

1. izpit iz Osnov mehanike — rešitve

11. junij 2026

Rešeno z Claude Sonnet 5

1. naloga — prostorski sistem sil

Postavimo koordinatni sistem v vogal O kvadra: os x v smeri stranice a , os y v smeri stranice b in os z v smeri stranice c (navzgor). Dimenzije so $a = b = 1$ m, $c = 2$ m. Prostorska diagonalna ima dolžino $\ell = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{6}$ m, ploskovna diagonalna spodnje ploskve pa $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$ m.

(a) **Sile in prijemališča.** Iz skice preberemo smeri (enotski vektorji) in prijemališča:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1 &= F_0 (1, 0, 0), & \text{vzdolž stranice } a, \text{ prijemališče } T_1 &= (0, b, 0); \\ \mathbf{F}_2 &= \alpha\sqrt{2} F_0 \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0) = \alpha F_0 (-1, 1, 0), & \text{ploskovna diagonalna spodnje ploskve, } T_2 &= (a, 0, 0); \\ \mathbf{F}_3 &= F_0 (0, 0, 1), & \text{vzdolž stranice } c, T_3 &= (0, 0, c); \\ \mathbf{F}_4 &= 2\sqrt{6} F_0 \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2) = 2F_0 (1, 1, 2), & \text{prostorska diagonalna skozi } O, T_4 &= (0, 0, 0).\end{aligned}$$

Vektor $\mathbf{F}_4$ ima velikost $|\mathbf{F}_4| = 2F_0\sqrt{1+1+4} = 2\sqrt{6} F_0$, kar se ujema s podatkom.

(b) **Rezultanta in navor glede na O .** Rezultanta:

$$\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{F}_i = F_0(3 - \alpha, 2 + \alpha, 5).$$

Navor glede na pol O ($\mathbf{M}_O = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$). Ker gresta nosilki $\mathbf{F}_3$ in $\mathbf{F}_4$ skozi O (oz. sta radialni), je njun prispevek nič; prispevata le $\mathbf{F}_1$ in $\mathbf{F}_2$:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = F_0(0, 0, \alpha - 1).$$

(c) **Invarianta sistema.** Skalarna invarianta je

$$\mathcal{I} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O = 5F_0^2(\alpha - 1).$$

(d) **Skupno prijemališče.** Sistem ima skupno prijemališče (se reducira na eno samo silo z ničelnim navorom) natanko tedaj, ko je invarianta nič:

$$\boxed{\alpha = 1.}$$

Tedaj je

$$\mathbf{R} = F_0(2, 3, 5), \quad |\mathbf{R}| = \sqrt{38} F_0, \quad \mathbf{M}_O = \mathbf{0}.$$

2. naloga — paličje z drsno podpora pod $\pi/4$

(a) **Statična določenost.** Paličje ima $n = 16$ vozlišč, $m = 29$ palic in $r = 3$ podporne reakcije (leva nepomična podpora: 2; desna drsna podpora pod kotom $\pi/4$: 1). Pogoji za statično določenost ravninskega paličja je $m + r = 2n$:

$$m + r = 29 + 3 = 32 = 2 \cdot 16 = 2n.$$

Paličje je torej **statično določeno**.

(c) **Sile v podporah.** Vse zunanje obremenitve so navpične, skupaj $5F_0 + 2F_0 + F_0 = 8F_0$ navzdol. Desna drsna podpora daje reakcijo pravokotno na klanec, nagnjen pod $\pi/4$, torej v smeri $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$; označimo njeno velikost z N . Leva nepomična podpora da R_x, R_y . Iz ravnovesja (npr. moment okoli leve podpore, nato $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$) dobimo

$$N = 3\sqrt{2} F_0 \text{ (drsna, desna), } R_x = 3F_0, \quad R_y = 5F_0 \text{ (nepomična, leva).}$$

(Kontrola: $\sum F_x = R_x - \frac{N}{\sqrt{2}} = 3F_0 - 3F_0 = 0$; $\sum F_y = R_y + \frac{N}{\sqrt{2}} - 8F_0 = 5F_0 + 3F_0 - 8F_0 = 0$.)

