

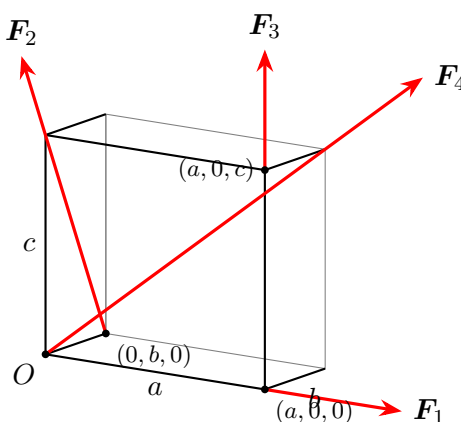
3. izpit iz Osnov mehanike, 18. julij 2026

Rešitve

Rešeno z Claude

Naloga 1 — prostorski sistem sil

Geometrija. Koordinatni sistem postavim v vogal O , osi vzdolž stranic kvadra: $\mathbf{e}_x$ v smeri $a = 2$ m, $\mathbf{e}_y$ v smeri $b = 1$ m, $\mathbf{e}_z$ v smeri $c = 2$ m. Vozlišča kvadra so torej $(0, 0, 0)$, $(2, 0, 0)$, $(2, 1, 0)$, $\dots$, $(2, 1, 2)$ (v metrih). Iz slike preberemo (dolžine so v metrih, sile v enotah F_0):



- $\mathbf{F}_1$ leži na spodnji stranici $O \rightarrow (a, 0, 0)$, kaže v smeri $+\mathbf{e}_x$;
- $\mathbf{F}_2$ leži na diagonalni stranske ploskve $x = 0$, od $(0, b, 0)$ proti $(0, 0, c)$; ta diagonalna meri $\sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$ m;
- $\mathbf{F}_3$ je vzporedna z $\mathbf{e}_z$, prijemališče $(a, 0, c)$;
- $\mathbf{F}_4$ leži na telesni diagonalni $O \rightarrow (a, b, c)$, ki meri $\sqrt{4 + 1 + 4} = 3$ m.

(a) Sile in prijemališča

Ker sta obe diagonali dolgi točno $\sqrt{5}$ m oz. 3 m, so komponente kar (brez korenov v imenovalcu)

sila	vektor	velikost	prijemališče (m)
$\mathbf{F}_1$	$F_0 (1, 0, 0)$	F_0	$(2, 0, 0)$
$\mathbf{F}_2$	$F_0 (0, -1, 2)$	$\sqrt{5} F_0$	$(0, 1, 0)$
$\mathbf{F}_3$	$F_0 (0, 0, 1)$	F_0	$(2, 0, 2)$
$\mathbf{F}_4$	$\alpha F_0 (2, 1, 2)$	$3 \alpha F_0$	$(0, 0, 0)$

Prijemališče je določeno le do premika po nosilki: $\mathbf{F}_1$ in $\mathbf{F}_4$ imata nosilki, ki gresta skozi O , zato k navoru glede na O ne prispevata.

(b) Rezultanta in navor glede na O

$$\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{F}_i = F_0 (1 + 2\alpha, \alpha - 1, 3 + 2\alpha), \quad |\mathbf{R}| = F_0 \sqrt{9\alpha^2 + 14\alpha + 11}.$$

Navor: prispevata le $\mathbf{F}_2$ in $\mathbf{F}_3$,

$$\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = F_0 \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2F_0 \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_3 = F_0 \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2F_0 \mathbf{e}_y,$$

$$\boxed{\mathbf{M}_O = 2F_0 \text{ m} (1, -1, 0), \quad |\mathbf{M}_O| = 2\sqrt{2} F_0 \text{ m}}$$

Navor je neodvisen od α , ker gre nosilka $\mathbf{F}_4$ skozi pol O .

