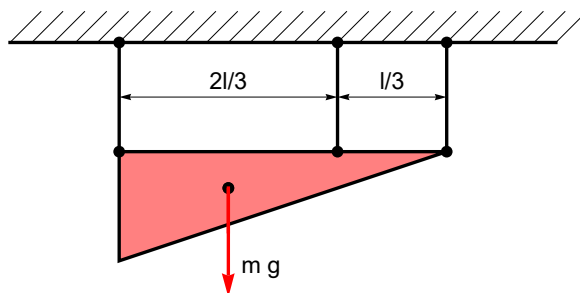


2. kolokvij iz Osnov mehanike 28. junij 2026

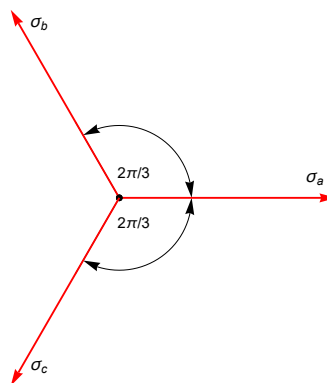
1. Homogena trikotna plošča s težo mg je obešena na tri elastične palice tako kot kaže skica. Palice imajo enak presek in Youngov modul E .

- (a) Zapiši ravnovesne enačbe.
(b) Izračunaj sile palic.



2. V smereh označenih na skici smo izmerili normalne napetosti $\sigma_a = \sigma_0$, $\sigma_b = 0$, $\sigma_c = -\sigma_0$.

- (a) Določi napetostni tenzor.
(b) Skiciraj Mohrovo krožnico.
(c) V kateri smeri je normalna napetost največja?



3. Normalni napetosti izotropičnega materiala z deformacijskim tenzorjem

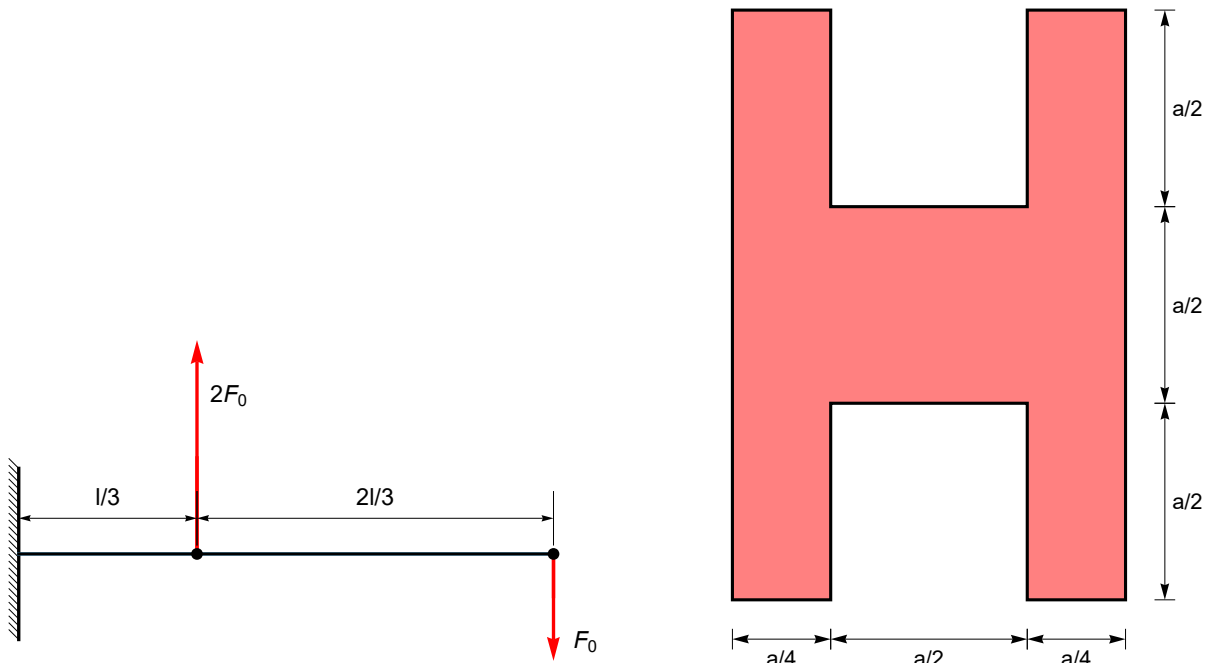
$$\underline{\underline{\epsilon}} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

sta v smeri $\vec{i}$ in $\vec{j}$ enaki σ_0 oziroma $-3\sigma_0$.

