

OSNOVE MEHANIKE & TEHNIČNA MEHANIKA - sinopsis predavanj v šolskem letu 2025/2026

Metalurške tehnologije & Geotehnologija in rudarstvo NTF : Viskokošolski strokovni študij

18. 2. 26 KINEMATIKA IN DINAMIKA

Kinematika

Položaj točke P , opazovalec O , kartezični koordinatni sistem x, y, z .

Koordinate točke $P(x, y, z)$, krajevni vektor $P - O = \vec{OP} = \vec{r}$ od izhodišča O do točke P .

V kartezičnem KS so komponente krajevnega vektorja $\vec{OP}$ enake koordinatam točke P :

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Osnovne vektorskega računa

- bazni vektorji $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$;
- seštevanje, odštevanje vektorjev, množenje vektorjev s skalarjem;
- velikost vektorja;
- skalarni produkt;
- vektorski produkt.

Gibanje, zapis $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Vektor hitrosti: trenutna sprememba položaja po času, oziroma odvod krajevnega vektorja po času.

Kartezični zapis

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}.$$

Geometrijski pomen vektorja hitrosti: vektor hitrosti je tangentni vektor na tir gibanja. Velikost vektorja hitrosti je brzina.

Vektor pospeška: trenutna sprememba vektorja hitrosti po času, oziroma odvod vektorja hitrosti po času.

Kartezični zapis

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}.$$

Geometrijski pomen vektorja pospeška: smer zavijanja.

Osnovne diferencialnega računa:

- $(f + g)' = \dot{f} + \dot{g}$;
- $(fg)' = \dot{f}g + f\dot{g}$;
- $f(t) = konst \iff \dot{f} = 0$;
- odvod afine funkcije: $f(t) = \alpha + \beta t + x_0 \Rightarrow \dot{f} = \beta$.
- odvod kvadratne funkcije: $f(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2 \Rightarrow \dot{f} = \beta + 2\gamma t$.
- Odvod sinusa, kosinusa: $(\sin \omega t)' = \omega \cos \omega t$, $(\cos \omega t)' = -\omega \sin \omega t$.
- Verižino pravilo (posredno odvajanje)

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x).$$

Primer: $\frac{d}{dt} \sin \varphi(t) = \cos \varphi(t) \dot{\varphi}$.

Pojem pospeševanja, zaviranja:

- točka pospešuje, če je $\frac{dv}{dt} > 0 \iff \vec{v} \cdot \vec{a} > 0$;
- točka zavira, če je $\frac{dv}{dt} < 0 \iff \vec{v} \cdot \vec{a} < 0$.

Osnovni primeri gibanja:

- premočrtno gibanje: tir leži na premici $\iff \vec{a} \parallel \vec{v}$;
- enakomerno gibanje: $\iff \vec{a} = \vec{0} \iff \vec{v} = \vec{v}_0$, gibanje je premočrtno; Za začetne pogoje $x(t = t_0) = x_0$ je $x = v_0(t - t_0) + x_0$.

- iii) enakomerno pospešeno $\iff \vec{a} = \vec{a}_0$, gibanje v splošnem ni premočrtno. Rešitev za premočrtno gibanje pri pogoju $x(t = t_0) = x_0$ in $\dot{x}(t = t_0) = v_0$ je

$$x = \frac{1}{2}a_0(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + x_0.$$

Polarni koordinatni sistem (PKS), polarne koordinate r, φ .

Zapis krajevnega vektorja $\vec{r} = r\vec{e}_r$, kjer je $\vec{e}_r = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}$.

25. 2. 26 Opis gibanja v PKS, bazna vektorja, radialni bazni vektor

$$\vec{e}_r = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}$$

in obodni bazni vektor

$$\vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}.$$

Velja:

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} = \vec{e}_\varphi \quad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\vec{e}_r.$$

Kinematika v polarnem koordinatnem sistemu:

- i) $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$, $\dot{r}$ radialna hitrost, $r\dot{\varphi}$ obodna hitrost;
- ii) $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \vec{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) \vec{e}_\varphi$, radialni, obodni pospešek.

Kroženje, enakomerno, neenakomerno, kotna hitrost, kotni pospešek.

Kroženje je enakomerno natanko tedaj, ko vektor pospeška kaže proti središču kroženja.

Kinematika sistema materialnih točk.

Masno središče.

Primer: masno središče dveh točk leži na njuni zveznici in jo deli v obratnem razmerju njunih mas.