(c) Invarianta sistema sil

Skalarna invarianta (neodvisna od izbire pola):

$$I = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O = F_0^2 \text{ m} [2(1 + 2\alpha) - 2(\alpha - 1) + 0] = F_0^2 \text{ m} (4 + 2\alpha) = 2F_0^2 \text{ m} (\alpha + 2).$$

(Ekvivalentno: komponenta navora v smeri rezultante $M_{\parallel} = I/|\mathbf{R}|$ je invarianta.)

(d) Pogoj za skupno prijemališče

Sistem ima skupno prijemališče (je reducibilen na eno samo silo, ki deluje v neki točki centralne osi) natanko tedaj, ko je $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$ in $I = 0$:

$$2F_0^2(\alpha + 2) = 0 \implies \boxed{\alpha = -2}.$$

Takrat je $\mathbf{F}_4 = -2F_0(2, 1, 2) = F_0(-4, -2, -4)$, $F_4 = 6F_0$, in

$$\mathbf{R} = F_0(-3, -3, -1), \quad |\mathbf{R}| = \sqrt{19} F_0 \approx 4,36 F_0, \quad \mathbf{M}_O = 2F_0 \text{ m} (1, -1, 0).$$

Kontrola — lega skupnega prijemališča. Točke centralne osi dobimo iz $\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O$:

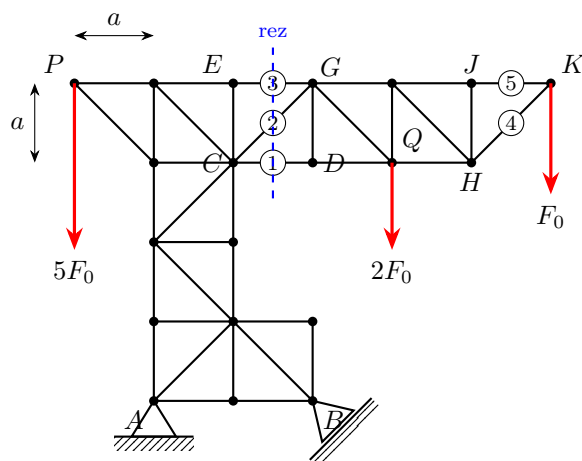
$$\mathbf{r}_0 = \frac{\mathbf{R} \times \mathbf{M}_O}{|\mathbf{R}|^2} = \frac{1}{19}(-2, -2, 12) \text{ m} \approx (-0,105, -0,105, 0,632) \text{ m}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t \mathbf{R}.$$

Res je $\mathbf{M}_{\mathbf{r}_0} = \mathbf{M}_O - \mathbf{r}_0 \times \mathbf{R} = \mathbf{0}$, torej sistem res nadomesti ena sama sila $\mathbf{R}$ z nosilko skozi $\mathbf{r}_0$.

Naloga 2 — paličje

Geometrija. Vozlišča označim s koordinatami v enotah a (glej sliko): levo je nepomična (členkasta) podpora $A = (0, 0)$, desno drsna podpora $B = (2, 0)$ na ravnini pod kotom $\pi/4$, tako da je reakcija $\mathbf{R}_B$ pravokotna na to ravnino, torej v smeri $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$. Obremenitve: $5F_0$ navzdol v $P = (-1, 4)$, $2F_0$ navzdol v $Q = (3, 3)$ in F_0 navzdol v $K = (5, 4)$.

Paličje ima $n = 20$ vozlišč, $m = 37$ palic in $r = 3$ neznane reakcije: $m + r = 40 = 2n$ — statično določeno.



Predznak: $S > 0$ pomeni *nateg*, $S < 0$ *tlak*.

