2. izpit iz Osnove mehanike, 29. junij 2022

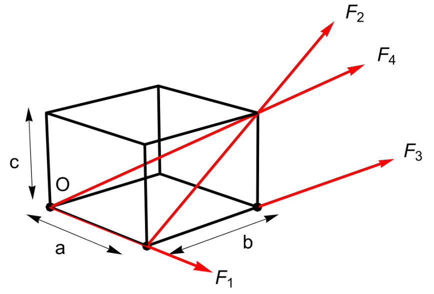
1. Za prostorski sistem sil podan na sliki s silami v smereh stranice in diagonal kvadra dimenzije 3 m × 3 m × 2 m:

   (a) določi sile in njihova prijemališča;

   (b) izračunaj rezultanto sil in navora glede na pol O;

   (c) izračunaj invarianto sistema sil;

   (d) določi skupno prijemališče ali os sistema.



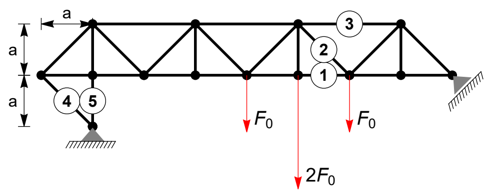
   Velikosti sil so $F_1 = F_0$, $F_2 = \sqrt{13}F_0$, $F_3 = F_0$, $F_4 = \sqrt{22}F_0$.

2. Za paličje na sliki z desno drsno podporo pod kotom $\pi/4$:

   (a) določi sile v podporah;

   (b) določi silo palic 4 in 5.

   (c) izračunaj sile palic 1,2 in 3.

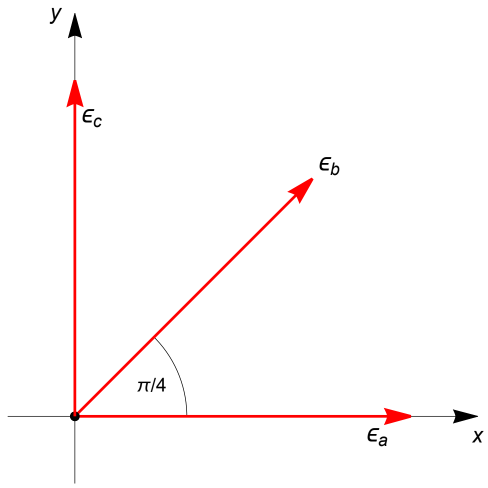


3. V homogenem izotropičnem materialu smo izmerili osne deformacije $\epsilon_a = \frac{21\epsilon_0}{10}$, $\epsilon_b = -\frac{3\epsilon_0}{20}$ in $\epsilon_c = \frac{3\epsilon_0}{5}$, glej sliko.

   (a) Določi deformacijski tenzor.

   (b) Istočasno smo izmerili tudi normalni napetosti $t_{xx} = 2\sigma_0$ in $t_{yy} = \sigma_0$. Pri predpostavki, da velja Hookov zakon določi Youngov modul in Poissonov količnik.

   (c) Izračunaj še preostale komponente napetostnega tenzorja.

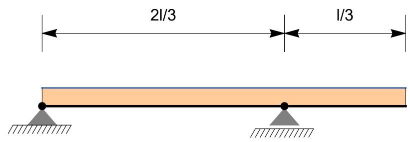


4. Prevesni nosilec dolžine l je enakmerno linijsko obremenjen z gostoto q_0, glej sliko.

   (a) Določi potek prečne sile in upogibnega momenta.

   (b) Nosilec je votel. Zunanji rob je pravokotnik dimenzije $a \times 2a$, notranji pa $b \times 2b$, kjer je $b = ka$. Izračunaj ploskovni moment preseka.

   (c) Določi maksimalno osno napetost v nosilcu.



Rešitve

1. (a) Izhodišče koordinatnega sistema postavimo v spodnje levo oglišče, koordinatne osi x, y, z pa usmerimo v smereh robov kvadra a, b, c. V brezdimenzijskem zapsisu so prijemališča sil točke $P_1(0,0,0)$, $P_2(3,0,0)$, $P_3(3,0,0)$ in $P_4(0,0,0)$. Sile pa so

$$\vec{F}_1 = F_0\vec{\imath}, \quad \vec{F}_2 = F_0(3\vec{\jmath} + 2\vec{\jmath}), \quad \vec{F}_3 = F_0\vec{\jmath}, \quad \vec{F}_4 = F_0(3\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 2\vec{k}).$$

(b) Rezultanta sil je

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = F_0(4\vec{\imath} + 7\vec{\jmath} + 4\vec{k}).$$

Rezultanta navorov s polom v $O = P_1$ je

$$\vec{N} = O\vec{P}_2 \times \vec{F}_2 + O\vec{P}_3 \times \vec{F}_3 = 3\mathrm{m}F_0(-6\vec{\jmath} + 12\vec{k}).$$

