1. kolokvij iz Osnov mehanike, 4. april 2024

1. Točka se giblje premočrtno po osi x. V času od 0 do t_1 se giblje enakomerno pospešeno s pospeškom a_1, od t_1 do t_2 enakomerno s konstantno brzino v_2, od t_2 do t_3 pa z negativnim pospeškom a_3 tako, da se v času t_3 vrne v začetni položaj.

   (a) Izračunaj brzino v_2 in do kod pride v času t_1, t_2.

   (b) Izračunaj pospešek zaviranja a_3.

   (c) Kdaj ima trenutno hitrost nič?

   (d) Izračunaj za konkretne vrednosti $a_1 = 2\,\mathrm{m/s^2}$, $t_1 = 5\,\mathrm{s}$, $t_2 = 10\,\mathrm{s}$ in $t_3 = 15s$. Skiciraj tudi diagrame pospeška, hitrosti in položaja v odvisnosti od časa.

2. Za prostorski sistem sil podan na sliki s silami v smereh stranice in diagonal kvadra $a \times b \times c$ z dimenzijami $2\,\mathrm{m} \times 2\,\mathrm{m} \times 1\,\mathrm{m}$:

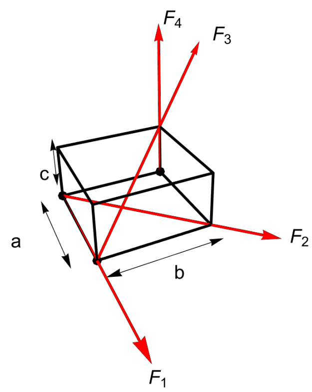
   (a) določi sile in njihova prijemališča;

   (b) izračunaj rezultanto sil in navora glede na pol v vogalu kvadra;

   (c) izračunaj invarianto sistema sil in določi koeficient α tako, da ima sistem sil skupno prijemališče;

   (d) določi skupno prijemališče.

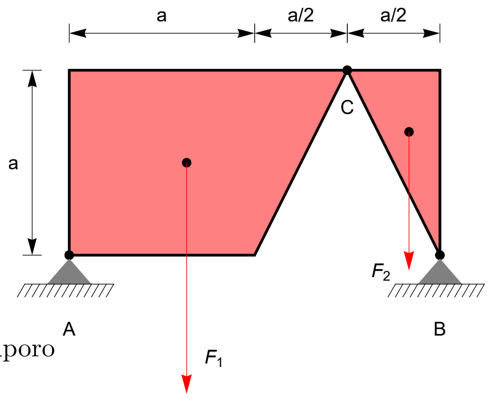
   Velikosti sil so $F_1 = F_0$, $F_2 = \sqrt{2}F_0$, $F_3 = 3F_0$ in $F_4 = \alpha F_0$.



3. Dve homogeni plošči, glej skico, sta členkasto spojeni v točki C in nepomično podprti v A in B. Masa posamezne plošče je sorazmerna njeni površini, sila teže pa deluje v navpični smeri navzdol.

   (a) Določi masni središči plošč in sili teže na plošči.

   (b) Določi sile v podporah.

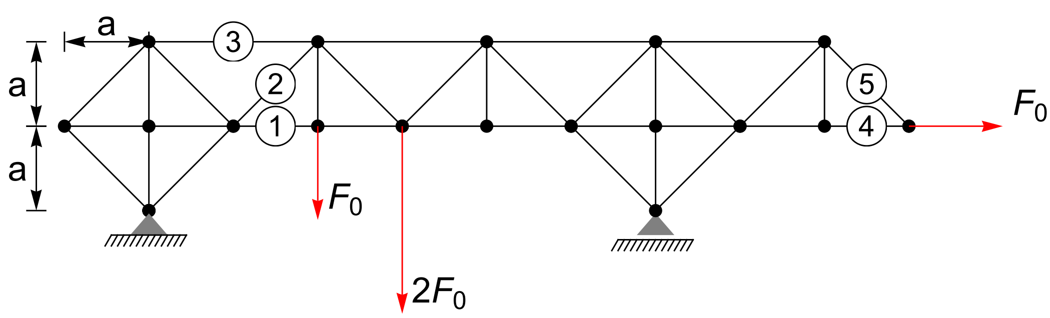


4. Za podano paličje na sliki, z drsno desno podporo

   (a) določi sile v podporah;

   (b) določi silo palic 4 in 5;

   (c) izračunaj sile palic 1,2,in 3.