- Izračunaj Youngov modul in Poissonov količnik.
- Zapiši pripadajoči deformacijski tenzor.

4. Konzolno vpeti nosilec na sliki je obremenjen tako kot kaže skica.

- (a) Določi potek prečne sile in upogibnega momenta.
(b) Nosilec ima H presek, glej skico. Izračunaj njegov ploskovni moment.
(c) Določi pogoj na velikost sil F , da bo natezna napetost v nosilcu manjša od σ_0 .
Izračun naredi za konkretne vrednosti $l = 10 \text{ cm}$, $a = 2 \text{ cm}$, $\sigma_0 = 80 \text{ MPa}$.



Rešitve

Rešeno in napisano z AI Claude

Naloga 1: Homogena trikotna plošča na treh elastičnih palicah

Postavitev problema

Homogena trikotna plošča s težo mg je obešena na tri navpične elastične palice z enakim prerezom A in Youngovim modulom E . Palice so pritrjene pri koordinatah $x_1 = 0$, $x_2 = 2l/3$ in $x_3 = l$ (merimo vzdolž plošče). Težišče homogenega trikotnika leži pri $x_T = l/3$ od leve palice.

(a) Ravnovesne enačbe

Označimo sile v palicah z F_1 , F_2 , F_3 . Ravnovesje sil v navpični smeri:

$$F_1 + F_2 + F_3 = mg \quad (1)$$

Ravnovesje momentov okoli točke $x = 0$:

$$\frac{2l}{3} F_2 + l F_3 = \frac{l}{3} mg \quad (2)$$

Sistem je **enkrat statično nedoločen**, zato dodamo **združljivostni pogoj**.

(b) Sile palic

Ker so vse palice enake dolžine L , je pomik sorazmeren sili: $w_i = F_i L / (EA)$. Toga plošča se zasuka linearno, zato mora biti pri $x_2 = 2l/3$:

$$w_2 = w_1 + \frac{2}{3}(w_3 - w_1) \implies F_1 - 3F_2 + 2F_3 = 0 \quad (3)$$

Rešitev sistema (1)–(3):

Iz enačbe (2):

$$F_3 = \frac{mg}{3} - \frac{2}{3}F_2$$

Iz enačbe (3):

$$F_1 = 3F_2 - 2F_3 = 3F_2 - 2\left(\frac{mg}{3} - \frac{2}{3}F_2\right) = \frac{13}{3}F_2 - \frac{2mg}{3}$$

Vstavimo v enačbo (1):

$$\frac{13}{3}F_2 - \frac{2mg}{3} + F_2 + \frac{mg}{3} - \frac{2}{3}F_2 = mg \quad \Rightarrow \quad \frac{14}{3}F_2 = \frac{4mg}{3}$$

$$F_2 = \frac{2mg}{7}$$

$$F_3 = \frac{mg}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2mg}{7} = \frac{mg}{7}$$

$$F_1 = mg - \frac{2mg}{7} - \frac{mg}{7} = \frac{4mg}{7}$$

Preveritev:

- Vsota sil: $\frac{4mg}{7} + \frac{2mg}{7} + \frac{mg}{7} = mg \checkmark$
- Moment: $\frac{2mg}{7} \cdot \frac{2l}{3} + \frac{mg}{7} \cdot l = \frac{4mgl}{21} + \frac{3mgl}{21} = \frac{mgl}{3} \checkmark$
- Združljivost: $\frac{4mg}{7} - 3 \cdot \frac{2mg}{7} + 2 \cdot \frac{mg}{7} = 0 \checkmark$