Zapis masnega središča sistema kot masno središče dveh masnih središč njunih podsistemov.

$$\vec{r}^* = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i = \frac{1}{\hat{m}_1 + \hat{m}_2} (\hat{m}_1 \vec{r}_1^* + \hat{m}_2 \vec{r}_2^*)$$

Primer: masno središče sistema treh točk.

Masno središče likov in teles.

Primer: masno središče trikotnika.

Hitrost in pospešek masnega središča.

Newtonovi zakoni.

- 1) Koordinatni sistem (KS) je inercialen (IKS) natanko tedaj, ko se prosta materialna točka giblje premočrtno s konstantno brzino ali pa miruje.
- 2) V IKS velja Newtonova enačba $m\vec{a} = \vec{F}$.
- 3) Zakon akcije in reakcije $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$.

Pojem IKS.

Gibanje je natanko določeno z Newtonovo enačbo in začetnimi pogoji.

Dinamika sistema materialnih točk

Razdelitev sil na zunanje in notranje. Rezultanta notranjih sil je enaka nič; $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij} = \vec{0}$.

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i.$$

Enačba gibanja masnega središča $m\vec{a}^* = \vec{F}$.

Primer: poševni met po eksploziji.

Vrtilna količina točke $\vec{l}(O) = \vec{OP} \times m\vec{r}$.

Vrtilna količina sistema materialnih točk $\vec{L}(O) = \sum_{i=1}^N \vec{l}_i(O)$, $\vec{l}_i(O) = \vec{r}_i \times m_i \vec{r}_i$.

4. 3. 26 Odvod vrtilne količine.

Navor(moment) sile $\vec{F}$ s prijemališčem v P glede na pol O : $\vec{N}(O) = \vec{OP} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$.

Navor zunanjih, navor notranjih sil.

Odvisnost navora od pola

$$\vec{N}(A) = \vec{AB} \times \vec{F} + \vec{N}(B).$$

Pojem centralne sile.

Izrek o vrtilni količini: če so notranje sile centralne, je odvod vrtilne količine enak navoru

Zaprta sistem,

zakon o ohranitvi vrtilne količine;

zakon o ohranitvi gibalne količine.

Definicija togega gibanja.

Togi sistem, togo telo.

Togo gibanje je natanko določeno z gibanjem treh nekolinearnih točk.

Razcep togega gibanja na translatorno in rotacijsko gibanje.

Število prostostnih stopenj togega telesa.

Translatorski del gibanja togega telesa določa enačba gibanja masnega središča. Rotacijski del gibanja togega telesa določa izrek o vrtilni količini.

Dinamika togega sistema je natanko določena z enačbo gibanja masnega središča in izrekom o vrtilni količini.

STATIKA TOGEGA TELES

Togo telo je v statičnem ravnovesju natanko tedaj, ko

a) rezultanta vseh zunanjih sil je enaka nič;

b) rezultanta navorov zunanjih sil je enaka nič;

Togo telo se v danem koordinatnem sistemu ne giblje natanko tedaj, ko je

a) v statičnem ravnovesju in

b) miruje v začetnem trenutku;

Nezadostnost posameznih pogojev.

i) $\vec{F} = \vec{0}$, $\vec{N} \neq \vec{0}$ + telo miruje v začetnem trenutku;

ii) $\vec{F} \neq \vec{0}$, $\vec{N} = \vec{0}$ + telo miruje v začetnem trenutku;

iii) $\vec{F} = \vec{0}$, $\vec{N} = \vec{0}$ + telo ne miruje v začetnem trenutku.

Sistem sil $\mathcal{F} = \{(P_1, \vec{F}_1), \dots, (P_n, \vec{F}_n)\}$, rezultanta sistema sil $\vec{R}(\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$, moment sistema sil $\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \sum_{i=1}^n \vec{OP}_i \times \vec{F}_i$.

Definicija Sistema sil $\mathcal{F}_1$ in $\mathcal{F}_2$ sta ekvipolentna, če velja:

i) $\vec{R}(\mathcal{F}_1) = \vec{R}(\mathcal{F}_2)$ in

ii) obstaja pol O , tako da je $\vec{N}(\mathcal{F}_1, O) = \vec{N}(\mathcal{F}_2, O)$.

Odvisnost momenta od pola. Velja

$$\vec{N}(\mathcal{F}, O_1) = \vec{O_1O_2} \times \vec{R}(\mathcal{F}) + \vec{N}(\mathcal{F}, O_2).$$

Trditve Naj bosta sistema sil $\mathcal{F}_1$ in $\mathcal{F}_2$ ekvipolentna. Potem je $\vec{N}(\mathcal{F}_1, O) = \vec{N}(\mathcal{F}_2, O)$ za vsak pol O .