Rešitve

1. (a) Hitrost od t_0 do t_1 narašča linearno do $v_1 = a_1 t_1 = 10\,\mathrm{m/s}$, od t_1 do t_2 pa je konstantna. Položaj v času t_1 je $x_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = 25\,\mathrm{m}$. Od t_1 do t_2 je gibanje enakomerno. Brzina se ohranja $v_2 = v_1 = 10\,\mathrm{m/s}$, položaj pa je $x_2 = v_1(t_2 - t_1) + x_1 = 75\,\mathrm{m}$.

   (b) Od t_2 naprej zaviramo s pospeškom a_3. Potem za $t > t_2$ velja $v(t) = a_3(t - t_2) + v_2$ in $x(t) = \frac{1}{2} a_3 (t - t_2)^2 + v_2(t - t_2) + x_2$. Ker mora veljati $x(t_3) = 0$, sledi

$$0 = \frac{1}{2} a_3 (t_3 - t_2)^2 + v_2(t_3 - t_2) + x_2$$

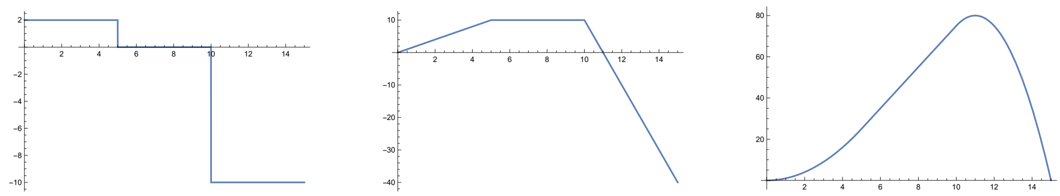
   in od tod

$$a_3 = -2\frac{v_2(t_3 - t_2) + x_2}{(t_3 - t_2)^2} = -2\frac{10\,\mathrm{m\,s^{-1}} \times 5\,\mathrm{s} + 75\,\mathrm{m}}{25\,\mathrm{s}^2} = -10\,\mathrm{m/s^2}$$

   (c) Hitrost je enaka nič pri $t = 0$ in pri $t_* = 11\,\mathrm{s}$, saj je

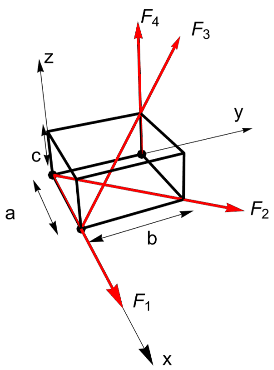
$$v(t_*) = a_3(t_* - t_2) + v_2 = -10\,\mathrm{m/s} + 10\,\mathrm{m/s} = 0.$$

   (d) Skice grafov pospeška, hitrosti in položaja so



Slika 1: Grafi pospeška, hitrosti in položaja v odvisnoti od časa.

2. (a) Postavimo koordinatni sistem tako kot kaže slika. Prijemališča sil so



$$A_1 = (0, 0, 0),$$
$$A_2 = (0, 0, 0),$$
$$A_3 = (a, 0, 0),$$
$$A_4 = (0, b, 0).$$

   Enotski vektorji v smereh sil so

$$\vec{e}_1 = \vec{\imath},$$
$$\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath} + \vec{\jmath}),$$
$$\vec{e}_3 = \frac{1}{3}(-2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}),$$
$$\vec{e}_4 = \vec{k}.$$

   Sile pa so

$$\vec{F}_1 = F_0 \vec{\imath}, \quad \vec{F}_2 = F_0(\vec{\imath} + \vec{\jmath}), \quad \vec{F}_3 = F_0(-2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}) \quad \text{in} \quad \vec{F}_4 = \alpha F_0.$$

(b) Rezultanta sil je potem

$$\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = F_0(3\vec{\jmath} + (1+\alpha)\vec{k}\,).$$

Navori sil glede na izhodišče $O = (0,0,0)$ so

$$\vec{N}_1 = \vec{N}_2 = \vec{0}, \quad \vec{N}_3 = (-2\vec{\jmath} + 4\vec{k})F_0\mathrm{m} \quad \text{in} \quad \vec{F}_4 = \alpha\vec{\imath}F_0 2\,\mathrm{m}.$$

Rezultanta navorov je tako

$$\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \vec{N} = (2\alpha\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 4\vec{k}\,)F_0\mathrm{m}.$$

(c) Invarianta je $I = \vec{R}\cdot\vec{N} = (-6 + 4(1+\alpha))F_0^2\mathrm{m}$. Sistem ima skupno prijemališče. če je $I = 0$. Od tod sledi $\alpha = \frac{1}{2}$.

