3. izpit iz Osnove mehanike 30. avgust 2022

1. Za prostorski sistem sil podan na sliki s silami v smereh stranice in diagonal kvadra dimenzije 2 m × 1 m × 3 m:

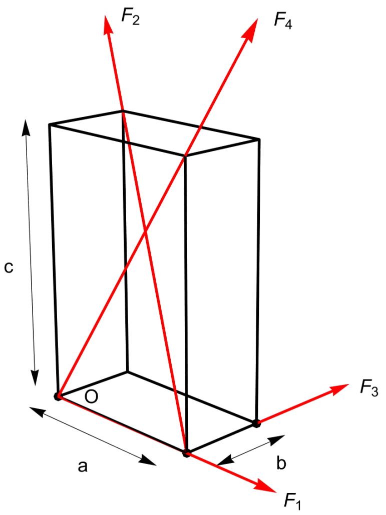
   (a) določi sile in njihova prijemališča;

   (b) izračunaj rezultanto sil in navora glede na pol O;

   (c) izračunaj invarianto sistema sil;

   (d) določi skupno prijemališče ali os sistema.

   Velikosti sil so $F_1 = F_0$, $F_2 = \sqrt{14}F_0$, $F_3 = F_0$, $F_4 = \sqrt{13}F_0$.

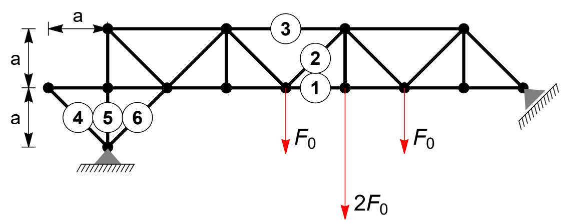


2. Za paličje na sliki z desno drsno podporo pod kotom $\pi/4$:

   (a) določi sile v podporah;

   (b) določi sile palic 4, 5 in 6.

   (c) izračunaj sile palic 1,2 in 3.

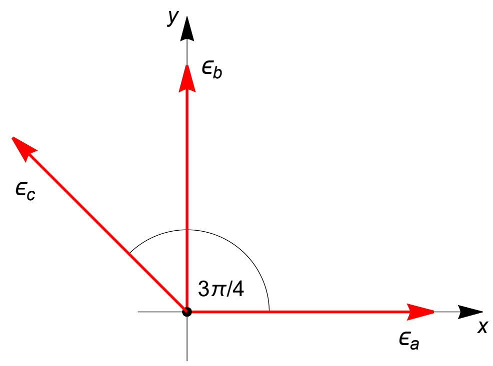


3. V homogenem izotropičnem materialu, ki je v ravninskem deformacijskem stanju, smo v ravnini deformacije izmerili osne deformacije $\epsilon_a = 0$, $\epsilon_b = 2\epsilon_0$ in $\epsilon_c = 3\epsilon_0$, glej sliko.

   (a) Določi deformacijski tenzor.

   (b) Istočasno smo izmerili tudi normalni napetosti $t_{xx} = \sigma_0$ in $t_{yy} = 2\sigma_0$. Pri predpostavki, da velja Hookov zakon določi Youngov modul in Poissonov količnik.

   (c) Izračunaj še preostale komponente napetostnega tenzorja.

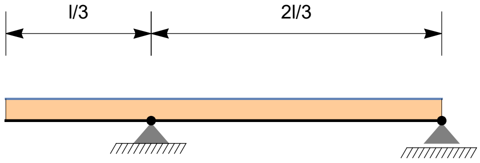


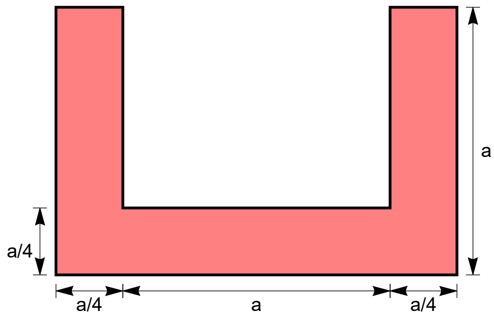
4. Prevesni nosilec dolžine l je enakmerno linijsko obremenjen z gostoto q_0, glej sliko.

   (a) Določi potek prečne sile in upogibnega momenta.

   (b) Nosilec ima presek črke U, glej skico. Določi masno središče preseka in njegov ploskovni moment.

