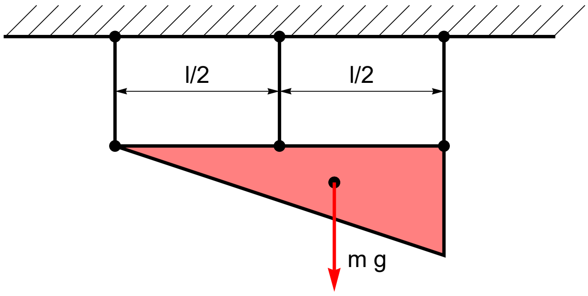
2. kolokvij iz Osnov mehanike, 25. maj 2023

1. Homogeni trikotnik s težo mg je obešen na tri elastične žice tako kot kaže skica. Žice imajo enak presek in Youngov modul E.

   (a) Zapiši ravnovesne enačbe.

   (b) Izračunaj sile žic.

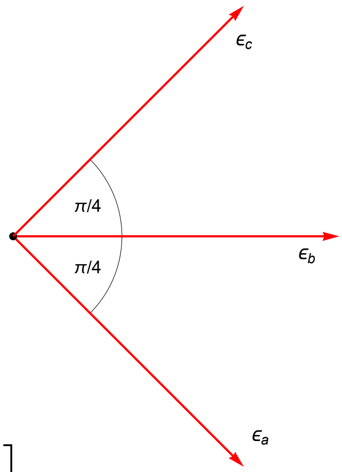


2. V smereh označenih na skici smo z ekstenziometrom izmerili osne deformacije $\epsilon_a = \epsilon_0/\sqrt{2}$, $\epsilon_b = 2\epsilon_0$, $\epsilon_c = -\epsilon_0/\sqrt{2}$.

   (a) Določi deformacijski tenzor.

   (b) Določi ekstremalne deformacije in skiciraj Mohrovo krožnico.

   (c) V kateri smeri je osna deformacija največja?

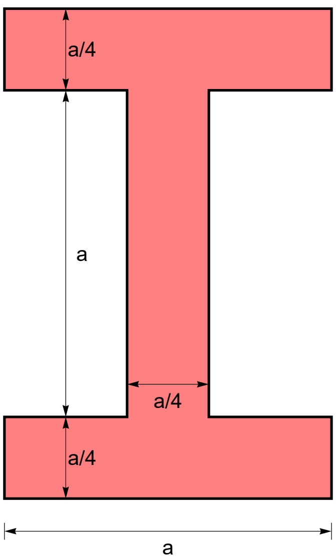


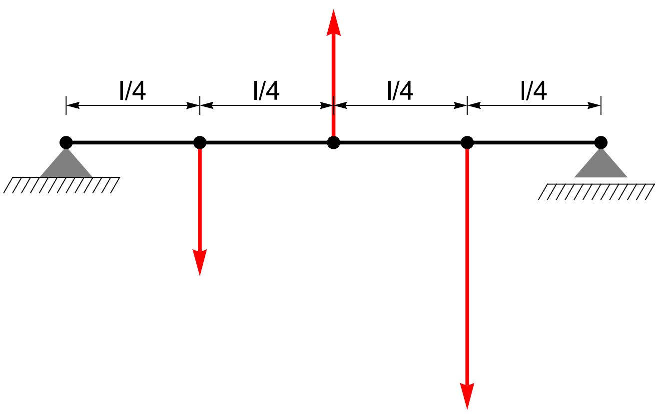
3. V izotropičnem materialu smo pri dani deformaciji

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} 3/2 & 2 & 0 \\ 2 & -7/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{bmatrix}$$

   izmerili normalni napetosti $\sigma_1 = 3\sigma_0$ v smeri osi $\vec{\imath}$ in $\sigma_2 = -\sigma_0$ v smeri osi $\vec{\jmath}$.

   - Določi Yongov modul in Poissonov količnik.
   - Določi napetostni tenzor.





4. Enostavno podprt prevesni nosilec na sliki je obremenjen tako kot kaže skica.

   (a) Določi potek upogibnega momenta in njegovo maksimalno vrednost.

(b) Nosilec ima I presek. Izračunaj njegov ploskovni moment, glej skico.

(c) Določi pogoj na velikost sil F, da bo napetost v nosilcu po absolutni velikosti manjša od σ_0. Izračun naredi za konkretne vrednosti $l = 1\,\mathrm{m}$, $a = 2\,\mathrm{cm}$, $\sigma_0 = 200\,\mathrm{MPa}$.