(b) **Sili palic 4 in 5.** Palica 5 je zadnji člen zgornjega pasu (4, 1)–(5, 1), palica 4 pa poševnica (4, 0)–(5, 1) (pod 45°) na skrajno desnem koncu, kjer v vozlišču (5, 1) deluje F_0 navzdol. Ravnovesje vozlišča (5, 1) (palice: 5 vodoravno v levo, 4 poševno navzdol-levo pod 45°):

$$\sum F_y : -F_0 - S_4 \sin 45^\circ = 0 \Rightarrow S_4 = -\sqrt{2} F_0 \text{ (tlak),}$$

$$\sum F_x : -S_5 - S_4 \cos 45^\circ = 0 \Rightarrow S_5 = -S_4 \cos 45^\circ = +F_0 \text{ (nateg).}$$

Torej

$$S_4 = -\sqrt{2} F_0 \text{ (tlak), } S_5 = +F_0 \text{ (nateg).}$$

(d) **Sile palic 1, 2 in 3.** Palica 1 je spodnji pas (2, 0)–(3, 0), palica 2 zgornji pas (2, 1)–(3, 1) in palica 3 poševnica (2, 0)–(3, 1). Z metodo prerezov (Ritter) skozi to polje oz. z ravnovesjem vozlišč dobimo

$$S_1 = -2F_0 \text{ (tlak), } S_2 = +5F_0 \text{ (nateg), } S_3 = -3\sqrt{2} F_0 \text{ (tlak).}$$

3. naloga — deformacijski tenzor in Hookov zakon

(a) **Deformacijski tenzor.** Merilne smeri: ϵ_a vzdolž osi x (kot 0), ϵ_b pod kotom $2\pi/3$, ϵ_c pod kotom $4\pi/3$ (t.j. enakomerna *delta* rozeta). Normalna deformacija v smeri kota φ je

$$\epsilon(\varphi) = \epsilon_x \cos^2 \varphi + \epsilon_y \sin^2 \varphi + 2\epsilon_{xy} \sin \varphi \cos \varphi.$$

Iz $\epsilon_a = \epsilon_0, \epsilon_b = -\epsilon_0, \epsilon_c = 0$ rešimo sistem:

$$\epsilon_x = \epsilon_0, \quad \epsilon_y = -\epsilon_0, \quad \epsilon_{xy} = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{3}}.$$

Torej

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \epsilon_0 & \frac{\epsilon_0}{\sqrt{3}} \\ \frac{\epsilon_0}{\sqrt{3}} & -\epsilon_0 \end{pmatrix}.$$

(b) **Youngov modul in Poissonov količnik.** Deformacijsko stanje je *ravninsko* ($\epsilon_z = 0$), napetostno pa *ni* ($\sigma_z \neq 0$). Uporabimo splošni (3D) Hookov zakon

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \quad \epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], \quad \epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)].$$

Iz pogoja $\epsilon_z = 0$ sledi izvenravninska napetost

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) = \nu(2\sigma_0 + \sigma_0) = 3\nu\sigma_0.$$

Vstavimo $\sigma_x = 2\sigma_0, \sigma_y = \sigma_0$ v prvi dve enačbi:

$$E \epsilon_0 = 2\sigma_0 - \nu(\sigma_0 + 3\nu\sigma_0) = \sigma_0(2 - \nu - 3\nu^2),$$

$$-E \epsilon_0 = \sigma_0 - \nu(2\sigma_0 + 3\nu\sigma_0) = \sigma_0(1 - 2\nu - 3\nu^2).$$

Seštevanje enačb izniči E :

$$0 = \sigma_0(3 - 3\nu - 6\nu^2) = 3\sigma_0(1 - \nu)(1 + 2\nu) \implies \nu = \frac{1}{2}$$

(korena $\nu = 1$ zavržemo kot fizikalno nedopustnega). Iz prve enačbe potem

$$E \epsilon_0 = \sigma_0 \left(2 - \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{4} \sigma_0.$$

Torej

$$\boxed{\nu = \frac{1}{2}, \quad E = \frac{3\sigma_0}{4\epsilon_0}.$$

Pripadajoča izvenravninska napetost je $\sigma_z = 3\nu\sigma_0 = \frac{3}{2}\sigma_0$. Za kontrolo: strižni modul $G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{\sigma_0}{4\epsilon_0}$ da $\tau_{xy} = 2G \epsilon_{xy} = \frac{\sqrt{3}}{6}\sigma_0$.