(a) Palici 4 in 5

V vozlišču $K = (5, 4)$ se stikata samo palici 5 (JK , vodoravna) in 4 (HK , diagonala pod 45°), poleg zunanje sile F_0 navzdol. Enotski vektorja iz K : $K \rightarrow J = (-1, 0)$, $K \rightarrow H = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, -1)$.

$$\sum F_y : -\frac{S_4}{\sqrt{2}} - F_0 = 0 \Rightarrow \boxed{S_4 = -\sqrt{2} F_0 \approx -1,41 F_0 \text{ (tlak)}}$$

$$\sum F_x : -S_5 - \frac{S_4}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow \boxed{S_5 = -\frac{S_4}{\sqrt{2}} = +F_0 \text{ (nateg)}}$$

(b) Sile v podporah

Neznanke: A_x, A_y in velikost N reakcije v B , ki ima smer $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$, torej $\mathbf{R}_B = \frac{N}{\sqrt{2}}(-1, 1)$.

Momentna enačba glede na A (pozitivno v nasprotni smeri urinega kazalca), ročice v enotah a :

$$\sum M_A : \underbrace{(-a)(-5F_0)}_P + \underbrace{(3a)(-2F_0)}_Q + \underbrace{(5a)(-F_0)}_K + \underbrace{(2a)\frac{N}{\sqrt{2}}}_B = 0,$$

$$5aF_0 - 6aF_0 - 5aF_0 + \sqrt{2}aN = 0 \Rightarrow N = \frac{6F_0}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}F_0 \approx 4,24F_0.$$

$$\mathbf{R}_B = \frac{3\sqrt{2}F_0}{\sqrt{2}}(-1, 1) = F_0(-3, 3),$$

$$\sum F_x : A_x - 3F_0 = 0 \Rightarrow A_x = 3F_0, \quad \sum F_y : A_y + 3F_0 - 8F_0 = 0 \Rightarrow A_y = 5F_0.$$

$$\boxed{\mathbf{R}_A = F_0(3, 5), \quad |\mathbf{R}_A| = \sqrt{34}F_0 \approx 5,83F_0; \quad \mathbf{R}_B = F_0(-3, 3), \quad |\mathbf{R}_B| = 3\sqrt{2}F_0 \approx 4,24F_0}$$

Podpora B torej potiska paličje navzgor in v levo (pravokotno na drsno ravnino), A pa navzgor in v desno.

(c) Palice 1, 2 in 3 (Ritterjev rez)

Konzolni krak (vozlišča $D, G, Q, (3, 4), H, J, K$) je s preostalim paličjem povezan *samo* s palicami 1 = CD , 2 = CG in 3 = EG . Rez torej loči krak; ravnotežje kraka (desni del) — sile v rezu delujejo na krak v smeri proti C oz. E :

$$\sum F_y : -\frac{S_2}{\sqrt{2}} - 2F_0 - F_0 = 0 \Rightarrow \boxed{S_2 = -3\sqrt{2}F_0 \approx -4,24F_0 \text{ (tlak)}}$$

Moment glede na $G = (2, 4)$ (izločimo S_2 in S_3 , ki gresta skozi G):

$$\sum M_G : -aS_1 - \underbrace{(1a)(2F_0)}_Q - \underbrace{(3a)(F_0)}_K = 0 \Rightarrow \boxed{S_1 = -5F_0 \text{ (tlak)}}$$

Moment glede na $D = (2, 3)$ (izločimo S_1 in S_2):

$$\sum M_D : aS_3 + \frac{aS_2}{\sqrt{2}} - (1a)(2F_0) - (3a)(F_0) = 0 \Rightarrow S_3 = 5F_0 - \frac{S_2}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{S_3 = +8F_0 \text{ (nateg)}}$$

Kontrola vodoravno: $-S_1 - S_3 - \frac{S_2}{\sqrt{2}} = 5F_0 - 8F_0 + 3F_0 = 0 \checkmark$ (zgornji pas je nategnjen, spodnji tlačjen — kot pri konzoli je tudi pričakovano).