   (c) Določi maksimalno osno napetost v nosilcu.


l/3
2l/3


a
a/4
a/4
a
a/4

Rešitve

1. (a) Izhodišče koordinatnega sistema postavimo v točko O koordinatne osi x, y, z pa usmerimo v smereh robov kvadra a, b, c. V brezdimenzijskem zapsisu so prijemališča sil točke $P_1(0,0,0)$, $P_2(2,0,0)$, $P_3(2,0,0)$ in $P_4(2,0,0)$. Sile pa so

$$\vec{F}_1 = F_0\vec{\imath}, \quad \vec{F}_2 = F_0(-2\vec{\imath}+\vec{\jmath}+3\vec{k}), \quad \vec{F}_3 = F_0\vec{\jmath}, \quad \vec{F}_4 = F_0(2\vec{\imath}+3\vec{k}).$$

(b) Rezultanta sil je

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = F_0(\vec{\imath}+2\vec{\jmath}+6\vec{k}).$$

Rezultanta navorov s polom v O je

$$\vec{N} = \vec{OP}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{OP}_3 \times \vec{F}_3 + \vec{OP}_4 \times \vec{F}_4 = 3\mathrm{m}F_0(-6\vec{\jmath}+4\vec{k}).$$

(c) Invarianta je

$$I = \vec{R}\cdot\vec{N} = 12\mathrm{m}F_0^2.$$

(d) Ker je $I \neq 0$ sistem sil nima skupnega prijemališča. Krajevni vektor do osi sistema je

$$\vec{OP}_0 = \frac{\vec{R}\times\vec{N}}{\vec{R}\cdot\vec{R}} = \frac{1}{41}(44\vec{\imath}-4\vec{\jmath}-6\vec{k})\mathrm{m}.$$

2. (a) Označimo levo podporo z A desno z B. Sila leve podpore je $\vec{A} = A_1\vec{\imath}+A_2\vec{\jmath}$, sila desne pa $\vec{B} = \frac{B}{\sqrt{2}}(-\vec{\imath}+\vec{\jmath})$. Tu smo upoštevali, da je desna podpora drsna pod kotom $\pi/4$. Momentna enačba s polom v A je

$$-3aF_0 - 4a(2F_0) - 5aF_0 + 7a\frac{1}{\sqrt{2}}B + a\frac{1}{\sqrt{2}}B = 0.$$

Od tod sledi

$$B = 2\sqrt{2}F_0.$$

Iz ravnovesja sil v vodoravni smeri $A_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}B = 0$ dobimo

$$A_1 = 2F_0.$$

Komponento A_2 dobimo iz ravnovesne enačbe v navpični smeri $A_2 - 4F_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}B = 0$. Tako je

$$A_2 = 2F_0.$$

(b) Sila F_4 je očitno enaka nič. Sili F_5 in F_6 dobimo z vozliščno metodo. Rezultanta sil na vozlišče A je enaka nič. Potem v vodoravni smeri

$$A_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}F_6 = 0 \Rightarrow F_6 = -2\sqrt{2}F_0,$$

v navpični smeri pa

$$A_2 + F_5 + \frac{1}{\sqrt{2}}F_6 = 0 \Rightarrow F_5 = 0.$$

(c) Sile F_1, F_2 in F_3 izračunamo s prerezno metodo za levi del paličja. Iz ravnovesja navora s polom v presečišču prve in druge palice sledi

$$-aF_3 - 3aA_2 + aA_1 = 0 \Rightarrow F_3 = -4F_0,$$

iz ravnovesja navora s polom v presečišču druge in tretje palice pa dobimo

$$aF_0 + aF_1 - 4aA_2 + 2aA_1 = 0 \Rightarrow F_1 = 3F_0.$$

Silo F_2 dobimo iz ravnovesja sil v navpični smeri

$$\frac{1}{\sqrt{2}}F_2 - F_0 + A_2 = 0 \Rightarrow F_2 = -\sqrt{2}F_0.$$

Pravilnost rezultata preverimo z ravnovesno enačbo v vodoravni smeri

$$\frac{1}{\sqrt{2}}F_2 + F_1 + F_3 + A_1 = 0.$$

3. (a) Iz naloge sledi,da je

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \epsilon_a & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_c \end{bmatrix} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} 0 & x \\ x & 2 \end{bmatrix}$$

Določiti moramo še komponento $\epsilon_{12} = \epsilon_0 x$. Po formuli za $\varphi = \pi/4$ je

$$\epsilon_c = \frac{1}{2}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) - \frac{1}{2}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})\cos\frac{\pi}{2} + \epsilon_{12}\sin\frac{\pi}{2}.$$

Od tod po kratkem računu sledi $\epsilon_{12} = -2\epsilon_0$ in

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

(b) Uporabimo Hookov zakon

$$\begin{aligned} 0 = \epsilon_{11} &= \frac{1}{E}\sigma_0 - \frac{\nu}{E}2\sigma_0 t - \frac{\nu}{E}t_{33}, \\ 2\epsilon_0 = \epsilon_{22} &= -\frac{\nu}{E}\sigma_0 + \frac{1}{E}2\sigma_0 - \frac{\nu}{E}t_{33}, \\ 0 = \epsilon_{33} &= -\frac{\nu}{E}\sigma_0 - \frac{\nu}{E}2\sigma_0 + \frac{1}{E}t_{33}. \end{aligned}$$

