1. izpit iz Osnov mehanike, 2. junij 2022

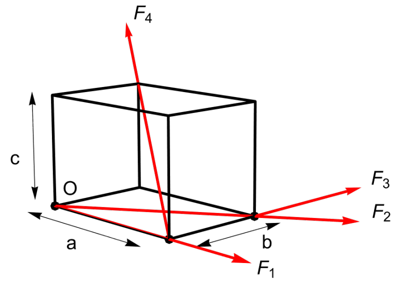
1. Za prostorski sistem sil podan na sliki s silami v smereh stranice in diagonal kvadra dimenzije $3\,\mathrm{m} \times 2\,\mathrm{m} \times 2\,\mathrm{m}$:

   (a) določi sile in njihova prijemališča;

   (b) izračunaj rezultanto sil in navora glede na pol v vogalu kvadra;

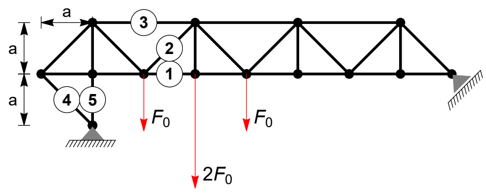
   (c) izračunaj invarianto sistema sil;

   (d) določi skupno prijemališče ali os sistema.

   Velikosti sil so $F_1 = F_0$, $F_2 = \sqrt{13}F_0$, $F_3 = F_0$, $F_4 = \sqrt{17}F_0$.

2. Za paličje na sliki z desno drsno podporo pod kotom $\pi/4$:

   (a) določi sile v podporah;

   (b) določi silo palic 4 in 5.

   (c) izračunaj sile palic 1,2 in 3.

3. V homogenem izotropičnem materialu smo izmerili osno deformacijo $\epsilon_{11} = \epsilon_0$ in strižno deformacijo $\epsilon_{12} = 4\epsilon_0$.

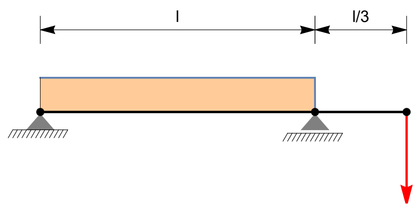
   (a) Določi Yongov modul in Poissonov količnik, če tej deformaciji pripada napetostni tenzor

   $$\underline{\underline{t}} = \sigma_0 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (b) Določi deformacijski tenzor.

   (c) Skiciraj Mohrovo krožnico za dani napetostni tenzor. Določi tudi smer maksimalne normalne napetosti.

4. Prevesni nosilec dolžine $\frac{4}{3}l$ na sliki je med podporama enakmerno linijsko obremenjen z gostoto q_0, na prevesnem koncu pa je obremenjen s silo $F = lq_0$, glej sliko.

   (a) Določi potek prečne sile in upogibnega momenta.

   (b) Nosilec je votel. Zunanji rob je pravokotnik kvadrat dimenzije $a \times 2a$, notranji pa $b \times 2b$, kjer je $b = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Izračunaj ploskovni moment preseka.

   (c) Določi maksimalno osno napetost v nosilcu.

Rešitve

1. (a) Izhodišče koordinatnega sistema postavimo v spodnje levo oglišče, koordinatne osi x, y, z pa usmerimo v smereh robov kvadra a, b, c. V brezdimenzijskem zapsisu so potem prijemališča sil točke $P_1(0,0,0)$, $P_2(0,0,0)$, $P_3 = (3,0,0)$ in $P_4(3,0,0)$. Sile so v smereh enotskih vektorjev $\vec{e}_1 = \vec{\imath}$, $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{13}}(3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath})$, $\vec{e}_3 = \vec{\jmath}$ in $\vec{e}_4 = \frac{1}{\sqrt{17}}(-3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 2\vec{k})$. Sile so $\vec{F}_i =_i \vec{e}_i$ in tako

$$\vec{F}_1 = F_0\vec{\imath}, \quad \vec{F}_2 = F_0(3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}), \quad \vec{F}_3 = F_0\vec{\jmath}, \quad \vec{F}_4 = F_0(-3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}).$$

   (b) Rezultanta sil je

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = F_0(\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 2\vec{k}).$$

