

Rešitve: 1. izpit iz Osnov mehanike, 11. junij 2026

Rešil: Claude (Anthropic)

Naloga 1: prostorski sistem sil

Koordinatni sistem postavimo v pol O v vogalu kvadra: os x vzdolž stranice $a = 2\text{ m}$, os y vzdolž $b = 1\text{ m}$, os z vzdolž $c = 2\text{ m}$.

(a) **Sile in prijemališča.** S slike razberemo smeri (vzdolž stranic in diagonal kvadra) in iz podanih velikosti določimo komponente:

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 &= F_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \vec{r}_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{vzdolž spodnjega roba skozi } O), \\ \vec{F}_2 &= \alpha F_0 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \vec{r}_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m} \quad (\text{diagonala spodnje ploskve, } |\vec{F}_2| = \alpha\sqrt{5}F_0), \\ \vec{F}_3 &= F_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \vec{r}_3 &= \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m}, \\ \vec{F}_4 &= F_0 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, & \vec{r}_4 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{telesna diagonala } O \rightarrow (a, b, c), |\vec{F}_4| = 3F_0).\end{aligned}$$

(b) **Rezultanta sil in navorov.**

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = F_0 \begin{pmatrix} 3 + 2\alpha \\ 2 - \alpha \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Navor glede na O : sili $\vec{F}_1$ in $\vec{F}_4$ delujeta skozi O , zato prispevata le $\vec{F}_2$ in $\vec{F}_3$:

$$\vec{M}_O = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 = \alpha F_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ m} + F_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ m} = 2(1 - \alpha)F_0 \text{ m} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) **Invarianta.**

$$I = \vec{R} \cdot \vec{M}_O = 2F_0 \cdot 2(1 - \alpha)F_0 \text{ m} = 4(1 - \alpha)F_0^2 \text{ m}.$$

(Invarianta je neodvisna od izbire pola.)

(d) **Skupno prijemališče.** Sistem se da reducirati na eno samo silo (vse sile imajo skupno prijemališče na isti premici delovanja rezultante) natanko tedaj, ko je $I = \vec{R} \cdot \vec{M}_O = 0$ in $\vec{R} \neq 0$:

$$4(1 - \alpha)F_0^2 \text{ m} = 0 \implies \boxed{\alpha = 1}.$$

Tedaj je celo $\vec{M}_O = \vec{0}$, torej rezultanta

$$\vec{R} = F_0 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad |\vec{R}| = \sqrt{30} F_0$$

deluje kar skozi pol O – skupno prijemališče je v vogalu O .

Naloga 2: paličje

Vozlišča označimo s koordinatami (enota a): spodnji pas $B_0, \dots, B_{10}$ v točkah $(i, 0)$, zgornji pas T_1, T_3, T_5, T_7, T_9 v $(i, 1)$, členkasta podpora $S = (1, -1)$ in viseče vozlišče $H = (6, -1)$. Obtežbe F_0 delujejo navzdol v B_3, B_4 in H . Drсна podpora je v B_{10} , podporna ploskev pod kotom $\pi/4$, torej reakcija v smeri normale $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$.

(a) Statična določenost. Preštejemo: $j = 18$ vozlišč, $m = 34$ palic, $r = 3$ podporne reakcije (2 v členku, 1 v drsni podpori). Pogoji:

$$m + r = 37 > 2j = 36,$$

paličje je torej *enkrat statično nedoločeno*. Nedoločenost je notranja in lokalizirana v levem podpornem delu (romb $B_0-T_1-B_2-S$ z obema diagonalama skozi B_1 tvori odvečno palico). Zunanje reakcije in vse v nadaljevanju iskane sile palic so kljub temu statično določene, ker ne ležijo v samonapetostnem delu konstrukcije.