Tu smo upoštevali, da je deformacija ravninska, zato je $\epsilon_{33} = 0$. Iz zadnje enačbe dobimo $t_{33} = 3\nu\sigma_0$. Potem se prva enačba glasi

$$0 = 1 - 2\nu - 3\nu^2.$$

Korena enačbe sta $\nu_1 = -1$ in $\nu_2 = 1/3$. Ker je vedno $-1 < \nu \leq \frac{1}{2}$, je prava iskana vrednost $\nu = 1/3$. Iz druge enačbe potem po kratkem računu sledi

$$E = \frac{2\sigma_0}{3\epsilon_0}.$$

(c) Izračunati moramo še komponente t_{12}, t_{23}, t_{13} in t_{33}. Ker je deformacija ravninska, je $t_{23} = t_{13} = 0$. Nadalje že vemo $t_{33} = 3\nu\sigma_0 = \sigma_0$. Komponento t_{12} izračunamo po formuli

$$t_{12} = \frac{E}{1+\nu}\epsilon_{12} = -\sigma_0.$$

4. (a) Določimo prvo sile podpor. Označimo z F_A in F_B sili leve in desne podpore. Linijski obremenitvi je ekvipolentna točkovna obremenitev velikosti lq_0 s prijemališčem pri $x = \frac{1}{2}l$. Momentna enačba s polom v levi podpori je

$$-\frac{1}{6}l^2 q_0 + F_B\frac{2l}{3} = 0 \Rightarrow F_B = \frac{1}{4}lq_0.$$

Momentna enačba s polom v desni podpori pa je

$$-\frac{2}{3}lF_A + \frac{1}{2}l^2 q_0 = 0 \Rightarrow F_A = \frac{3}{4}lq_0.$$

Za prečno silo med podporama velja $\frac{dQ}{dx} = -q_0$. Potem je med podporama $Q = Q_1 = -q_0 x + C_1$ in ker je v leva podpora prosta, je $C_1 = 0$. V prevesnem delu je $Q = Q_2 = -q_0 x + C_2$. V desni podpori ima Q skok navzgor velikosti sile leve podpore, zato je

$$Q(x = l/3) = -\frac{l}{3} q_0 + \frac{3l}{4} q_0 = \frac{5}{12} l q_0.$$

Od tod sledi

$$\frac{5}{12} l q_0 = Q(x = l/3) = -q_0 \frac{l}{3} + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{3}{4} q_0 l.$$

Tako je $Q_2 = -q_0 x + \frac{3}{4} q_0 l$ za $x \geq l/3$. Vidimo, da je potem res $Q_2(x = l) = -F_B$.

Za upogibni moment velja $\frac{dM_i}{dx} = Q_i$, kjer je $i = 1, 2$. Potem je

$$M_1(x) = -\frac{1}{2} q_0 x^2 + C_3.$$

V levi podpori je $M(x = 0) = 0$ in zato $C_3 = 0$. Tako je za $x \in [0, l/3]$

$$M(x) = M_1 = -\frac{1}{2} q_0 x^2.$$

Za $x > l/3$ je

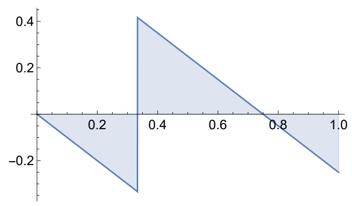
$$M_2(x) = -\frac{1}{2} q_0 x^2 + \frac{3}{4} q_0 l x + C_4.$$

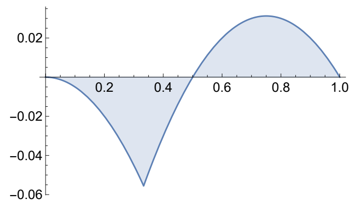
Desni konec je členkasto vpet. Zato je $M_2(x = l) = 0$ in potem po kratkem računu $C_4 = -\frac{1}{4} q_0 l^2$.

Iz skice upogibnega momenta visimo, da je maksimalna vrednost upogibnega momenta enaka

$$M_{\max} = |M_1(l/3)| = q_0 l^2 \frac{1}{18}.$$

Sliki prečne sile in upogibnega mmenta za primer $q_0 = 1$, $l = 1$.





(b) Presek je sestavljen iz treh enakih pravokotnikov dimenzije $\frac{a}{4} \times a$. Če postavimo koordinatni sistem z izhodiščem v sredini med levim in desnim robom in usmerimo os z navzdol, je koordinata masnega središča

$$z_* = \frac{1}{3A} A\left(\frac{a}{2} - \frac{a}{8}\right) = \frac{a}{8}.$$

Tu smo z A označili ploščino pravokotnika $\frac{a}{4} \times a$. Ploskovni moment je

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 2\left(\frac{1}{12}\frac{a}{4}a^3 + A\left(\frac{a}{8}\right)^2\right) + \frac{1}{12} a \left(\frac{a}{4}\right)^3 + A\left(\frac{a}{4}\right)^2 = \frac{17a^4}{256}.$$

(c) Po formuli

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{I} |z|_{\max} = \frac{q_0 l^2}{a^3} \frac{80}{153}.$$

Tu smo upoštevali, da je $|z|_{\max} = \frac{5a}{8}$.