   Rezultanta navorov s polom v $O = P_1$ je

$$\vec{N} = O\vec{P}_3 \times \vec{F}_4 + O\vec{P}_4 \times \vec{F}_4 = 3\vec{\imath} \times (-3\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 2\vec{k})\mathrm{m}F_0 = 3\mathrm{m}F_0(-2\vec{\jmath} + 3\vec{k}).$$

   (c) Invarianta je

$$I = \vec{R} \cdot \vec{N} = -12\mathrm{m}F_0^2.$$

   (d) Ker je $I \neq 0$ sistem sil nima skupnega prijemališča. Krajevni vektor do osi sistema je

$$O\vec{P}_0 = \frac{\vec{R} \times \vec{N}}{\vec{R} \cdot \vec{R}} = \frac{1}{10}\mathrm{m}(\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} + 2\vec{k}) \times (-2\vec{\jmath} + 3\vec{k}) = \frac{1}{10}\mathrm{m}(19\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} - 2\vec{k}).$$

2. (a) Označimo levo podporo z A desno z B. Sila leve podpore je $\vec{A} = A_1\vec{\imath} + A_2\vec{\jmath}$, sila desne pa $\vec{B} = \frac{B}{\sqrt{2}}(-\vec{\imath} + \vec{\jmath})$. Tu smo upoštevali, da je desna podpora drsna pod kotom $\pi/4$. Momentna enačba s polom v A je

$$-aF_0 - 2a(2F_0) - 3aF_0 + 7a\frac{1}{\sqrt{2}}B + a\frac{1}{\sqrt{2}}B = 0.$$

   Od tod sledi

$$B = \sqrt{2}F_0.$$

   Iz ravnovesja sil v vodoravni smeri $A_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}B = 0$ dobimo

$$A_1 = F_0.$$

   Komponento A_2 dobimo iz ravnovesne enačbe v navpični smeti $A_2 - 4F_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}B = 0$. Tako je

$$A_2 = 3F_0.$$

   (b) Sili F_4 in F_5 dobimo z vozliščno metodo. Rezultanta sil na vozlišče A je enaka nič. Potem v vodoravni smeri

$$A_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}F_4 = 0 \Rightarrow F_4 = \sqrt{2}F_0,$$

   v navpični smeri pa

$$A_2 + F_5 + \frac{1}{\sqrt{2}}F_4 = 0 \Rightarrow F_5 = -4F_0.$$

   (c) Sile F_1, F_2 in F_3 izračunamo s prerezno metodo. Iz ravnovesja navora s polom v presečišču prve in druge palice za desni del paličja sledi

$$-aF_3 - aA_2 + aA_1 = 0 \Rightarrow F_3 = -2F_0,$$

iz ravnovesja navora s polom v presečišču druge in tretje palice pa dobimo

$$aF_0 + aF_1 - 2aA_2 + 2aA_1 = 0 \Rightarrow F_1 = 3F_0.$$

Silo F_2 dobimo iz ravnovesja sil v navpični smeri

$$\frac{1}{\sqrt{2}}F_2 + A_2 - F_0 = 0 \Rightarrow F_2 = -2\sqrt{2}F_0.$$

Pravilnost rezultata preverimo z ravnovesno enačbo v vodoravni smeri

$$\frac{1}{\sqrt{2}}F_2 + F_1 + F_3 + A_1 = 0.$$

3. (a) Uporabimo Hookov zakon za komponenti ϵ_{11} in ϵ_{12}. Tako je

$$\epsilon_0 = \epsilon_{11} = \frac{1}{E}t_{11} - \frac{\nu}{E}t_{22} - \frac{\nu}{E}t_{33} = \frac{1-2\nu}{E}\sigma_0$$

in

$$4\epsilon_0 = \epsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E}t_{12} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_0.$$

Delimo drugo enačbo s prvo. Dobimo

$$4 = \frac{1+\nu}{1-2\nu} \Rightarrow \nu = \frac{1}{3}.$$

Sedaj, ko poznamo ν, izračunamo

$$E = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0}$$

iz druge enačbe.