Opomba (numerična kontrola). Celoten sistem 40 vozliščnih enačb sem rešil še numerično; matrika je nesingularna (rang 40), rezultat pa se ujema z zgornjim: $S_1 = -5F_0$, $S_2 = -3\sqrt{2}F_0$, $S_3 = 8F_0$, $S_4 = -\sqrt{2}F_0$, $S_5 = F_0$, $\mathbf{R}_A = F_0(3, 5)$, $\mathbf{R}_B = F_0(-3, 3)$. Med drugim so ničelne vse palice spodnjega kvadrata $(1, 0)(2, 0)(2, 1)(1, 1)$ razen diagonale $(2, 0)(1, 1)$, kjer je $-3\sqrt{2}F_0$.

Naloga 3 — deformacijske rozete

Merjene smeri (iz slike): $\mathbf{n}_a$ pod $\varphi_a = 0$, $\mathbf{n}_b$ pod $\varphi_b = +\pi/3$, $\mathbf{n}_c$ pod $\varphi_c = -\pi/3$ glede na os x .

(a) Deformacijski tenzor

Oсна deformacija v smeri $\mathbf{n}(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ je

$$\epsilon(\varphi) = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{n} = \epsilon_{xx} \cos^2 \varphi + 2\epsilon_{xy} \sin \varphi \cos \varphi + \epsilon_{yy} \sin^2 \varphi.$$

Tri meritve dajo

$$\epsilon_{xx} = 2\epsilon_0, \quad \frac{1}{4}\epsilon_{xx} + \frac{3}{4}\epsilon_{yy} + \frac{\sqrt{3}}{2}\epsilon_{xy} = \frac{\epsilon_0}{4}, \quad \frac{1}{4}\epsilon_{xx} + \frac{3}{4}\epsilon_{yy} - \frac{\sqrt{3}}{2}\epsilon_{xy} = -\frac{3\epsilon_0}{4}.$$

Vsota zadnjih dveh: $\frac{1}{2}\epsilon_{xx} + \frac{3}{2}\epsilon_{yy} = -\frac{\epsilon_0}{2} \Rightarrow \epsilon_{yy} = -\epsilon_0$. Razlika: $\sqrt{3}\epsilon_{xy} = \epsilon_0 \Rightarrow \epsilon_{xy} = \epsilon_0/\sqrt{3}$. Ker je deformacija ravninska ($\epsilon_{zz} = \epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0$):

$$\boldsymbol{\epsilon} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_{xy} = 2\epsilon_{xy} = \frac{2\epsilon_0}{\sqrt{3}} \approx 1,155 \epsilon_0.$$

Kontrola: $\epsilon(60^\circ) = \frac{1}{2}\epsilon_0 - \frac{3}{4}\epsilon_0 + \frac{1}{2}\epsilon_0 = \frac{1}{4}\epsilon_0 \checkmark$, $\epsilon(-60^\circ) = \frac{1}{2}\epsilon_0 - \frac{3}{4}\epsilon_0 - \frac{1}{2}\epsilon_0 = -\frac{3}{4}\epsilon_0 \checkmark$. (Glavni vrednosti: $\epsilon_{1,2} = (\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{93}}{6})\epsilon_0 \approx 2,11\epsilon_0, -1,11\epsilon_0$.)

(b) Youngov modul in Poissonov količnik

Podano: $\sigma_{xx} = \sigma_0$, $\sigma_{yy} = 0$. Ker gre za *ravninsko deformacijo* ($\epsilon_{zz} = 0$), napetost σ_{zz} ni nič, temveč jo določi ravno ta pogoj:

$$\epsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{zz} = \nu\sigma_0.$$

Preostali dve enačbi Hookovega zakona:

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_0 - \nu(0 + \nu\sigma_0)] = \frac{\sigma_0(1 - \nu^2)}{E} = 2\epsilon_0, \quad \epsilon_{yy} = \frac{1}{E} [0 - \nu(\sigma_0 + \nu\sigma_0)] = -\frac{\nu(1 + \nu)\sigma_0}{E} = -\epsilon_0.$$