(d) Skupno prijemališče dpbimo po formuli

$$\vec{OP} = \frac{\vec{R}(\mathcal{F}) \times \vec{N}(\mathcal{F}, O)}{\vec{R}(\mathcal{F}) \cdot \vec{R}(\mathcal{F})} = \frac{2}{3}\left(2\vec{\imath} + \frac{1}{5}\vec{\jmath} - \frac{2}{5}\vec{k}\right)\mathrm{m}.$$

3. (a) Izračunamo prvo masno središče levega lika. Lik je sestavljen iz kvadrata in pravokotnega trikotnika. Izhodišče koordinatnega sistema postavimo v levo podporo, os x pa v smeri proti desni podpori. Sestavimo tabelo

Lik	A	ξ_*	η_*
kvadrat	a^2	$a/2$	$a/2$
trikotnik	$a^2/4$	$a + a/6$	$2a/3$

Potem je

$$x_1^* = \frac{\xi_1 A_1 + \xi_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{19a}{30}, \qquad y_1^* = \frac{\eta_1 A_1 + \eta_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{8a}{15}.$$

Masno središče desnega trikotnika pa je $x_2^* = 11a/6$ in $y_2^* = 2a/3$. Sili teže sta

$$F_1 = \rho g\frac{5a^2}{4} \quad \text{in} \quad F_2 = \rho g\frac{a^2}{4}.$$

(b) Označimo silo leve podpore $\vec{A} = A_1\vec{\imath} + A_2\vec{\jmath}$, silo desne podpore $\vec{B} = B_1\vec{\imath} + B_2\vec{\jmath}$ in silo v spoju $\vec{C} = C_1\vec{\imath} + C_2\vec{\jmath}$. Ravnovesne enačbe za levo ploščo so:

$$\begin{aligned} A_1 + C_1 &= 0, \\ A_2 + C_2 - F_1 &= 0, \\ -x_1^*F_1 - aC_1 + \frac{3a}{2}C_2 &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

za desno ploščo pa

$$\begin{aligned} B_1 - C_1 &= 0, \\ B_2 - C_2 - F_2 &= 0, \\ (2a - x_2^*)F_2 + aC_1 + \frac{a}{2}C_2 &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Tu smo vzeli podporo B za pol momentne enačbe leve plošče.
Seštejemo enačbi (1) in (2). Dobimo $(2a - x_2^*)F_2 - x_1^*F_1 + 2aC_2 = 0$ in od tod po krajšem računu

$$C_2 = \frac{3}{8}\rho g a^2.$$

Iz (1) potem sledi

$$C_1 = \frac{1}{a}\left(-x_1^*F_1 + \frac{3a}{2}C_2\right) \Rightarrow C_1 = -\frac{11}{48}\rho g a^2.$$

Od tod

$$A_1 = -C_1 = \frac{11}{48}\rho g a^2 \quad \text{arg1} \quad B_1 = C_1 = -\frac{11}{48}\rho g a^2.$$

Navpični sili podpor pa sta

$$A_2 = F_1 - C_2 = \frac{7}{8}\rho g a^2 \quad \text{in} \quad B_2 = F_2 + C_2 = \frac{5}{8}\rho g a^2.$$

4. (a) Silo leve podpore zapišemo v obliki $\vec{A} = A_1\vec{\imath} + A_2\vec{\jmath}$, silo desne pa $\vec{B} = B_2\vec{\jmath}$. Momentna enačba s polom v levi podpori se glasi

$$-2a \times F_0 - 3a \times 2F_0 - a \times F_0 + 6a \times B_2 = 0 \Rightarrow B_2 = \frac{3}{2}F_0.$$

Iz ravnovesne enačbe v navpični smeri potem sledi $A_2 = \frac{3}{2}F_0$, iz ravnovesja sil v vodoravni smeri pa $A_1 = -F_0$.

(b) Za palici 4 in 5 velja $\vec{F}_4 = -F_4\vec{\imath}$ in $\vec{F}_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{\imath} + \vec{\jmath})$. Ravnovesna enačba v spoju palic 4 in 5 je $\vec{F}_4 + \vec{F}_5 + F_0\vec{\imath}$. Od tod potem $F_4 = 1$ in $F_5 = 0$.

(c) Za izračun sil palic 1,2 in 3 uporabimo prerezno metodo. Zapišimo ravnovesne pogoje za levi del paličja. Iz ravnovesja momentov s polom v presečišču palice 1 in 2 je

$$-a \times F_3 + a \times A_1 - a \times A_2 = 0 \Rightarrow F_3 = -\frac{5}{2}F_0.$$

Ravnovesje momentov s polom v presečišču palice 2 in 3 je

$$a \times F_1 + 2a \times A_1 - 2a \times A_2 = 0 \Rightarrow F_1 = 5F_0.$$

Iz ravnovesja sil v navpični smeri potem sledi

$$A_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}F_2 = 0 \Rightarrow F_2 = -\frac{3}{\sqrt{2}}F_0.$$