) Smer maksimalne osne deformacije dobimo po formuli

$$\varphi_{max} = \frac{1}{2}\arctan\frac{2\epsilon_{12}}{\epsilon_{11} - \epsilon_{22}} = -\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right).$$

3. (a) Uporabili bomo Hookov zakon za izotropični material

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{t}} - \frac{\nu}{E}\mathrm{Sl}\underline{\underline{t}}\,\underline{\underline{I}}.$$

Iz izmerjenih normalnih napetosti sledi $t_{11} = -\sigma_0$ in $t_{33} = 2\sigma_0$. Za diagonalne elemente potem sledijo enačbe

$$\begin{aligned}
\epsilon_{11} = \epsilon_0 &= \frac{1}{E}t_{11} - \frac{\nu}{E}t_{22} - \frac{\nu}{E}t_{33} = \frac{1}{E}\left(-(1+2\nu)\sigma_0 - \nu t_{22}\right),\\
\epsilon_{22} = -2\epsilon_0 &= -\frac{\nu}{E}t_{11} + \frac{1}{E}t_{22} - \frac{\nu}{E}t_{33} = \frac{1}{E}\left(-\nu\sigma_0 + t_{22}\right),\\
\epsilon_{33} = 0 &= -\frac{\nu}{E}t_{11} - \frac{\nu}{E}t_{22} + \frac{1}{E}t_{33} = \frac{1}{E}\left((2+\nu)\sigma_0 - \nu t_{22}\right).
\end{aligned}$$

Iz tretje enačbe sledi takoj $t_{22} = \frac{2+\nu}{\nu}\sigma_0$. Potem iz prve enačbe sledi

$$E\epsilon_0 = -3(1+\nu)\sigma_0, \tag{7}$$

iz druge pa

$$-2E\epsilon_0 = -\nu\sigma_0 + \frac{2+\nu}{\nu}\sigma_0 = -\frac{1}{\nu}(\nu-2)(1+\nu)\sigma_0. \tag{8}$$

Ker je vedno $\nu > -1$, sledi iz (7) in (8), da je $6\sigma_0 = (2-\nu)/\nu$ in od tod $\nu = \frac{2}{7}$. Iz (7) potem dobimo

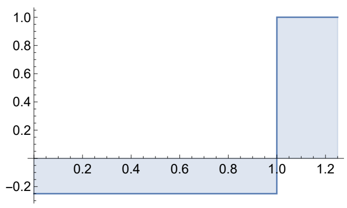
$$E = -\frac{27\sigma_0}{7\epsilon_0}.$$

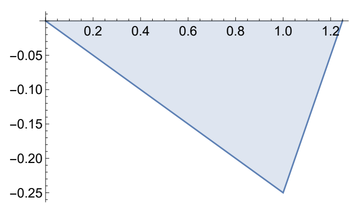
Ker mora veljati $E > 0$, sta σ_0 in ϵ_0 različnega predznaka.

(b) Sedaj, ko poznamo E in ν lahko hitro izračunamo še preostale komponente napetostnega tenzorja. Dobimo

$$t_{22} = \frac{2+\nu}{\nu}\sigma_0 = 8\sigma_0, \quad t_{12} = 2\mu\epsilon_{12} = \frac{E}{1+\nu} = -3\sigma_0, \quad t_{13} = t_{23} = 0.$$

4. (a) Označimo silo leve podpore z A, desne pa B. Iz ravnovesnih enačb statike dobimo takoj $A = -\frac{1}{4}F_0$ in $B = \frac{5}{4}F_0$. Potek prečne sile je odsekoma konstanten, upogibni moment pa je odsekoma linearen, glej sliko spodaj.





Upogibni moment je vseskozi negativen. Velja $|M|_{max} = \frac{1}{4} l F_0$.

(b) Ploskovni moment preseka je

$$I = \frac{1}{12} a^4 - \frac{1}{12} (ka)^4 = \frac{1}{12} (1 - k^4) a^4.$$

(c) Pogoj na napetost je

$$\frac{|M|_{max}}{I} |z_{max}| < \sigma_0. \tag{9}$$

V enačbo vstavimo $|z_{max}| = \frac{a}{2}$. Potem iz (9) sledi

$$\frac{3 F_0 l}{2(1 - k^4) a^3} < \sigma_0.$$

Vstavimo v neenakost podatke naloge. Po krajšem računu sledi

$$k^4 < \frac{1}{4}$$

oziroma $k < 1/\sqrt{2}$.