Razmerje odpravi E :

$$\frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_{xx}} = -\frac{\nu(1 + \nu)}{(1 - \nu)(1 + \nu)} = -\frac{\nu}{1 - \nu} = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nu = \frac{1}{3}}$$

$$E = \frac{\sigma_0(1 - \nu^2)}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma_0(1 - \frac{1}{9})}{2\epsilon_0} = \boxed{\frac{4\sigma_0}{9\epsilon_0} \approx 0,444 \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}}$$

$$\text{Sledi še } G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = \frac{\sigma_0}{6\epsilon_0}, \quad \sigma_{zz} = \frac{\sigma_0}{3} \text{ in } \sigma_{xy} = 2G\epsilon_{xy} = \frac{\sigma_0}{3\sqrt{3}}.$$

Opomba. Če bi namesto ravninske deformacije predpostavili ravninsko napetost ($\sigma_{zz} = 0$), bi dobili $\epsilon_{xx} = \sigma_0/E$, $\epsilon_{yy} = -\nu\sigma_0/E$, torej $\nu = 1/2$ in $E = \sigma_0/(2\epsilon_0)$. Vrednost $\nu = 1/2$ pomeni nestisljiv material (mejni primer), medtem ko je pri ravninski deformaciji $\nu = 1/3$ povsem običajna vrednost — to je še dodaten argument, da je mišljena prva (v besedilu izrecno navedena) predpostavka.

Naloga 4 — konzolni nosilec

Koordinata x teče od vpetja. Obremenitve: $3F_0$ pri $x = l/2$, $2F_0$ pri $x = 3l/4$, F_0 pri $x = l$ (vse navzdol).

Reakciji v vpetju.

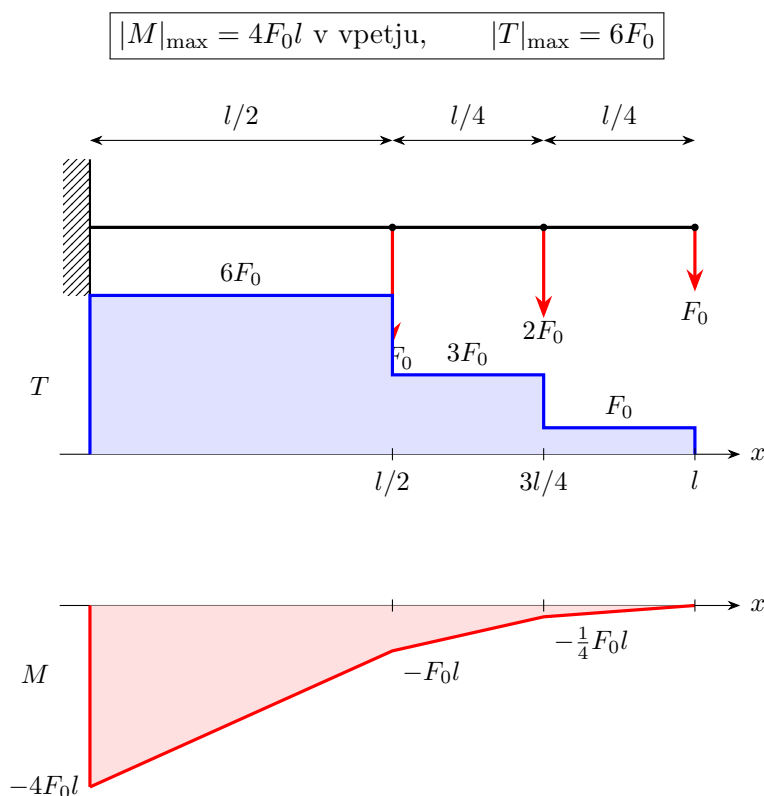
$$V = 3F_0 + 2F_0 + F_0 = 6F_0 \text{ (navzgor)}, \quad M_{vp} = 3F_0 \frac{l}{2} + 2F_0 \frac{3l}{4} + F_0 l = 4F_0 l.$$