(b) Po Hookovem zakonu je očitno $\epsilon_{23} = \epsilon_{13} = 0$. Za komponento ϵ_{22} je

$$\epsilon_{22} = -\frac{\nu}{E}t_{11} + \frac{1}{E}t_{22} - \frac{\nu}{E}t_{33} = \frac{1}{E}(-\frac{1}{3}\sigma_0 + 2\sigma_0) = 5\epsilon_0$$

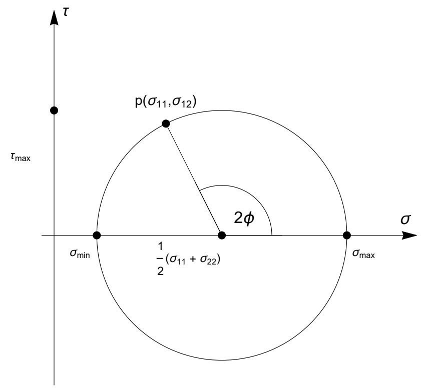
in

$$\epsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}t_{11} - \frac{\nu}{E}t_{22} + \frac{1}{E}t_{33} = -3\epsilon_0.$$

(c) Središče Mohrove krožnice je v $\frac{1}{2}(t_{11}+t_{22}) = \frac{3}{2}\sigma_0$. Polemer krožnice je

$$r = \sqrt{t_{12}^2 + \frac{1}{4}(t_{11} - t_{22})^2} = \frac{1}{2}\sigma_0\sqrt{5}.$$

Skica Mohrove krožnice je na desni.



4. (a) Označimo z F_A in F_B sili leve in desne podpore. Linijski obremenitvi je ekvipolentna točkovna obremenitev velikosti lq_0 s prijemališčem pri $x = \frac{1}{2}l$. Momentna enačba s polom v levi podpori je

$$-\frac{1}{2}l^2q_0 + F_Bl - \frac{4}{3}l^2q_0 = 0 \Rightarrow F_B = \frac{11}{6}lq_0.$$

Momentna enačba s polom v desni podpori pa je

$$-lF_A + \frac{1}{2}l^2q_) - \frac{1}{3}l^2q_0 = 0 \Rightarrow F_A = \frac{1}{6}lq_0.$$

Za prečno silo med podporama velja $\frac{dQ}{dx} = -q_0$. Potem je $Q = -q_0 x + C_1$ in ker je v levi podpori prečna sila enaka sili leve podpore, je $C_1 = \frac{1}{6} l q_0$. V desni podpori ima Q skok navzgor velikosti sile desne podpore, nato pa je prečna sila konstanta z vrednostjo $l q_0$.
Za upogibni moment med podporamam velja $\frac{dM}{dx} = Q$. Potem je

$$M(x) = -\frac{1}{2} q_0 x^2 + \frac{1}{6} l q_0 x + C_2.$$

V levi podpori je $M(x=0) = 0$ in tako za $x \in [0, l]$

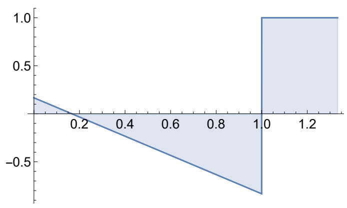
$$M(x) = q_0 x (\frac{1}{6} l - \frac{1}{2} x).$$

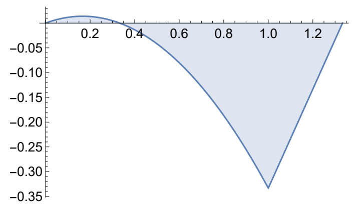
Za $x > l$ je prečna sila konstantna, Upogibni moment pa je linearna funkcija $M(x) = l q_0 x + C_3$. Ker je na krajišču $M(\frac{4}{3} l) = 0$, je

$$M(x) = l q_0 (x - \frac{4}{3} l).$$

Po absolutni vrednosti je največju upogibni moment enak

$$|M(x = l)| = \frac{1}{3} l^2 q_0.$$





(b) Ploskovni moment je

$$I = I_1 - I_2 = \frac{1}{12} a (2a)^3 - \frac{1}{12} b (2b)^3 = \frac{1}{2} a^4.$$

(c) Po formuli

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{max}|}{I} |z|_{\max} = \frac{2 l^2 q_0}{3 a^3}.$$