(b) Sili palic 4 in 5. Ravnoesje visečega vozlišča H : palici 4 in 5 sta nagnjeni pod 45° (proti B_5 in B_7), obtežba F_0 navzdol. Iz simetrije in ravnoesja:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x : \quad \frac{-N_4 + N_5}{\sqrt{2}} &= 0, & \Sigma F_y : \quad \frac{N_4 + N_5}{\sqrt{2}} - F_0 &= 0 \\ \implies \quad \boxed{N_4 = N_5 = \frac{F_0}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} F_0} & \quad (\text{nateg}). \end{aligned}$$

(c) Sile v podporah. Ravnoesje celotnega paličja. Moment glede na členek $S = (1, -1)$ (zunanje obtežbe: F_0 v B_3, B_4 in H ; reakcija drsne podpore N v smeri $\vec{n}$ v B_{10}):

$$\Sigma M_S : \quad \frac{10 Na}{\sqrt{2}} - (2 + 3 + 5) F_0 a = 0 \quad \implies \quad N = \sqrt{2} F_0,$$

torej ima reakcija drsne podpore komponenti

$$\vec{N} = N \vec{n} = F_0 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Iz ravnoesja sil sledi reakcija členka:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x : \quad A_x - F_0 &= 0, & \Sigma F_y : \quad A_y + F_0 - 3F_0 &= 0 \\ \implies \quad \boxed{A_x = F_0, \quad A_y = 2F_0} & \quad (|\vec{A}| = \sqrt{5} F_0). \end{aligned}$$

(d) **Sile palic 1, 2 in 3.** Naredimo Ritterjev rez skozi palice 1 (B_2 – B_3 , spodnji pas), 2 (B_2 – T_3 , diagonala) in 3 (T_1 – T_3 , zgornji pas) ter opazujemo levi del, na katerega deluje le reakcija $\vec{A} = (F_0, 2F_0)$ v S .

$$\Sigma F_y: \quad 2F_0 + \frac{N_2}{\sqrt{2}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{N_2 = -2\sqrt{2} F_0} \quad (\text{tlak}),$$

$$\Sigma M_{B_2}: \quad -F_0 a - N_3 a = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{N_3 = -F_0} \quad (\text{tlak}),$$

$$\Sigma F_x: \quad F_0 + N_1 + \frac{N_2}{\sqrt{2}} + N_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{N_1 = 2F_0} \quad (\text{nateg}).$$

Naloga 3: napetostni tenzor

Normalna napetost v smeri pod kotom θ glede na os x (ki jo postavimo v smer σ_a) je

$$\sigma(\theta) = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\theta + \sigma_{xy} \sin 2\theta \equiv m + d \cos 2\theta + t \sin 2\theta.$$

Meritve: $\sigma_a = \sigma(0) = \sigma_0$, $\sigma_b = \sigma(2\pi/3) = -\frac{3}{2}\sigma_0$, $\sigma_c = \sigma(-2\pi/3) = \frac{1}{2}\sigma_0$:

$$m + d = \sigma_0,$$

$$m - \frac{1}{2}d - \frac{\sqrt{3}}{2}t = -\frac{3}{2}\sigma_0,$$

$$m - \frac{1}{2}d + \frac{\sqrt{3}}{2}t = \frac{1}{2}\sigma_0.$$

Vsota vseh treh enačb da $3m = 0$, torej $m = 0$ in $d = \sigma_0$; razlika zadnjih dveh da $\sqrt{3}t = 2\sigma_0$, torej $t = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}}$.

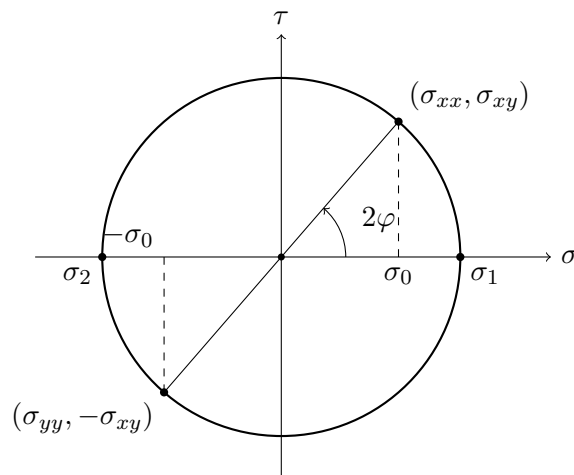
(a) **Napetostni tenzor.** Iz m , d , t sledi $\sigma_{xx} = m + d = \sigma_0$, $\sigma_{yy} = m - d = -\sigma_0$, $\sigma_{xy} = t$:

$$\sigma = \sigma_0 \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & -1 \end{pmatrix} = \sigma_0 \begin{pmatrix} 1 & \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \frac{2\sqrt{3}}{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) **Mohrova krožnica.** Središče je v $m = 0$, polmer

$$R = \sqrt{d^2 + t^2} = \sqrt{\sigma_0^2 + \frac{4\sigma_0^2}{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3} \sigma_0 \approx 1,53 \sigma_0.$$

Glavni napetosti sta $\sigma_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{21}}{3} \sigma_0$, smer glavnih osi pa iz $\tan 2\varphi = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, torej $\varphi \approx 24,6^\circ$.



