1. kolokvij iz Osnov mehanike, 25. april 2023

1. Za prostorski sistem sil podan na sliki s silami v smereh stranice in diagonal kvadra dimenzije $2\,\mathrm{m} \times 1\,\mathrm{m} \times 2\,\mathrm{m}$:

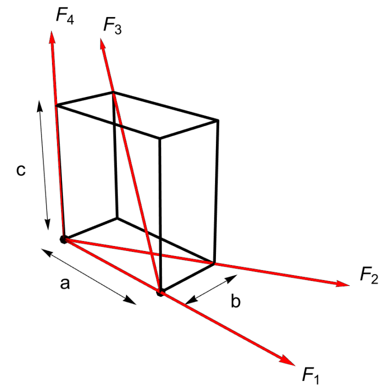
   (a) določi sile in njihova prijemališča;

   (b) izračunaj rezultanto sil in navora glede na pol v vogalu kvadra;

   (c) izračunaj invarianto sistema sil in določi koeficient α tako, da ima sistem sil skupno prijemališče;

   (d) določi skupno prijemališče.

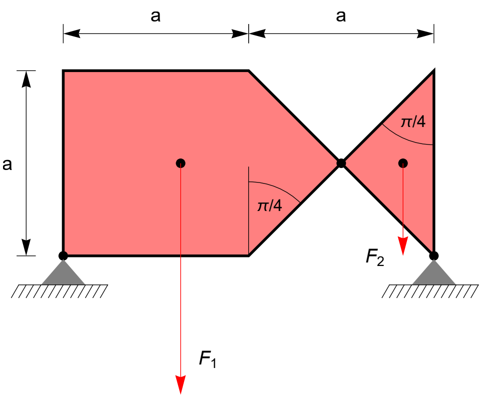
   Velikosti sil so $F_1 = 1\,\mathrm{kN}$, $F_2 = \alpha\sqrt{5}\mathrm{kN}$, $F_3 = 3\mathrm{kN}$ in $F_4 = \mathrm{kN}$.



2. Dve homogeni plošči, glej skico, sta členkasto spojeni in členkasto podprti. Masa posamezne plošče je sorazmerna njeni površini, sila teže pa deluje v navpični smeri navzdol.

   (a) Določi masni središči plošč.

   (b) Določi sile v podporah.

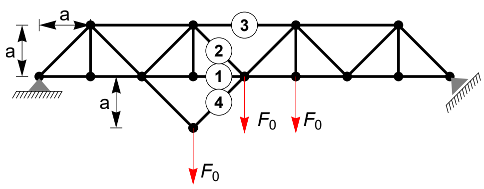


3. Za podano paličje na sliki, z desno podporo pod kotom $\pi/4$:

   (a) določi sile v podporah;

   (b) določi silo palice 4.

   (c) izračunaj sile palic 1,2,in 3.

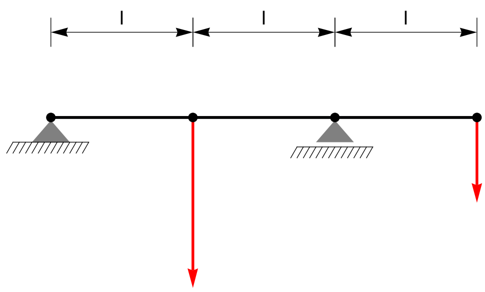


4. Prevesni nosilec je točkovno obremenjen tako kot kaže skica. Velikost sile med podporama je $2F_0$, velikost sile na koncu pa F_0.

   (a) Izračunaj sile podpor.

   (b) Določi potek prečne sile in upogibnega momenta.

   (c) Kje je upogibni moment po absolutni vrednosti največji?



Rešitve

1. (a) Izhodišče koordinatnega sistema postavimo v oglišče kvadra, koordinatne smeri pa usmerimo v smereh njegovih stranic. Primejališča sil so $A_1 = A_2 = A_4 = (0,0,0)$ in $A_3 = (2\,\mathrm{m},0,0)$. Enotski vektorji v smereh sil so $\vec{e}_1 = \vec{\imath}$, $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\vec{\imath}+\vec{\jmath})$, $\vec{e}_3 = \frac{1}{3}(-2\vec{\imath}+\vec{\jmath}+2\vec{k})$ in $\vec{e}_4 = \vec{k}$. Sile so potem $\vec{F}_1 = F_1\vec{e}_1 = \vec{\imath}\mathrm{kN}$, $\vec{F}_2 = F_2\vec{e}_2 = \alpha(2\vec{\imath}+\vec{\jmath})\mathrm{kN}$, $\vec{F}_3 = F_3\vec{e}_3 = (-2\vec{\imath}+\vec{\jmath}+2\vec{k})\mathrm{kN}$ in $\vec{F}_4 = F_4\vec{e}_4 = \vec{\imath}\mathrm{kN}$.