(c) Invarianta je

$$I = \vec{R} \cdot \vec{N} = 6\mathrm{m}F_0^2.$$

(d) Ker je $I \neq 0$ sistem sil nima skupnega prijemališča. Krajevni vektor do osi sistema je

$$O\vec{P}_0 = \frac{\vec{R} \times \vec{N}}{\vec{R} \cdot \vec{R}} = \frac{1}{27}(36\vec{\imath} - 16\vec{\jmath} - 8\vec{k})\mathrm{m}.$$

2. (a) Označimo levo podporo z A desno z B. Sila leve podpore je $\vec{A} = A_1\vec{\imath} + A_2\vec{\jmath}$, sila desne pa $\vec{B} = \frac{B}{\sqrt{2}}(-\vec{\imath} + \vec{\jmath})$. Tu smo upoštevali, da je desna podpora drsna pod kotom $\pi/4$. Momentna enačba s polom v A je

$$-3aF_0 - 4a(2F_0) - 5aF_0 + 7a\frac{1}{\sqrt{2}}B + a\frac{1}{\sqrt{2}}B = 0.$$

Od tod sledi

$$B = 2\sqrt{2}F_0.$$

Iz ravnovesja sil v vodoravni smeri $A_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}B = 0$ dobimo

$$A_1 = 2F_0.$$

Komponento A_2 dobimo iz ravnovesne enačbe v navpični smeti $A_2 - 4F_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}B = 0$. Tako je

$$A_2 = 2F_0.$$

(b) Sili F_4 in F_5 dobimo z vozliščno metodo. Rezultanta sil na vozlišče A je enaka nič. Potem v vodoravni smeri

$$A_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}F_4 = 0 \Rightarrow F_4 = 2\sqrt{2}F_0,$$

v navpični smeri pa

$$A_2 + F_5 + \frac{1}{\sqrt{2}}F_4 = 0 \Rightarrow F_5 = -4F_0.$$

(c) Sile F_1, F_2 in F_3 izračunamo s prerezno metodo. Iz ravnovesja navora s polom v presečišču prve in druge palice za desni del paličja sledi

$$aF_3 + 2a\frac{1}{\sqrt{2}}B = 0 \Rightarrow F_3 = -4F_0,$$

iz ravnovesja navora s polom v presečišču druge in tretje palice pa dobimo

$$-aF_1 - aF_0 + 3a\frac{1}{\sqrt{2}}B - a\frac{1}{\sqrt{2}}B = 0 \Rightarrow F_1 = 3F_0.$$

Silo F_2 dobimo iz ravnovesja sil v navpični smeri

$$\frac{1}{\sqrt{2}}F_2 - F_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}B = 0 \Rightarrow F_2 = -\sqrt{2}F_0.$$

Pravilnost rezultata preverimo z ravnovesno enačbo v vodoravni smeri

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}F_2 - F_1 - F_3 - \frac{1}{\sqrt{2}}B = 0.$$

3. (a) Iz naloge sledi,da je

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \epsilon_a & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{21}{10}\epsilon_0 & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{12} & \frac{3}{5}\epsilon_0 \end{bmatrix}$$

Določiti moramo še komponento ϵ_{12}. Po formuli za $\varphi = \pi/4$ je

$$\epsilon_b = \frac{1}{2}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) - \frac{1}{2}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})\cos\frac{\pi}{2} + \epsilon_{12}\sin\frac{\pi}{2}.$$

Od tod po kratkem računu dobimo $\epsilon_{12} = -\frac{3}{2}\epsilon_0$ in

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \frac{21}{10} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

(b) Uporabimo Hookov zakon v obliki

$$\underline{\underline{t}} = 2\mu\underline{\underline{e}} + \lambda\,\mathrm{sl}\,\underline{\underline{eI}}.$$

Potem je

$$t_{11} = 2\mu\epsilon_{11} + \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}),$$
$$t_{22} = 2\mu\epsilon_2 + \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}).$$

Upoštevajmo, da je za ravninsko deformacijo $\epsilon_{33} = 0$ in da je $t_{11} = t_{xx} = 2\sigma_0$ in $t_{22} = t_{yy} = \sigma_0$. Dobimo sistem enačb

$$2\sigma_0 = 2\mu\epsilon_0\frac{21}{10} + \lambda\frac{27}{10}\epsilon_0,$$
$$\sigma_0 = 2\mu\epsilon_0\frac{3}{5} + \lambda\frac{27}{10}\epsilon_0.$$

Odštejemo drugo enačbo od prve. Potem je

$$\sigma_0 = 2\mu\epsilon_0\frac{15}{10} \Rightarrow \mu = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0}.$$

