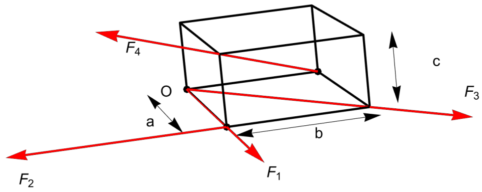
1. izpit iz Osnov mehanike, 10. junij 2024

1. Za prostorski sistem sil podan na sliki s silami v smereh stranice in diagonal kvadra dimenzije $a \times b \times c = 3\,\mathrm{m} \times 2\,\mathrm{m} \times 1\,\mathrm{m}$:

   (a) določi sile in njihova prijemališča;

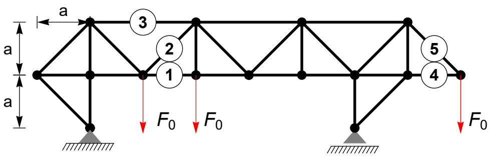
   (b) izračunaj rezultanto sil in navora glede na pol O v vogalu kvadra;

   (c) izračunaj invarianto sistema sil;

   (d) določi skupno prijemališče ali os sistema.

   Velikosti sil so $F_1 = F_0$, $F_2 = F_0$, $F_3 = F_0\sqrt{13}$, $F_4 = F_0\sqrt{14}$.

2. Za paličje na sliki:

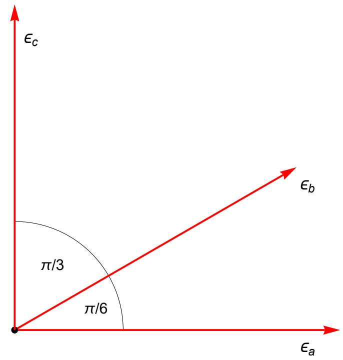
   

   (a) določi sile v podporah;

   (b) izračunaj sile palic 1,2 in 3;

   (c) določi sili palic 4 in 5.

3. V smereh označenih na skici smo z ekstenziometrom izmerili osne deformacije $\epsilon_a = 2\epsilon_0$, $\epsilon_b = \frac{5}{4}\epsilon_0$, $\epsilon_c = \epsilon_0$.

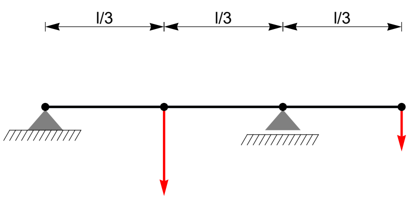
   

   (a) Določi deformacijski tenzor.

   (b) Določi ekstremalne deformacije in skiciraj Mohrovo krožnico.

   (c) Izračunaj pripadajoči napetostni tenzor, če je $\lambda = \mu = 45\,\mathrm{GPa}$.

4. Prevesni nosilec dolžine $l = 1\,\mathrm{m}$ na sliki je med podporama na sredini obremenjen s točkovno silo $2F_0$, na prevesnem koncu pa s silo F_0.

   (a) Določi potek prečne sile in upogibnega momenta.

   (b) Nosilec je votel. Zunanji rob je pravokotnik kvadrat dimenzije $a \times 2a$, notranji pa $b \times 2b$, kjer je $b = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Izračunaj ploskovni moment preseka.

   (c) Za $a = 2\,\mathrm{cm}$ določi maksimalno dopustno velikost F_0, da bo napetost v nosilcu po absolutni vrednosti manjša od $100\,\mathrm{MPa}$.

Rešitve

1. (a) Izhodišče koordinatnega sistema postavimo v točko O, koordinatne osi x, y, z pa usmerimo v smereh robov kvadra a, b, c. V brezdimenzijskem zapsisu so potem prijemališča sil točke $P_1(0,0,0)$, $P_2(a,0,0)$, $P_3=(0,0,0)$ in $P_4(0,b,0)$. Sile so v smereh enotskih vektorjev $\vec{e}_1=\vec{\imath}$, $\vec{e}_2=\vec{\jmath}$, $\vec{e}_3=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(a\vec{\imath}+b\vec{\jmath})$ in $\vec{e}_4=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a\vec{\imath}-b\vec{\jmath}+c\vec{k})$. Sile so $\vec{F}_i=F_i\vec{e}_i$. Za dane podatke $a=3\,\mathrm{m}$, $b=2\,\mathrm{m}$ in $c=2\,\mathrm{m}$ je

$$\vec{F}_1=F_0\vec{\imath},\quad \vec{F}_2=-F_0\vec{\jmath}\quad \vec{F}_3=F_0(3\vec{\imath}+2\vec{\jmath}),\quad \vec{F}_4=F_0(3\vec{\imath}-2\vec{\jmath}+\vec{k}).$$