   (b) Rezultanta je

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = ((-1+2\alpha)\vec{\imath} + (1+\alpha)\vec{\jmath} + 3\vec{k})\mathrm{kN}.$$

   Momenti sil $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ in $\vec{F}_4$ okrog izhodišča O so eneki nič, moment sile $\vec{F}_3$ pa je o $\vec{OA}_3 \times \vec{F}_3 = (-4\vec{\jmath}+2\vec{k})\mathrm{kNm}$. Rezultanta navorov je

$$\vec{N} = \sum_{i=1}^{4} \vec{OA}_i \times \vec{F}_i = (-4\vec{\jmath}+2\vec{k})\mathrm{kNm}.$$

   (c) Sistem sil ima skupno prijemali'šče, če je $\vec{R}\cdot\vec{N} = 0$. Od tod dobimo enačbo $-4(1+\alpha)+6 = 0$ in od tod $\alpha = \frac{1}{2}$. Po formuli

$$\vec{OP}_0 = \frac{\vec{R}\times\vec{N}}{\vec{R}\cdot\vec{R}}$$

   je skupno prijemališče v

$$P_0 = \left(\frac{4}{3}\vec{\imath}\right)\mathrm{m}.$$

2. (a) Prvo izračunamo masno središče levega lika. Lik je sestavljen iz kvadrata in enakokrakega trikotnika. Izhodišče koordinatnega sistema postavimo v levo podporo, os x pa v smeri proti desni podpori. Očitno je y koordinata masnega središča enaka $a/2$. Izračunajmo še x koordinato. Sestavimo tabelo

Lik	A	x_*
kvadrat	a^2	$a/2$
trikotnik	a^2	$a + a/6$

   Tu smo upoštevali, da je masno središče trikotnika v smeri osi x enako eni tretjini višine trikotnika. Potem je

$$x_1^* = \frac{x_1A_1 + x_2A_2}{A_1+A_2} = \frac{19a}{30}. \tag{1}$$

   Desni lik je enakokraki trikotnik. X koordinata masnega središča je

$$x_2^* = 2a - \frac{a}{6} = \frac{11a}{6}, \tag{2}$$

   y koordinata pa je očitno $a/2$.

   (b) Označimo silo leve podpore $\vec{A} = A_1\vec{\imath} + A_2\vec{\jmath}$, silo desne podpore $\vec{B} = B_1\vec{\imath} + B_2\vec{\jmath}$, z $\vec{C} = C_1\vec{\imath} + C_2\vec{\jmath}$ pa silo v spoju leve plošče na desno ploščo. Ravnovesne enačbe za levo ploščo so

$$\begin{aligned} 0 &= A_1 + C_1, \\ 0 &= A_2 + C_2 - F_1, \\ 0 &= -x_1^*F_1 + \frac{3a}{2}C_2 - \frac{a}{2}C_1, \end{aligned}$$

ravnovesni enačbe za celotni sistem pa

$$\begin{aligned}0 &= A_1 + B_1,\\ 0 &= A_2 + B_2 - F_1 - F_2,\\ 0 &= -x_1^* F_1 - x_2^* F_2 + 2aB_2.\end{aligned}$$

Iz enačb sledi $C_1 = B_1$ in $C_2 = B_2 - F_2$. Tako dobimo enačbi

$$0 = -x_1^* F_1 - x_2^* F_2 + 2aB_2, \tag{3}$$

$$0 = -x_1^* F_1 - \frac{3a}{2} F_2 - \frac{a}{2} B_1 + \frac{3a}{2} B_2. \tag{4}$$

Velja $F_1 = \frac{5}{4} ka^2$ in $F_2 = \frac{1}{4} ka^2$, kjer je k sorazmernostni faktor. Z upoštevanjem (1-2) iz (3) sledi

$$B_2 = \frac{5}{8} ka^2$$

in potem iz (4)

$$B_1 = -\frac{11}{24} ka^2.$$

Na koncu še dobimo

$$A_1 = \frac{11}{24} ka^2, \qquad A_2 = \frac{7}{8} ka^2.$$

3. (a) Silo leve podpore zapišemo v obliki $\vec{A} = A_1 \vec{\imath} + A_2 \vec{\jmath}$, silo desne pa $\vec{B} = B(-\frac{1}{\sqrt{2}} \vec{\imath} + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{\jmath})$. Momentna enačba s polom v levi podpori se glasi

$$-3aF_0 - 4aF_0 - 5aF_0 + 8aB \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow B = \frac{3\sqrt{2}}{2} F_0 = \frac{3}{\sqrt{2}} F_0.$$