Vstavimo dobljeni μ v drugo enačbo. Po krajšem računu sledi

$$\lambda = \frac{2\sigma_0}{9\epsilon_0}.$$

Sedaj upoštevamo še formuli

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad \text{in} \quad E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}.$$

Po krajšem računu dobimo

$$\nu = \frac{1}{5} \quad \text{in} \quad E = \frac{4\sigma_0}{5\epsilon_0}.$$

(c) Izračunati moramo še komponente t_{12}, t_{23}, t_{13} in t_{33}. Ker je deformacija ravninska, je $t_{23} = t_{13} = 0$. Nadalje je

$$t_{12} = 2\mu\epsilon_{12} = -\frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$$

in

$$t_{33} = 2\mu\epsilon_{33} + \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) = \frac{2\sigma_0}{9\epsilon_0}\frac{27}{10}\epsilon_0 = \frac{3\sigma_0}{5}.$$

Opomba: Točki b) in c) lahko rešimo tudi z upoštevanjem Hookovega zakona v obliki

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{t}} - \frac{\nu}{E}\,\mathrm{sl}\,\underline{\underline{t}}\,\underline{\underline{I}}.$$

4. (a) Določimo prvo sile podpor. Označimo z F_A in F_B sili leve in desne podpore. Linijski obremenitvi je ekvipolentna točkovna obremenitev velikosti lq_0 s prijemališčem pri $x = \frac{1}{2}l$. Momentna enačba s polom v levi podpori je

$$-\frac{1}{2}l^2q_0 + F_B\frac{2l}{3} = 0 \Rightarrow F_B = \frac{3}{4}lq_0.$$

Momentna enačba s polom v desni podpori pa je

$$-\frac{2l}{3}F_A + \frac{1}{6}l^2q_0 = 0 \Rightarrow F_A = \frac{1}{4}lq_0.$$

Za prečno silo med podporama velja $\frac{dQ}{dx} = -q_0$. Potem je med podporama $Q = Q_1 = -q_0x + C_1$ in ker je v levi podpori prečna sila enaka sili leve podpore, je $C_1 = \frac{1}{4}lq_0$. V prevesnem delu je $Q = Q_2 = -q_0x + C_2$. V desni podpori ima Q skok navzgor velikosti sile desne podpore, zato je

$$Q(x = 2l/3) = -q_0\frac{2l}{3} + \frac{1}{4}lq_0 + \frac{3}{4}lq_0 = \frac{1}{3}lq_0.$$

Od tod sledi

$$C_2 = Q(x = 2l/3) + q_0\frac{2}{3}l = \frac{1}{3}lq_0 + q_0\frac{2}{3}l = lq_0.$$

Tako je $Q_2 = -q_0x + lq_0$ za $x \geq 2l/3$. Vidimo, da je potem res $Q_2(x = l) = 0$, saj je desni konec prost.
Za upogibni moment velja $\frac{dM_i}{dx} = Q_i$, kjer je $i = 1, 2$. Potem je

$$M_1(x) = -\frac{1}{2}q_0x^2 + \frac{1}{4}lq_0x + C_3.$$

V levi podpori je $M(x = 0) = 0$ in zato $C_3 = 0$. Tako je za $x \in [0, 2l/3]$

$$M(x) = M_1 = q_0x(\frac{1}{4}l - \frac{1}{2}x).$$

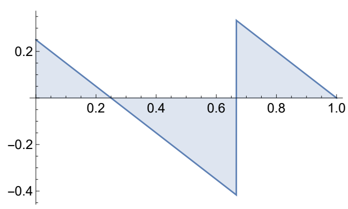
Za $x > 2l/3$ je

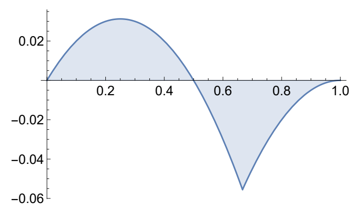
$$M_2(x) = -\frac{1}{2}q_0x^2 + lq_0x + C_4.$$

Na prostem koncu je $M_2(x = l) = 0$, zato je $C_4 = -\frac{1}{2}q_0l^2$.
Maksimalna vrednost upogibnega momenta je desni podpori. Potem je

$$M_{max} = |M_1(2l/3)| = |M_2(2l/3)| = q_0l^2\frac{1}{18}.$$

Sliki prečne sile in upogibnega mmenta za primer $q_0 = 1$, $l = 1$.





(b) Ploskovni moment je

$$I = I_1 - I_2 = \frac{1}{12}a(2a)^3 - \frac{1}{12}b(2b)^3 = \frac{2}{3}a^4(1-k^4).$$

(c) Po formuli

$$\sigma_{max} = \frac{|M_{\mathrm{max}}|}{I}|z|_{\mathrm{max}} = \frac{q_0 l^2}{6a^3(1-k^4)}.$$