Naloga 2: Napetostni tenzor iz merjenih normalnih napetosti

Postavitev problema

Izmerjene normalne napetosti v treh smereh, ki so med seboj za $2\pi/3 = 120$:

$$\sigma_a = \sigma_0 \ (\theta_a = 0), \quad \sigma_b = 0 \ (\theta_b = 120), \quad \sigma_c = -\sigma_0 \ (\theta_c = 240).$$

(a) Napetostni tenzor

Splošna formula za normalno napetost v smeri θ :

$$\sigma(\theta) = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\theta + \sigma_{xy} \sin 2\theta$$

Smer a ($\theta = 0$):

$$\sigma_{xx} = \sigma_0 \tag{I}$$

Smer b ($\theta = 120$):

$$0 = \frac{\sigma_0 + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_0 - \sigma_{yy}}{2} \cos 240 + \sigma_{xy} \sin 240$$

$$0 = \frac{\sigma_0 + \sigma_{yy}}{2} - \frac{\sigma_0 - \sigma_{yy}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{xy} \implies \sigma_0 + 3\sigma_{yy} = 2\sqrt{3} \sigma_{xy} \tag{II}$$

Smer c ($\theta = 240$):

$$-\sigma_0 = \frac{\sigma_0 + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_0 - \sigma_{yy}}{2} \cos 480 + \sigma_{xy} \sin 480$$

$$\cos 480 = \cos 120 = -\frac{1}{2}, \quad \sin 480 = \sin 120 = \frac{\sqrt{3}}{2}:$$

$$-\sigma_0 = \frac{\sigma_0 + \sigma_{yy}}{2} - \frac{\sigma_0 - \sigma_{yy}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{xy} \implies \sigma_0 + 3\sigma_{yy} = -2\sigma_0 - 2\sqrt{3} \sigma_{xy} \tag{III}$$

Seštejemo (II) in (III):

$$2(\sigma_0 + 3\sigma_{yy}) = -2\sigma_0 \implies \boxed{\sigma_{yy} = -\sigma_0}$$

Odštejemo (II) od (III):

$$-2\sigma_0 = -4\sqrt{3} \sigma_{xy} \implies \boxed{\sigma_{xy} = -\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}}$$

Napetostni tenzor:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_0 \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Mohrova krožnica

Center in polmer Mohrove krožnice:

$$C = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} = \frac{\sigma_0 - \sigma_0}{2} = 0$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2} = \sqrt{\sigma_0^2 + \frac{\sigma_0^2}{3}} = \sigma_0 \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}}$$

Mohrova krožnica ima **center v koordinatnem izhodišču** in polmer $R = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \approx 1,155 \sigma_0$.

(c) Smer največje normalne napetosti

$$\sigma_{\max} = C + R = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}}$$

Kot glavne smeri:

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} = \frac{-\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}}}{2\sigma_0} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad 2\theta_p = -30$$

$$\boxed{\theta_p = -15 \text{ od smeri } \vec{a}}$$

V tej smeri je normalna napetost največja in enaka $\sigma_{\max} = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}}$.

Naloga 3: Youngov modul in Poissonov količnik (3D)

Postavitev problema

Deformacijski tenzor izotropičnega materiala:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Normalni napetosti v smereh $\vec{i}$ in $\vec{j}$: $\sigma_{xx} = \sigma_0$, $\sigma_{yy} = -3\sigma_0$.