Trditve Sistema sil $\mathcal{F}_1$ in $\mathcal{F}_2$ sta ekvipolentna natanko tedaj, ko je $\vec{N}(\mathcal{F}_1, O_i) = \vec{N}(\mathcal{F}_2, O_i)$ za tri nekolinearne točke O_1, O_2 in O_3 .

Dva ekvivalentna sistema sil imata enak dinamični efekt na togo telo.

Dinamika togega telesa pod vplivom sistema sil $\mathcal{F}$ je natanko določena z $\vec{R}(\mathcal{F})$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, O)$.

Definicija Sistem sil $\mathcal{F}$ je:

ravninski, če vsa prijemališča in sile ležijo v isti ravnini;

ravnovesen, če je $\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{0}$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \vec{0}$;

dvojica, če je $\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{0}$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, O) \neq \vec{0}$;

ima skupno prijemališče, če obstaja točka P_0 tako, da je $\vec{R}(\mathcal{F}) \neq \vec{0}$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, P_0) = \vec{0}$;

Če je $\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{0}$, je navor sistema sil neodvisen od pola. Zato je rezultanta navora dvojice neodvisna od pola. Pravimo, da je navor dvojice prosti vektor.

Ekvivalentnost dvojice sil in navora; konstrukcija dvojice sil za dani navor.

Osnovni principi statike; operacije nad sistemom sil, ki ohranjajo ekvipolentnost

- a) princip o aditivnosti sil s skupnim prijemališčem;
- b) princip o polznosti sile;
- c) princip o uravnoveženemu paru sil.

Redukcija ravninskega sistema $\{(P_1, \vec{F}_1), (P_2, \vec{F}_2)\}$ dveh sil na skupno prijemališče:

- a) $\vec{F}_1 \parallel \vec{F}_2$;
- b) $\vec{F}_1 \parallel \vec{F}_2$ in $\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 > 0$;
- c) $\vec{F}_1 \parallel \vec{F}_2$, $\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 < 0$ in $|\vec{F}_1| \neq |\vec{F}_2|$;

Poljubni ravninski sistem dveh sil $\{(P_1, \vec{F}_1), (P_2, \vec{F}_2)\}$, ki ni dvojica, moremo reducirati na sistem z eno samo silo $\{(P_0, \vec{F}_1 + \vec{F}_2)\}$, kje je P_0 skupno prijemališče.

Unija sistema sil

$$\vec{R}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) = \vec{R}(\mathcal{F}_1) + \vec{R}(\mathcal{F}_2), \quad \vec{N}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2, O) = \vec{N}(\mathcal{F}_1, O) + \vec{N}(\mathcal{F}_2, O).$$

Unija dvojice je dvojica ali ravnovesni sistem sil.

11. 3. 26 Redukcija prostorskega sistema sil na poljubno izbrano redukcijsko točko

$$\mathcal{F} \equiv \mathcal{D} \cup \{(P_0, \vec{R}(\mathcal{F}))\},$$

kjer je $\mathcal{D}$ prestavitveni moment.

Invarianta sistema sil $I(\mathcal{F}) = \vec{R}(\mathcal{F}) \cdot \vec{N}(\mathcal{F}, O)$.

Trditev Invarianta sistema sil je neodvisna od pola.

Trditev Sistem sil $\mathcal{F}$ z neničelno rezultanto $\vec{R}(\mathcal{F}) \neq \vec{0}$ ima skupno prijemališče natanko tedaj, ko je $I(\mathcal{F}) = 0$. Krajevni vektor do skupnega prijemališča je

$$O\vec{P}_0 = \frac{\vec{R}(\mathcal{F}) \times \vec{N}(\mathcal{F}, O)}{|\vec{R}(\mathcal{F})|^2}.$$

Definicija Os sistema sil $\mathcal{F}$ je premica v smeri $\vec{R}(\mathcal{F})$, ki gre skozi tako točko P_0 , da je $\vec{N}(\mathcal{F}, P_0) \parallel \vec{R}(\mathcal{F})$.

Klasifikacija sistemov sil:

1) $I(\mathcal{F}) = 0$

1a) $\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{0}$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \vec{0}$: ravnovesni sistem sil;

1b) $\vec{R}(\mathcal{F}) \neq \vec{0}$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \vec{0}$: sistem sil s skupnim prijemališčem v O ;

1c) $\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{0}$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, O) \neq \vec{0}$: dvojica sil;

1d) $\vec{R}(\mathcal{F}) \neq \vec{0}$, $\vec{N}(\mathcal{F}, O) \neq \vec{0}$ in $\vec{R}(\mathcal{F}) \perp \vec{N}(\mathcal{F}, O)$: sistem sil ima skupno prijemališče na osi sistema;

2) $I(\mathcal{F}) \neq 0$ (dinama - sistem sil brez skupnega prijemališča.). Določitev osi sistema.