(c) **Deformacijski tenzor.** Ravninsko napetostno stanje, Hookov zakon z $\nu = \frac{1}{4}$, $E = \sigma_0$. Ker je $\text{tr } \sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 0$:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}}{E} = \frac{(1 + \nu)\sigma_{xx}}{E} = \frac{5}{4}, \quad \varepsilon_{yy} = -\frac{5}{4}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{xy} = \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{6},$$

in $\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0$. Torej

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{5\sqrt{3}}{6} & 0 \\ \frac{5\sqrt{3}}{6} & -\frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Deformacijski tenzor je v tem primeru kar $(1 + \nu)\sigma/E$, ker je sled napetostnega tenzorja enaka nič.)

Naloga 4: upogib nosilca

(a) **Prečna sila in upogibni moment.** Skupna obtežba je $q_0l + F = 2q_0l$ in je simetrična glede na sredino, zato sta obe reakciji enaki q_0l (navzgor). Koordinato x merimo od leve podpore.

Za $0 \leq x < \frac{l}{2}$:

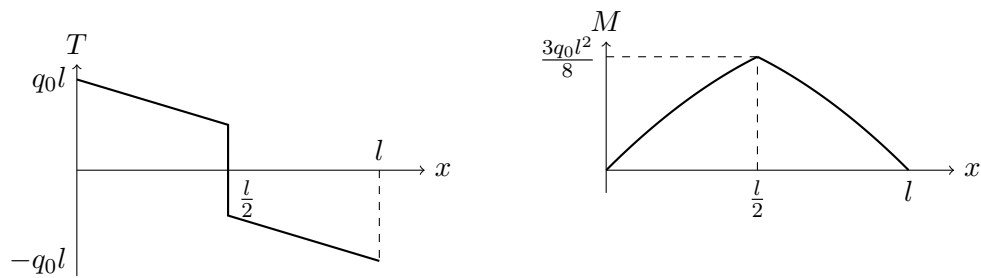
$$T(x) = q_0l - q_0x, \quad M(x) = q_0lx - \frac{q_0x^2}{2}.$$

Na sredini prečna sila skoči za $-F = -q_0l$ (iz $+\frac{q_0l}{2}$ na $-\frac{q_0l}{2}$), za $\frac{l}{2} < x \leq l$:

$$T(x) = -q_0x, \quad M(x) = \frac{q_0}{2}(l^2 - x^2).$$

Moment je zvezen, največji na sredini:

$$M_{\max} = M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{3q_0l^2}{8}.$$



(b) **Ploskovni moment I-preseka.** Presek (skupna višina $\frac{3a}{2}$, širina pasnic a , debelina pasnic in stojine $\frac{a}{4}$) je simetričen, nevtralna os poteka skozi sredino. Vzemimo poln pravokotnik $a \times \frac{3a}{2}$ in odštejmo oba izreza širine $\frac{1}{2}(a - \frac{a}{4}) \cdot 2 = \frac{3a}{4}$ in višine a :

$$I = \frac{a \left(\frac{3a}{2}\right)^3}{12} - \frac{\frac{3a}{4} a^3}{12} = \frac{27a^4}{96} - \frac{a^4}{16} = \boxed{\frac{7a^4}{32}}.$$

Odpornostni moment: $W = \frac{I}{z_{\max}} = \frac{7a^4/32}{3a/4} = \frac{7a^3}{24}.$

(c) **Pogoj na q_0 .** Največja natezna napetost:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{3q_0 l^2/8}{7a^3/24} = \frac{9q_0 l^2}{7a^3} \leq \sigma_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{q_0 \leq \frac{7\sigma_0 a^3}{9l^2}}.$$

Za $l = 1 \text{ m}$, $a = 4 \text{ cm}$, $\sigma_0 = 80 \text{ MPa}$:

$$q_0 \leq \frac{7 \cdot 80 \cdot 10^6 \text{ Pa} \cdot (0,04 \text{ m})^3}{9 \cdot (1 \text{ m})^2} = \frac{35840}{9} \frac{\text{N}}{\text{m}} \approx 3,98 \frac{\text{kN}}{\text{m}}.$$