Youngov modul in Poissonov količnik

Hookov zakon za izotropni material v 3D:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \quad (\text{I})$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] \quad (\text{II})$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \quad (\text{III})$$

Iz enačbe (III) izrazimo σ_{zz} :

$$E\varepsilon_{zz} = \sigma_{zz} - \nu(\sigma_0 - 3\sigma_0) = \sigma_{zz} + 2\nu\sigma_0 \implies \sigma_{zz} = -\frac{E\varepsilon_0}{2} - 2\nu\sigma_0 \quad (\text{III}')$$

Vstavimo (III') v enačbo (I):

$$\begin{aligned} E\varepsilon_0 &= \sigma_0 + 3\nu\sigma_0 - \nu\sigma_{zz} = \sigma_0(1 + 3\nu) + \nu\left(\frac{E\varepsilon_0}{2} + 2\nu\sigma_0\right) \\ E\varepsilon_0\left(1 - \frac{\nu}{2}\right) &= \sigma_0(1 + 3\nu + 2\nu^2) = \sigma_0(1 + \nu)(1 + 2\nu) \end{aligned} \quad (\text{I}')$$

Vstavimo (III') v enačbo (II):

$$\begin{aligned} -2E\varepsilon_0 &= -3\sigma_0 - \nu\sigma_0 + \nu\left(\frac{E\varepsilon_0}{2} + 2\nu\sigma_0\right) \\ -E\varepsilon_0\left(2 + \frac{\nu}{2}\right) &= -\sigma_0(3 + \nu - 2\nu^2) = -\sigma_0(1 + \nu)(3 - 2\nu) \end{aligned} \quad (\text{II}')$$

Delimo (II') z (I'):

$$\begin{aligned} \frac{2 + \nu/2}{1 - \nu/2} &= \frac{(1 + \nu)(3 - 2\nu)}{(1 + \nu)(1 + 2\nu)} = \frac{3 - 2\nu}{1 + 2\nu} \\ (2 + \frac{\nu}{2})(1 + 2\nu) &= (3 - 2\nu)(1 - \frac{\nu}{2}) \\ 2 + 4\nu + \frac{\nu}{2} + \nu^2 &= 3 - \frac{3\nu}{2} - 2\nu + \nu^2 \\ 2 + \frac{9\nu}{2} &= 3 - \frac{7\nu}{2} \implies 8\nu = 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\nu = \frac{1}{8} = 0,125}$$

Iz enačbe (I'):

$$E = \frac{\sigma_0(1+\nu)(1+2\nu)}{\varepsilon_0(1-\nu/2)} = \frac{\sigma_0 \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{5}{4}}{\varepsilon_0 \cdot \frac{15}{16}} = \frac{\sigma_0 \cdot \frac{45}{32}}{\varepsilon_0 \cdot \frac{15}{16}} = \frac{45}{32} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{3\sigma_0}{2\varepsilon_0}$$

Napetostni tenzor

σ_{zz} iz (III'):

$$\sigma_{zz} = -\frac{E\varepsilon_0}{2} - 2\nu\sigma_0 = -\frac{3\sigma_0}{4} - \frac{\sigma_0}{4} = -\sigma_0$$

Strižni modul:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{\frac{3\sigma_0}{2\varepsilon_0}}{2 \cdot \frac{9}{8}} = \frac{3\sigma_0}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2\sigma_0}{3\varepsilon_0}$$

Strižna napetost:

$$\sigma_{xy} = 2G\varepsilon_{xy} = 2 \cdot \frac{2\sigma_0}{3\varepsilon_0} \cdot \frac{3\varepsilon_0}{2} = 2\sigma_0$$

Napetostni tenzor:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 2\sigma_0 & 0 \\ 2\sigma_0 & -3\sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix}$$

Naloga 4: Konzolno vpeti nosilec z H-prerezom

Postavitev problema

Konzolno vpeti nosilec dolžine l : sila $2F_0$ navzgor pri $x = l/3$, sila F_0 navzdol pri $x = l$.