Rešitve

1. (a) Sile žic označimo s F_1, F_2 in F_3. Sila teže ima prijemališče v masnem središču z vodoravno oddaljenostjo $2l/3$ od leve žice. Ravnovesni enačbi sta

$$F_1 + F_2 + F_3 = mg,$$
$$\frac{1}{2}F_2 + F_3 = \frac{2}{3}mg.$$

Ker so žice elastične, velja $F_1 = AE\frac{\Delta d_1}{d}$, $F21 = AE\frac{\Delta d_2}{d}$ in $F_3 = AE\frac{\Delta d_3}{d}$. Tu smo z A označili presek žic, z E Youngov modul, z d dolžino neraztegnjenih žic in z Δd_i razteg i-te žice.

Ker je nosilec raven, veljaja po deformaciji žic zveza

$$\frac{\Delta d_2 - \Delta d_1}{l/2} = \frac{\Delta d_3 - \Delta d_2}{l/2}.$$

Upoštevajmo to enačbo in izrazimo sile z deformacijami. Tako dobimo sistem

$$\Delta d_1 + \Delta d_2 + \Delta d_3 = a, \tag{1}$$
$$\frac{1}{2}\Delta d_2 + \Delta d_3 = \frac{2a}{3}, \tag{2}$$
$$-\Delta d_1 + 2\Delta d_2 - \Delta d_3 = 0, \tag{3}$$

kjer je $a = mgd/AE$.

(b) Seštejemo enačbi (1) in (3). Tako dobimo

$$\Delta d_2 = \frac{a}{3}.$$

Potem odštejemo (2) od (1) in dobimo

$$\Delta d_1 == \frac{a}{6}.$$

in na koncu še

$$\Delta d_3 == \frac{a}{2}.$$

Iskane sile so:

$$F_1 = \frac{1}{6}mg, \quad F_2 = \frac{1}{3}mg \quad F_3 = \frac{1}{2}mg.$$

2. (a) Postavimo koordinatno os x v smeri deformacije ϵ_b. (Še enostavnejše je, če postavimo os x v smeri ϵ_a in os y v ϵ_c.) Potem je deformacijski tenzor oblike

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} 2 & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} \end{bmatrix}.$$

Sedaj bomo uporabili formulo

$$\epsilon(\varphi) = \frac{1}{2}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + \frac{1}{2}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})\cos 2\varphi + \epsilon_{12}\sin 2\varphi$$

za kota $\varphi = -\pi/4$ in $\varphi = \pi/4$. Za $\varphi = -\pi/4$ dobimo

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(2 + \epsilon_{22}) - \epsilon_{12}. \tag{4}$$

Za kot $\varphi = \pi/4$ pa

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(2 + \epsilon_{22}) + \epsilon_{12}. \tag{5}$$

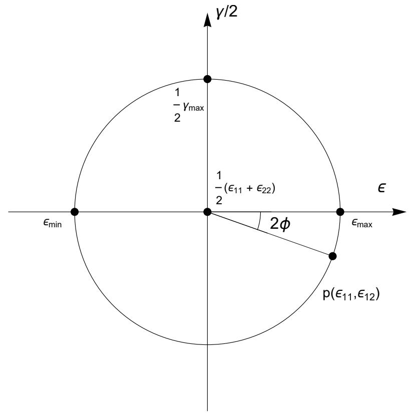
Odštejemo (4) od (5). Tako dobimo $\epsilon_{12} = -1/\sqrt{2}$ in nato še $\epsilon_{22} = -2$. Iskani deformacijski tenzor je

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} 2 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & -2 \end{bmatrix}.$$

(b) Mohrova krožnica ima središče v izhodišču koordinatnega sistema $(\sigma, \frac{1}{2}\gamma)$. Polmer krožnice je

$$r = \sqrt{\epsilon_{12}^2 + (\frac{1}{2}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22}))^2} = \epsilon_0 \sqrt{3/2}.$$

Potem je $\epsilon_{max} = \epsilon_0\sqrt{3/2}$ in $\epsilon_{min} = -\epsilon_0\sqrt{3/2}$. Skica Mohrove krožnice je na desni.



(c) Smer maksimalne osne deformacije dobimo po formuli

$$\varphi_{max} = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\epsilon_{12}}{\epsilon_{11} - \epsilon_{22}} = -\frac{1}{2} \arctan \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \right) \approx -9.73^\circ.$$

3. (a) Uporabili bomo Hookov zakon za izotropični material

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{t}} - \frac{\nu}{E}\mathrm{Sl}\underline{\underline{t}}\,\underline{\underline{I}}.$$

Iz izmerjenih normalnih napetosti sledi $t_{11} = 3\sigma_0$ in $t_{33} = -\sigma_0$. Za diagonalne elemente potem sledijo enačbe