Momentna enačba s polom v desni podpori je

$$3aF_0 + 4aF_0 + 5aF_0 - 8aA_2 = 0 \Rightarrow A_2 = \frac{3}{2} F_0.$$

Ravnovesna enačba sil v vodoravni smeri je

$$A_1 - B \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow A_1 = \frac{3}{2} F_0.$$

(b) Silo F_4 dobimo z vozliščno metodo. Levi in desni sili palic sta enaki, zato

$$2F_4 \frac{1}{\sqrt{2}} = F_0$$

in

$$F_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} F_0.$$

(c) Za izračun sil palic 1,2 in 3 lahko sedaj uporabimo prerezno metodo. Zapišimo ravnovesne pogoje za desni del paličja. Tu sedaj upoštevamo silo palice 4 kot zunanjo silo. Ravnovesje momentov s polom v presečišču palice 2 in 3 je

$$-aF_1 - a\frac{1}{\sqrt{2}} F_4 - a\frac{1}{\sqrt{2}} F_4 - 2aF_0 - a\frac{1}{\sqrt{2}} B + 5a\frac{1}{\sqrt{2}} B = 0 \Rightarrow F_1 = 2F_0.$$

Ravnovesje momentov s polom v presečišču palice 1 in 2 je

$$aF_3 - -aF_0 + 4a\frac{1}{\sqrt{2}} B = 0 \Rightarrow F_3 = -5F_0.$$

Iz ravnovesja sil v navpični smeri potem sledi

$$a\frac{1}{\sqrt{2}} F_2 - 2F_0 - \frac{1}{\sqrt{2}} F_4 + \frac{1}{\sqrt{2}} B = 0 \Rightarrow F_2 = \sqrt{2} F_0.$$

4. (a) Označimo silo leve podpore z $\vec{A} = A_1\vec{\imath} + A_2\vec{\jmath}$, desne pa z $\vec{B} = B_2\vec{\jmath}$. Iz momentne enačbe s polom v levi podpori sledi

$$-l2F_0 + 2lB_2 - 3lF_0 = 0$$

in od tod

$$B_2 = \frac{5}{2}F_0.$$

Iz momentne enačbe s polom v desni podpori sledi

$$l2F_0 - 2lA_2 - lF_0 = 0$$

$$A_2 = \frac{1}{2}F_0.$$

Ker v vodoravni smeri ni obremenitve, je $A_1 = 0$.

(b) Potek prečne sile Q je odsekoma konstanten s skoki, ki so enaki točkovnim obremenitvam nosilca. V levem krajišču je prečna sila enaka sili desne podpore $Q = \frac{1}{2}F_0$, v desnem krajišču pa je nasprotno enaka obrmenitvi F_0. Pri $x = l$ ima Q skok $2F_0$ navzdol, v podpori pri $x = 2l$ skok pa B_2 navzgor. Glej skico.

Upogibni moment je v krajiščih enak nič in je odsekoma linearen in zvezen. Ker je $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = Q$ je

$$M(x = l) = \frac{1}{2}lF_0.$$

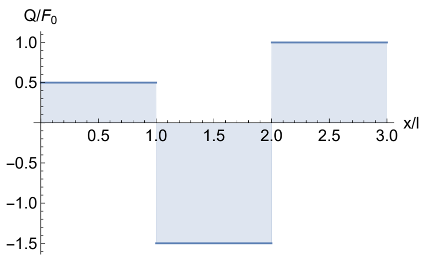
saj za $x \in (0, l)$ velja $Q = \frac{1}{2}F_0$. Za $x \in (l, 2l)$ je $Q = -\frac{3}{2}F_0$, zato je

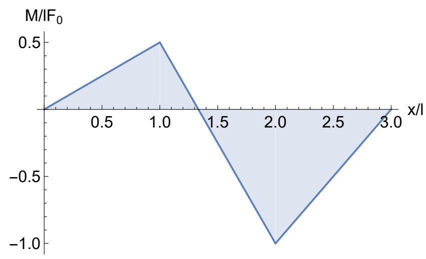
$$M(x = 2l) = M(x = l) - \frac{3}{2}lF_0 = -lF_0.$$

Nadalje za $x \in (2l, 3l)$ velja $Q = F_0$ in tako

$$M(x = 3l) = M(x = 2l) + lF_0 = 0,$$

kar se ujema s trditvijo, da je upogibni moment na koncu enak nič.





(c) Upogibni moment je po absolutni vrednosti največji pri $x = 2l$ z vrednostjo $M(x = 2l) = -lF_0$.