Analitična določitev osi sistema. Krajevni vektor od poljubnega pola O do točke P_0 na osi sistema je

$$O\vec{P}_0 = \frac{\vec{R}(\mathcal{F}) \times \vec{N}(\mathcal{F}, O)}{|\vec{R}(\mathcal{F})|^2}.$$

Primer: sistem sil z vzporednimi silami $\vec{F} = m_i \vec{F}_0$. Če je $m = \sum_{i=1}^N m_i \neq 0$ je ta sistem sil ekvipolenten rezultanti $m\vec{F}_0$, ki ima prijemališče v masnem središču.

Poljubni ravninski sistem sil lahko reduciramo na dve sili, ki imata prijemališči v poljubno izbranih točkah.

Poljubni prostorski sistem sil lahko reduciramo na tri sile, ki imajo prijemališča v poljubno izbranih treh nekolinearnih točkah.

Osnova naloga statike

Uravnovešanje danega sistema sil, določitev sil podpor.

Klasifikacija podpor

- a) vpeta(konzolna) podpora;
- b) nepomična členkasta podpora;
- c) ravninsko pomična členaksta podpora;
- d) linijsko pomična členaksta podpora;

Primer: enostavno podprt togi nosilec.

- a) statično določen primer;
- b) statično nedoločen primer.

Osnovni koraki pri reševanju osnovne naloge statike togega telesa:

- a) identifikacija sil in njihovih prijemališč;
- b) postavitev KS in vektorski zapis sil in prijemališč;
- c) zapis ravnovesnih enačb;
- d) reševanje ravnovesnih enačb;
- e) analiza rezultata.

Primer: (sistem sil s skupnim prijemališčem) določi silo, ki potisne kolo s polmerom r_0 čez robnik višine h ;

18. 3. 26 Trenje

Sila podlage je rezultanta ploskovne porazdelitve sil, tangentska komponenta, normalna komponenta.

Sila trenja je komponenta sile podlage v tangentski smeri in kaže v nasprotno smer kot gibanje.

Prijemališče sile podlage.

Drsno(dinamično) trenje, dotikalno(oprijemalno, statično) trenje.

Coulombov zakon trenja.

Tabela koeficientov oprijemalnega(koeficient lepenja) in drsnega trenja.

Drsenje klade na strmini, torni kot.

Klinasti jermen, efektivni koeficient trenja $\hat{k} = k/\sin \alpha$.

Spušcanje, dvigovanje klade po strmini; samozapornost, α_0 torni kot.

Vijačna dvigalka, $M = Gr_0 \tan(\alpha + \alpha_0)$, α strmina vijačnice,

Trenje vrvi na kolutu.

Vrednosti kvocienta S_2/S_1 pri $k = \frac{1}{2}$ za različne ovojne kote φ_0 .

Ravnovesna enačba trenja vrvi na kolutu.

$$\frac{d\vec{F}}{d\varphi} + \vec{s} + \vec{t} = \vec{0}.$$

Izpeljava formule $S_2 = S_1 e^{k\varphi_0}$.

Primer: zdrs vrvi na kolutu škripca.

Statika sistema togih teles

Spoji med telesi, sile in navori v spojih.

Klasifikacija spojev:

- a) popolni spoj, prenos vseh sil in momentov;
- b) tečaj, prenos vseh sil in momentov pravokotnih na os tečaja;
- c) križni zglob, prenos vseh sil in momenta v smeri osi zgloba;
- d) krogelni zglob, prenos vseh sil brez prenosa momenta;
- e) linijski drsni, prenos sil pravokotnih na smer drsnika in vseh momentov;
- f) ploščati drsni, prenos sile pravokotne na ravnino drsnika in vseh momentov;
- g) kombinacija drsnika in zgloba.

Primer: A lestev, določitev pogoja zdrsa.

Potek reševanja nalog statike sistema togih teles:

- a) identifikacija zunanjih sil;
- b) razčelnitev sistema na toge komponente;
- c) identifikacija sil in momentov v spojih;

- d) postavitev diagramov prostih teles;
- e) zapis ravnotežnih enačb;
- f) reševanje sistema ravnotežnih enačb.