(b) Rezultanta sil je

$$\vec{R}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+\vec{F}_4=F_0(7\vec{\imath}-\vec{\jmath}+\vec{k}).$$

Rezultanta navorov s polom v O je

$$\vec{N}=\vec{OP}_2\times\vec{F}_2+\vec{OP}_4\times\vec{F}_4=-3F_0\vec{k}+F_0(2\vec{\imath}-6\vec{k})=(2\vec{\imath}-9\vec{k})\mathrm{F_0m}.$$

(c) Invarianta je

$$I=\vec{R}\cdot\vec{N}=5\mathrm{F_0^2m}.$$

(d) Ker je $I\neq 0$ sistem sil nima skupnega prijemališča. Krajevni vektor do osi sistema je

$$\vec{OP}_0=\frac{\vec{R}\times\vec{N}}{\vec{R}\cdot\vec{R}}=\frac{1}{51}(9\vec{\imath}+65\vec{\jmath}+2\vec{k})\mathrm{m}.$$

2. (a) Označimo levo podporo z A desno z B. Sila leve podpore je $\vec{A}=A_1\vec{\imath}+A_2\vec{\jmath}$, sila desne pa $\vec{B}=B_2\vec{\jmath}$. Momentna enačba s polom v A je

$$-aF_0-2aF_0+5aB_2-7aF_0=0.$$

Od tod sledi

$$B_2=2F_0.$$

Iz ravnovesja sil v vodoravni smerisledi $A_1=0$. Komponento A_2 dobimo iz ravnovesne enačbe v navpični smeti $A_2-3F_0+B_2=0$. Ker je $B_2=2F_0$, je

$$A_2=F_0.$$

(b) Sile F_1, F_2 in F_3 izračunamo s prerezno metodo. Iz ravnovesja navora s polom v presečišču prve in druge palice za levi del paličja sledi

$$-aF_3-aA_2=0\Rightarrow F_3=-F_0,$$

iz ravnovesja navora s polom v presečišču druge in tretje palice pa dobimo

$$aF_0+aF_1-2aA_2=0\Rightarrow F_1=F_0.$$

Silo F_2 dobimo iz ravnovesja sil v vodoravi smeri.

$$F_1+F_3+F_2/\sqrt{2}=0\Rightarrow F_2=0.$$

Pravilnost rezultata preverimo z ravnovesno enačbo v navpični smeri

$$A_2-F_0=0.$$

(c) Sili F_4 in F_5 dobimo z vozliščno metodo. V navpični smeri je

$$-F_0+F_5/\sqrt{2}=0\Rightarrow F_5=\sqrt{2}F_0,$$

v vodoravni smeri pa

$$-F_4-F_5/\sqrt{2}=0\Rightarrow F_4=-F_0.$$

3. (a) Iz podatkov naloge sledi, da je

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \epsilon_a & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_c \end{bmatrix} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} 2 & x \\ x & 1 \end{bmatrix}$$

Določiti moramo še komponento $\epsilon_{12} = x\epsilon_0$. Po formuli za $\varphi = \pi/6$ je

$$\epsilon_b = \frac{1}{2}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + \frac{1}{2}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22}) \cos\frac{\pi}{3} + \epsilon_{12} \sin\frac{\pi}{3}$$

oziroma

$$\frac{5}{4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} + x\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

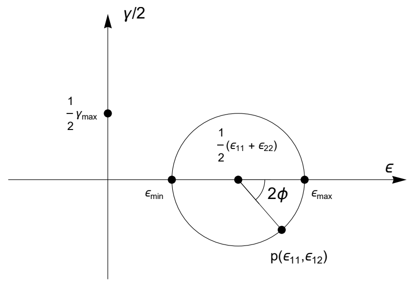
Od tod po kratkem računu dobimo $\epsilon_{12} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\epsilon_0$ in

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} 2 & -1/\sqrt{3} & 0 \\ -1/\sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Središče Mohrove krožnice je v $\frac{1}{2}(\epsilon_{11}+\epsilon_{22}) = \frac{3}{2}\epsilon_0$. Polemer krožnice je

$$r = \sqrt{\epsilon_{12}^2 + \frac{1}{4}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})^2} = \sqrt{\frac{7}{12}}\epsilon_0.$$

Skica Mohrove krožnice je na desni.



