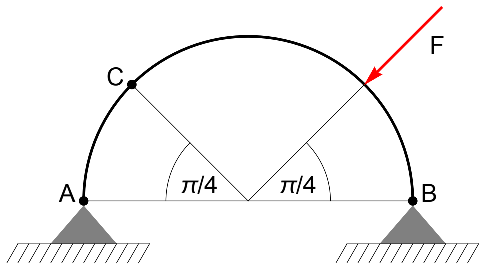
1. Izpit iz Osnov mehanike: 16. junij 2016

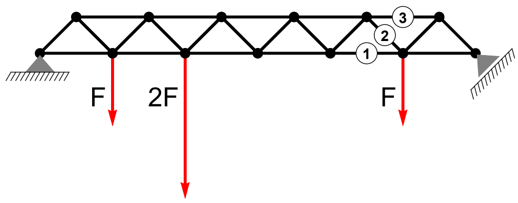
1. Tročleni lok s polmerom $R = 1\,\mathrm{m}$ sestavljen iz lokov AC in CB je obremenjen tako kot kaže skica. Določi sile podpor. Velikost sile F je $4\,\mathrm{kN}$.



2. Paličje na sliki je sestavljeno iz enakokrakih trikotnikov z notranjim kotom $\pi/4$. Desna podpora je drsna pod kotom $\pi/4$.

   (a) Izračunaj sile v podporah;

   (b) Določi sile označenih palic $1, 2, 3$.



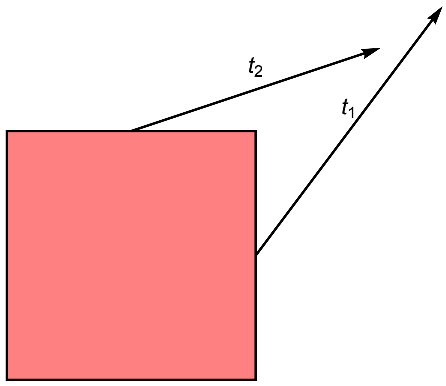
3. Kvadrat na sliki ima na stranicah napetosti $\vec{t}_2 = \left(\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j}\right) 100\,\mathrm{MPa}$ in $\vec{t}_1$, ki ima velikost $125\,\mathrm{MPa}$.

   (a) Dopolni sliko z vektorjema napetosti na preostalih dveh stranicah.

   (b) Določi $\vec{t}_1$ in pripadajoči napetostni tenzor.

   (c) Skiciraj Mohrovo krožnico.

   (d) Določi normalno in strižno napetost na diagonali kvadrata.

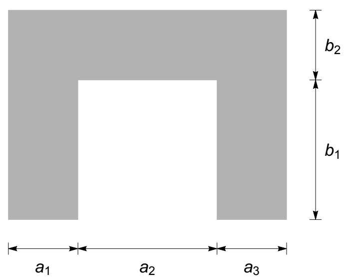


4. Enostavno podprt U nosilec dolžine $l = 1\mathrm{m}$ je linijsko obremenjen s konstantno obremenitvijo q_0. Dimenzija preseka so, glej skico, $a_1 = 1\,\mathrm{cm}$, $a_2 = 2\,\mathrm{cm}$, $a_3 = 1\,\mathrm{cm}$, $b_1 = 2\,\mathrm{cm}$ in $b_2 = 1\,\mathrm{cm}$.

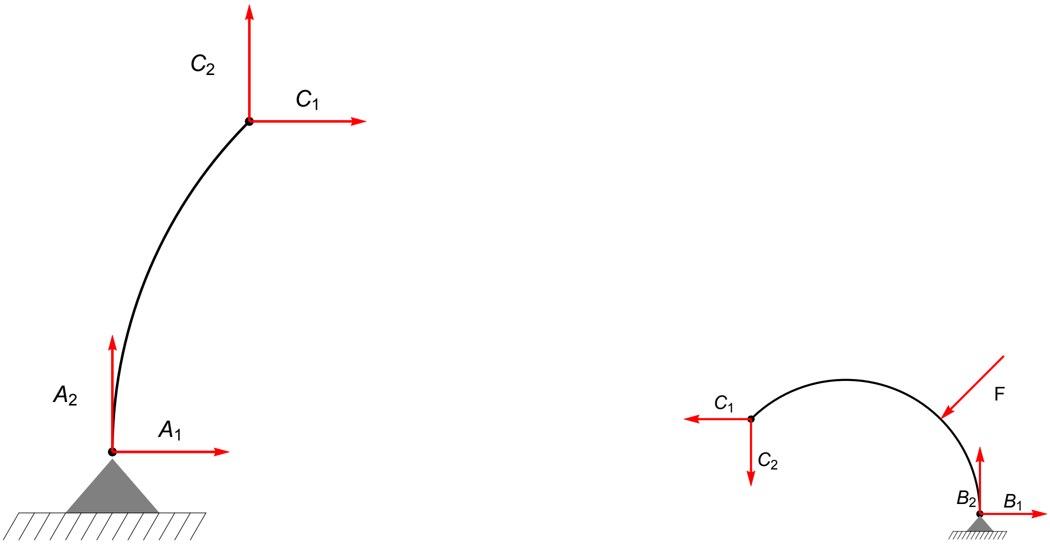
   (a) Skiciraj potek prečne sile in upogibnega momenta.