(a) Prečna sila in upogibni moment

Uporabim dogovor $\frac{dT}{dx} = -q$, $\frac{dM}{dx} = T$ (prečna sila in moment kot rezultanti napetosti v prerezu; negativen M pomeni nateg zgoraj). Iz ravnotežja desnega dela nosilca:

$$T(x) = \begin{cases} 6F_0, & 0 < x < \frac{l}{2} \\ 3F_0, & \frac{l}{2} < x < \frac{3l}{4} \\ F_0, & \frac{3l}{4} < x < l \end{cases} \quad M(x) = \begin{cases} -4F_0 l + 6F_0 x, & 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ -\frac{5}{2}F_0 l + 3F_0 x, & \frac{l}{2} \leq x \leq \frac{3l}{4} \\ -F_0 l + F_0 x, & \frac{3l}{4} \leq x \leq l \end{cases}$$

Vrednosti: $M(0) = -4F_0 l$, $M(l/2) = -F_0 l$, $M(3l/4) = -\frac{1}{4}F_0 l$, $M(l) = 0$; moment je zvezen, prečna sila pa skoči za velikost sil.



(b) Ploskovni moment prereza

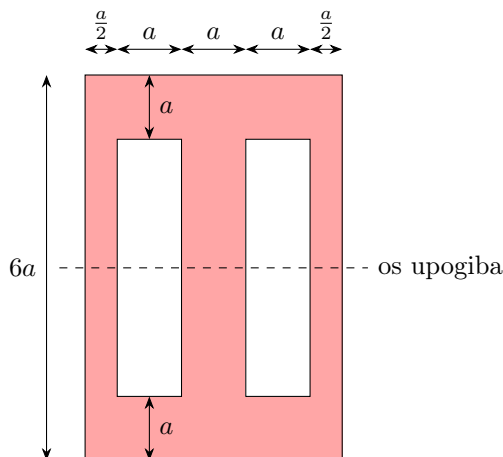
Prerez: polni pravokotnik $4a \times 6a$ (širine $\frac{a}{2} + a + a + a + \frac{a}{2} = 4a$), iz katerega sta izrezani dve luknji $a \times 4a$ (od zgoraj in spodaj po a roba). Prerez je simetričen glede na oba srednja preseka, zato je težišče v središču.

$$A = 4a \cdot 6a - 2(a \cdot 4a) = 24a^2 - 8a^2 = 16a^2.$$

Za upogib okrog vodoravne težiščne osi (y merim navzgor od težišča):

$$I = \frac{4a(6a)^3}{12} - 2 \cdot \frac{a(4a)^3}{12} = 72a^4 - \frac{32}{3}a^4 = \boxed{\frac{184}{3}a^4 \approx 61,33a^4}$$

Odpornostni moment: $W = \frac{I}{y_{\max}} = \frac{184a^4/3}{3a} = \frac{184}{9}a^3 \approx 20,44a^3$.



(c) Pogoji za F_0

Največja natezna napetost nastopi v vpetju, v *zgornjih* vlaknih ($M < 0$, hogging), pri $y_{\max} = 3a$:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W} = \frac{4F_0l}{\frac{184}{9}a^3} = \frac{9F_0l}{46a^3} < \sigma_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_0 < \frac{46\sigma_0a^3}{9l}}$$

Za $l = 1 \text{ m}$, $a = 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$, $\sigma_0 = 80 \text{ MPa}$ ($I = \frac{184}{3} \text{ cm}^4 = 61,33 \text{ cm}^4$, $W = \frac{184}{9} \text{ cm}^3 = 20,44 \text{ cm}^3$):

$$F_0 < \frac{46 \cdot 80 \cdot 10^6 \text{ Pa} \cdot 10^{-6} \text{ m}^3}{9 \cdot 1 \text{ m}} = \frac{3680}{9} \text{ N} \approx \boxed{409 \text{ N}}$$

(Enaka absolutna vrednost velja za tlačno napetost v spodnjih vlaknih, saj je prerez simetričen.)