(c) Uporabimo Hookov zakon v obliki

$$\underline{\underline{t}} = 2\mu\underline{\underline{e}} + \lambda \operatorname{sl} \underline{\underline{eI}}.$$

Potem je

$$\begin{aligned} t_{11} &= 2\mu\epsilon_{11} + \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}), \\ t_{22} &= 2\mu\epsilon_{22} + \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}), \\ t_{33} &= 2\mu\epsilon_{33} + \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}), \\ t_{12} &= 2\mu\epsilon_{12}, \quad t_{13} = 2\mu\epsilon_{13}, \quad t_{23} = 2\mu\epsilon_{23}. \end{aligned}$$

Upoštevajmo, da je $\lambda = \mu = 45\,\mathrm{GPa}$. Tako dobimo

$$\begin{aligned} t_{11} &= \mu(3\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) = 7\mu\epsilon_0 = 315\,\mathrm{GPa}\epsilon_0, \\ t_{22} &= \mu(3\epsilon_{22} + \epsilon_{11}) = 5\mu\epsilon_0 = 225\,\mathrm{GPa}\epsilon_0, \\ t_{33} &= \mu(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) = 135\,\mathrm{GPa}\epsilon_0, \\ t_{12} &= 2\mu\epsilon_{12} = 90\,\mathrm{GPa}\epsilon_0, \\ t_{13} &= t_{23} = 0. \end{aligned}$$

4. (a) Označimo z A_2 in B_2 vertikalni komponenti sil leve in desne podpore. Momentna enačba s polom v levi podpori je

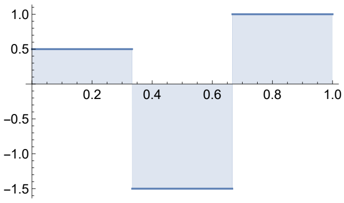
$$-\frac{2lF_0}{3} + \frac{2B_2}{3} - lF_0 = 0 \Rightarrow B_2 = \frac{5}{2}F_0.$$

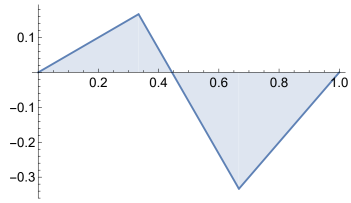
Momentna enačba s polom v desni podpori pa je

$$-\frac{2A_2}{3} + \frac{2lF_0}{3} - \frac{lF_0}{3} = 0 \Rightarrow A_2 = \frac{1}{2}F_0.$$

Obremenitev nosilca je točkasta. Potek prečne sile je odsekoma konstanten, upogibni moment pa je odsekoma linearen. Prečna sila za $x \in [0, l/3]$ ima vrednost A_2, za $x \in (l/3, 2l/3)$ ima vrednost $A_2 - 2F_0 = -3F_0/2$ za $x \in (2l/3, l)$ pa je $Q = F_0$.
Upogibni moment za $x \in [0, l/3]$ je $M = A_2 x$, za $x \in (l/3, 2l/3)$ je $M = \frac{lF_0}{6} - 3F_0(x - l/3)/2$, za $x \in (2l/3, l)$ pa $(l-x)F_0$. Po absolutni vrednosti je največji upogibni moment enak

$$|M_{\mathrm{max}}| = \frac{1}{3} l F_0.$$





(b) Ploskovni moment je

$$I = I_1 - I_2 = \frac{1}{12} a (2a)^3 - \frac{1}{12} b (2b)^3 = \frac{a^4}{2}.$$

(c) Po formuli je

$$\sigma_{\mathrm{max}} = \frac{|M_{\mathrm{max}}|}{I} |z|_{\mathrm{max}} = \frac{2lF_0}{3a^3} = \frac{F_0}{12} 10^6 \mathrm{m}^{-2}.$$

Iz pogoja $\sigma_{max} < 100\,\mathrm{MPa}$ potem sledi

$$F_0 < 1200\,\mathrm{N}.$$