4. naloga — enostavno podprt nosilec

Nosilec dolžine l je podprt na obeh koncih; obremenitve so F_0 pri $x = l/3$, $2F_0$ pri $x = l/2$ in $3F_0$ pri $x = 2l/3$.

Reakciji. Iz $\sum M_A = 0$: $R_B l = F_0 \frac{l}{3} + 2F_0 \frac{l}{2} + 3F_0 \frac{2l}{3}$, torej

$$R_B = \frac{10}{3}F_0, \quad R_A = 6F_0 - R_B = \frac{8}{3}F_0.$$

(a) **Prečna sila in upogibni moment.** Prečna sila po odsekih (od leve):

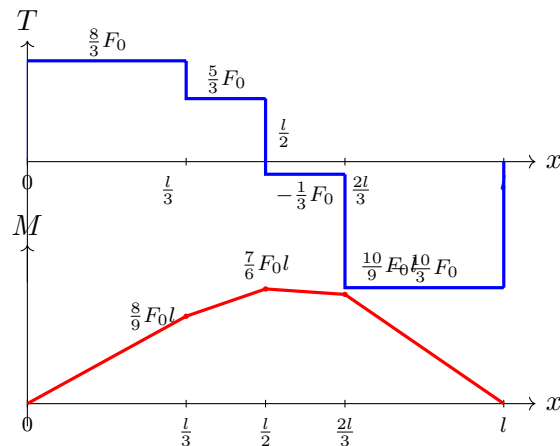
$$T = \frac{8}{3}F_0 \quad (0 < x < \frac{l}{3}), \quad \frac{5}{3}F_0 \quad (\frac{l}{3} < x < \frac{l}{2}), \quad -\frac{1}{3}F_0 \quad (\frac{l}{2} < x < \frac{2l}{3}), \quad -\frac{10}{3}F_0 \quad (\frac{2l}{3} < x < l).$$

Upogibni moment v značilnih točkah:

$$M(\frac{l}{3}) = \frac{8}{9}F_0 l, \quad M(\frac{l}{2}) = \frac{7}{6}F_0 l, \quad M(\frac{2l}{3}) = \frac{10}{9}F_0 l.$$

Prečna sila spremeni predznak pri $x = l/2$, zato je tam **maksimalni moment**

$$\boxed{M_{\max} = \frac{7}{6}F_0 l.}$$



(b) Ploskovni (vztrajnostni) moment prereza. Prerez je zunanji pravokotnik širine $5a$ in višine $6a$ z dvema pravokotnima izrezoma širine a in višine $4a$, središčno postavljenima. Glede na vodoravno težiščno os:

$$I = \frac{5a(6a)^3}{12} - 2 \cdot \frac{a(4a)^3}{12} = 90a^4 - \frac{32}{3}a^4 = \boxed{\frac{238}{3}a^4 \approx 79.3a^4}.$$

(c) Pogoji na F_0 . Največja natezna napetost nastopi pri $M_{\max}$ na robu prereza ($c = 3a$):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} c}{I} = \frac{\frac{7}{6}F_0 l \cdot 3a}{\frac{238}{3}a^4} = \frac{63 F_0 l}{238 a^3} = \frac{9 F_0 l}{34 a^3} \leq \sigma_0.$$

Od tod

$$\boxed{F_0 \leq \frac{34}{9} \cdot \frac{\sigma_0 a^3}{l} = \frac{68 \sigma_0 a^3}{3l}}.$$

Za $l = 1 \text{ m}$, $a = 1 \text{ cm} = 0.01 \text{ m}$, $\sigma_0 = 80 \text{ MPa}$:

$$F_0 \leq \frac{68 \cdot 80 \cdot 10^6 \cdot (10^{-2})^3}{3 \cdot 1} = \frac{68 \cdot 80 \cdot 10^6 \cdot 10^{-6}}{3} \text{ N} \approx 1813 \text{ N}.$$