   (b) Določi središče preseka in njegov ploskovni moment I.

   (c) Določi dopustno obremenitev q_0 tako, da natezna napetost ne bo presegla vrednosti $\sigma_0 = 180\,\mathrm{MPa}$.



Rešitve

1. 

Slika 1: Sile na levi in desni lok.

Lok razdelimo na dva loka, glej skico. Za vsak lok veljajo ravnotežne enačbe. Za levi imamo

$$\begin{aligned} 0 &= A_1 + C_1 \\ 0 &= A_2 + C_2 \\ 0 &= R(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})C_2 - R\frac{1}{\sqrt{2}}C_1. \end{aligned}$$

Namesto ravnotežnih enačb za desni lok raje zapišimo ravnovesne enačbe za tročleni lok

$$\begin{aligned} 0 &= A_1 + B_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}F \\ 0 &= A_2 + B_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}F \\ 0 &= -RA_2 + RB_2. \end{aligned}$$

Tu smo uporabili momentno enačbo v središču loka. Sistem rešimo in dobimo

$$\begin{aligned} A_1 &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) F = \left(2 - \sqrt{2}\right) \mathrm{kN} \doteq 0.59\,\mathrm{kN} \\ A_2 &= \frac{F}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}\mathrm{kN} \doteq 1.41\,\mathrm{kN} \\ B_1 &= \left(-\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{4}\right) F = \left(-2 + 3\sqrt{2}\right) \mathrm{kN} \doteq 2.24\,\mathrm{kN} \\ B_2 &= \frac{F}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}\mathrm{kN} \doteq 1.41\,\mathrm{kN} \end{aligned}$$

2. (a) Dolžina stranice trikotnika naj bo a. Označimo silo leve podpore z $\vec{A}$, desne z $\vec{B}$. Ker je desna podpora drsna v smeri $\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j})$ je

$$\vec{B} = B\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\vec{i}+\vec{j}\right).$$

Iz ravnovesja sil v vodoravni smeri sledi $A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}B$. Ravnovesna enačba v navpični smeri je $A_2 - 4F + \frac{1}{\sqrt{2}}B = 0$, momentna enačba s polom v desni podpori pa

$$0 = -6aA_2 + 5aF + 4a \times 2F + aF \Longrightarrow A_2 = \frac{7}{3}F.$$

Potem $B = \frac{5}{3}\sqrt{2}F$ in $A_1 = \frac{5}{3}F$. Sila desne podpore je tako

$$\vec{B} = \frac{5}{3}\left(-\vec{i}+\vec{j}\right)F.$$

(b) Sile označenih palic določimo s prerezno metodo. Upoštevali bomo ravnovesne enačbe za desni del paličja. Iz momentne enačbe s polom v presečišču prve in druge palice sledi

$$\frac{1}{2}aF_3 + aB_2 = 0 \Longrightarrow F_3 = -2B_2 = -\frac{10}{3}F.$$

Iz momentne enačbe s polom v presečišču druge in tretje palice sledi

$$-\frac{1}{2}aF_1 - \frac{1}{2}aF + \frac{1}{2}aB_1 + \frac{3}{2}aB_2 = 0 \Longrightarrow F_1 = \frac{7}{3}F.$$

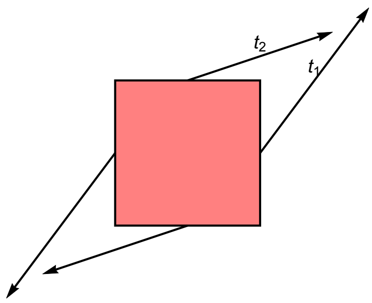
Silo druge palice določimo z upoštevanjem ravnovesne enačbe v vodoravni smeri. Imamo

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}F_2 - F_1 - F_3 + B_1 = 0 \Longrightarrow F_2 = -\frac{2}{3}\sqrt{2}F.$$

Za kontrolo

$$\frac{1}{\sqrt{2}}F_2 - F + B_2 = 0.$$

3. (a) Dopolnjena slika je

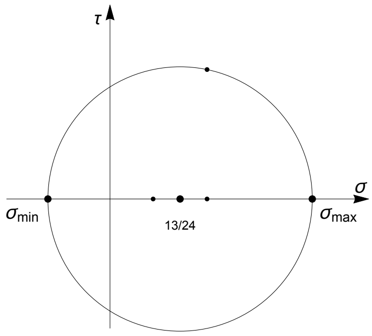


(b) Ker je $\vec{t}_2 = \left(\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j}\right)100\,\mathrm{MPa}$, je tenzor napetosti oblike

$$\underline{\underline{t}} = \begin{bmatrix} t_{11} & 1 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} 100\,\mathrm{MPa}.$$