(a) Prečna sila in upogibni moment

Reakciji v vpetju (ravnovesje):

$$R_y = 2F_0 - F_0 = F_0 \uparrow$$

$$M_R = 2F_0 \cdot \frac{l}{3} - F_0 \cdot l = -\frac{F_0 l}{3} \quad (\text{vpetostni moment } \frac{F_0 l}{3} \text{ v smeri urinega kazalca})$$

Prečna sila:

$$T(x) = \begin{cases} F_0 & 0 < x < \frac{l}{3} \\ -F_0 & \frac{l}{3} < x < l \end{cases}$$

Upogibni moment (z integriranjem prečne sile, upoštevamo vpetostni moment):

$$M(x) = \begin{cases} F_0 \left(x - \frac{l}{3} \right) & 0 \leq x \leq \frac{l}{3} \\ F_0(l - x) & \frac{l}{3} \leq x \leq l \end{cases}$$

Vrednosti:

- $M(0) = -F_0 l/3$ (vpetostni moment)
- $M(l/3^-) = 0$
- $M(l/3^+) = F_0(l - l/3) = 2F_0 l/3 \quad \leftarrow \text{maksimum}$
- $M(l) = 0$ (prosti konec) ✓

(b) Ploskovni moment H-prereza

H-prerez sestoji iz pravokotnika $a \times \frac{3a}{2}$ z odšteto dvema odprtinama $\frac{a}{2} \times \frac{a}{2}$.

Nevtralna os leži na sredini prereza pri $y = 0$ (prerez je simetričen).

Ploskovni moment celega pravokotnika:

$$I_{\text{rect}} = \frac{a \cdot \left(\frac{3a}{2}\right)^3}{12} = \frac{a \cdot \frac{27a^3}{8}}{12} = \frac{9a^4}{32}$$

Zamik središč odprtín od nevtralne osi:

Odprtini ležita v zgornji in spodnji polovici prereza. Vsaka ima višino $a/2$ in njena sredina je pri razdalji:

$$d = \frac{1}{2} \left(\frac{3a}{2} - \frac{a}{2} \right) \cdot \frac{1}{2}$$

Natančneje: nevtralna os je pri $3a/4$ od spodnjega roba. Spodnja odprtina sega od 0 do $a/2$, njena sredina je pri $a/4$, torej je zamik:

$$d = \frac{3a}{4} - \frac{a}{4} = \frac{a}{2}$$

Zgornja odprtina ima enako zamaknjeno središče (simetrija).

Izrek o paralelnih oseh za vsako odprtino:

$$I_{\text{votlina}} = I_0 + A_v d^2 = \frac{\frac{a}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3}{12} + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^4}{192} + \frac{a^4}{16} = \frac{a^4 + 12a^4}{192} = \frac{13a^4}{192}$$

Skupni ploskovni moment H-prereza:

$$I_H = I_{\text{rect}} - 2 I_{\text{votlina}} = \frac{9a^4}{32} - 2 \cdot \frac{13a^4}{192} = \frac{9a^4}{32} - \frac{13a^4}{96} = a^4 \left(\frac{27}{96} - \frac{13}{96} \right)$$

$$I_H = \frac{14a^4}{96} = \frac{7a^4}{48}$$

(c) Pogoj na velikost sil F_0

Maksimalni upogibni moment $M_{\text{max}} = \frac{2F_0 l}{3}$ nastopi pri $x = l/3^+$.

Maksimalna razdalja od nevtralne osi: $y_{\text{max}} = \frac{3a}{4}$.

Upogibna napetost:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{max}} \cdot y_{\text{max}}}{I_H} = \frac{\frac{2F_0 l}{3} \cdot \frac{3a}{4}}{\frac{7a^4}{48}} = \frac{F_0 l a}{\frac{7a^4}{48}} = \frac{F_0 l a}{2} \cdot \frac{48}{7a^4} = \frac{24 F_0 l}{7 a^3} \leq \sigma_0$$

$$F_0 \leq \frac{7 a^3 \sigma_0}{24 l}$$

Numerično ($l = 0,1 \text{ m}$, $a = 0,02 \text{ m}$, $\sigma_0 = 80 \text{ MPa}$):

$$F_0 \leq \frac{7 \cdot (0,02)^3 \cdot 80 \times 10^6}{24 \cdot 0,1} = \frac{7 \cdot 8 \times 10^{-6} \cdot 8 \times 10^7}{2,4} = \frac{7 \cdot 640}{2,4} = \frac{4480}{2,4}$$

$$F_0 \leq 1867 \text{ N} \approx 1,87 \text{ kN}$$