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\epsilon_0 &= \epsilon_{11} = \frac{1}{E}t_{11} - \frac{\nu}{E}t_{22} - \frac{\nu}{E}t_{33} = \frac{1}{E}\left((3+\nu)\sigma_0 - \nu t_{33}\right), \\ -\frac{7}{6}\epsilon_0 &= \epsilon_{22} = -\frac{\nu}{E}t_{11} + \frac{1}{E}t_{22} - \frac{\nu}{E}t_{33} = \frac{1}{E}\left(-(1+3\nu)\sigma_0 - \nu t_{33}\right), \\ \frac{1}{6}\epsilon_0 &= \epsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}t_{11} - \frac{\nu}{E}t_{22} + \frac{1}{E}t_{33} = \frac{1}{E}\left(-2\nu\sigma_0 + t_{33}\right). \end{aligned}$$

Iz tretje enačbe sledi takoj

$$t_{33} = \frac{1}{6}E\epsilon_0 + 2\nu\sigma_0. \tag{6}$$

Nato odštejemo drugo enačbo od prve. Tako dobimo

$$\frac{8\epsilon_0}{3} - \frac{4(\nu+1)\sigma_0}{E} = 0 \tag{7}$$

in od tod

$$E = \frac{3}{2}(1+\nu)\frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \tag{8}$$

in iz (6)

$$t_{33} = \frac{1}{4}(1+9\nu)\sigma_0. \tag{9}$$

Vstavimo (8) in (9) v prvo enačbo. Po krajšanju z σ_0 in ϵ_0 dobimo

$$9(1+\nu) = 4(3 + \nu - \frac{1}{4}\nu(1+9\nu)).$$

Dobljeno kvadratno enačbo preoblikujemo v

$$0 = 3 - 6\nu - 9\nu^2.$$

Rešitvi sta $\nu = -1$ in $\nu = 1/3$. Prava rešitev je $\nu = 1/3$. Potem je

$$E = \frac{2\sigma_0}{\epsilon_0}.$$

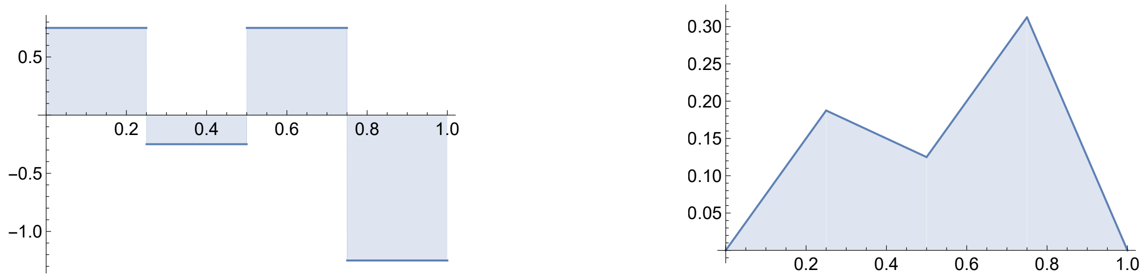
(b) Sedaj, ko poznamo E in ν lahko hitro izračunamo še preostale komponente napetostnega tenzorja. Dobimo

$$\begin{bmatrix} 3\sigma_0 & 3\sigma_0 & 0 \\ 3\sigma_0 & -\sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix}$$

4. (a) Prvo izračunamo sil podpor. Hitro ugotovimo, da je sila leve podpore $A_2 = \frac{3}{4}F_0$, desne pa $B_2 = \frac{5}{4}F_0$. Potek prečne sile je odsekoma konstanten s skoki, ki so enaki silam v točkah obremenitev. Upogibni moment je v krajiščih enak nič, vmes pa je odsekoma linearen z naklonom $Q = \frac{dM}{dx}$. Poteka prečne sile in upogibnega momenta sta skicirana na sliki 1. Maksimalna vrednost upogibnega momenta je

$$M_{\max} = \frac{5}{4}F_0 \times \frac{l}{4} = \frac{5}{16}lF_0.$$

Tu smo upoštevali, da je vrednost prečne sile za $x \in (3l/4, l)$ enaka $-5/4F_0$.



Slika 1: Prečna sila (levo) in upogibni moment (desno).

(b) I nosilec je sestavljen iz treh pravokotnikov, dveh vodoravnih in enega navpičnega. I nosilec je simetričen, zato je njegovo središče v njegovi sredini. Potem je

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + I_3 \\ &= \frac{1}{12}\frac{a}{4}a^3 + \left(\left(\frac{1}{2}a + \frac{a}{8}\right)^2 \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{12}a\left(\frac{a}{4}\right)^2\right) + \left(\left(\frac{1}{2}a + \frac{a}{8}\right)^2 \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{12}a\left(\frac{a}{4}\right)^2\right) \\ &= \frac{7}{32}a^4. \end{aligned}$$

(c) Obremenitev nosilca omejuje formula

$$\frac{M_{\max}}{I}z_{\max} < \sigma_0.$$

Upoštevamo, da je $z_{\max} = 3a/4$. Potem iz zgornje neenačbe in podatkov naloge sledi pogoj

$$F_0 < \frac{14\sigma_0 a^3}{15l} = \frac{560}{3}\text{N}.$$