Neznano komponento t_{11} dobimo iz pogoja, da je $|\underline{\underline{t}}\,\vec{i}| = 125\,\mathrm{MPa}$. Potem $\sqrt{t_{11}^2+1}\,100\,\mathrm{MPa} = 125\,\mathrm{MPa}$ in tako $t_{11} = \frac{3}{4}$. Potemtakem

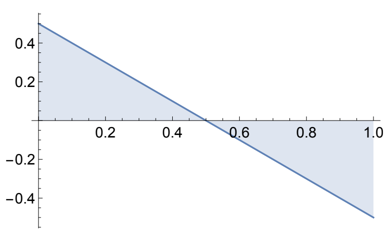
$$\underline{\underline{t}} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 1 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} 100\,\mathrm{MPa}.$$

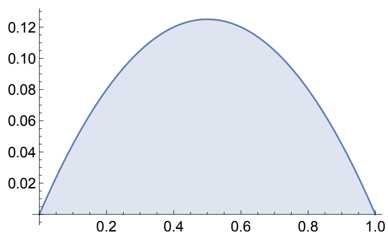


(c) Skica Mohrove krožnice je

(d) Na diagonali z normalo $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$ je vektor napetosti enak $\vec{t} = \underline{\underline{t}}\,\vec{n} = (\frac{7}{4\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\vec{j})100\,\mathrm{MPa}$. Normalna napetost je $t_n = \vec{t} \cdot \vec{n} = \frac{37}{24}100\,\mathrm{MPa}$. Strižna napetost pa $t_s = \sqrt{|\vec{t}|^2 - t_n^2} = \frac{5}{24}100\,\mathrm{MPa}$.

4. (a) Prvo izračunamo sile podpor, levo označimo z A, desno z B. Iz simetrije problema sledi $A = B$. Vsota vseh sil je $q_0 l$, potem $A = B = \frac{1}{2}q_0 l$. Potek prečne sile in upogibnega momenta je dan na sliki. Maksimalni upogibni moment je $M_{\max} = \frac{l}{8}q_0 l^2$.

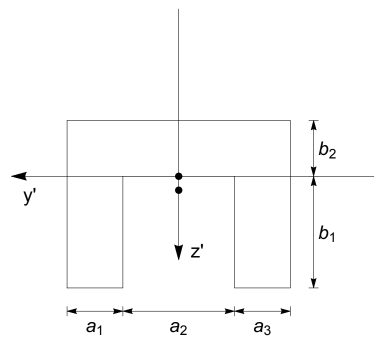




Slika 2: Brezdimenzijski potek prečne sile in upogibnega momenta ($l = 1, q_0 = 1$).

(b) Presek je sestavljen iz treh pravokotnikov, A_1 pravokotnik $a_1 \times b_1$, A_2 pravokotnik $a_3 \times b_1$ in A_3 pravokotnik $(a_1 + a_2 + a_3) \times b_2$. Postavimo pomožni koordiantni sistem $y'z'$ tako kot kaže skica. Očitno je središče na osi z'. Koordinato z'_* določimo po formuli

$$z'_* = \frac{1}{A_1 + A_2 + A_3}\left(A_1 z'_{1*} + A_2 z'_{2*} + A_3 z'_{3*}\right).$$



Izračunamo posebej $A_1 = a_1 \times b_1 = 2\,\mathrm{cm}^2$, $A_2 = a_3 \times b_1 = 2\,\mathrm{cm}^2$, $A_3 = (a_1 + a_2 + a_3) \times b_2 = 4\,\mathrm{cm}^2$ in $z'_{1*} = 1\,\mathrm{cm}$, $z'_{2*} = 1\,\mathrm{cm}$ in $z'_{3*} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{cm}$. Potem

$$z'_* = \frac{1}{8}(2 \times 1 + 2 \times 1 - 4 \times \frac{1}{2})\,\mathrm{cm} = \frac{1}{4}\,\mathrm{cm}.$$

V koordinatnem sistemu yz, ki ima izhodišče v središčni točki preseka imajo pomožni pravokotniki z koordinato središč $z_{1*} = \frac{3}{4}\,\mathrm{cm}$, $z_{2*} = \frac{3}{4}\,\mathrm{cm}$ in $z_{3*} = -\frac{3}{4}\,\mathrm{cm}$. Ploskovni moment preseka je potem

$$I = z_{1*}^2 A_1 + \frac{1}{12} a_1 b_1^3 + z_{2*}^2 A_2 + \frac{1}{12} a_3 b_1^3 + z_{3*}^2 A_3 + \frac{1}{12}(a_1 + a_2 + a_3) b_2^3.$$

Vstavimo podatke in dobimo $I = \frac{37}{6}\,\mathrm{cm}^4$.

(c) Maksimalnemu upogibnemu momentu pripada maksimalna osna napetost $\sigma_{\max}$. Veljati mora

$$\sigma_0 \geq \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I} z_{\max},$$

kjer je $z_{\max}$ koordinata na vrhu nosilca, kjer je natezna napetost največja. Po predhodnen izračunu je $z_{\max} = \frac{5}{4}, \mathrm{cm}$. Tako dobimo

$$q_0 \leq \frac{8 I \sigma_0}{l^2 z_{\max}} = 71\,\mathrm{N/m}.$$