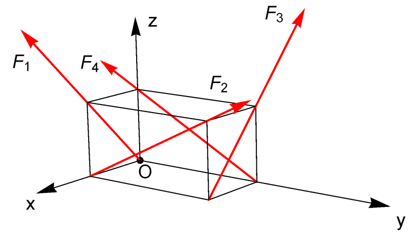
3. Izpit iz Osnov mehanike 31. avgusta 2016

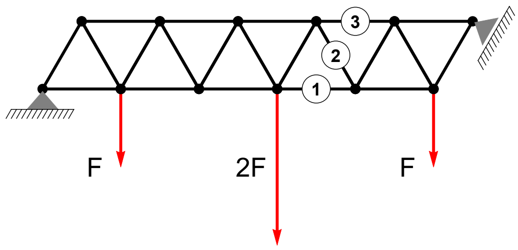
1. Podan je prostorski sistem sil, glej skico. Sile so v smereh diagonal stranskih ploskev kvadra dimenzije 1m $\times$2m $\times$1m. Vse sile so po velikosti enaka $F_0 = 5\,\mathrm{kN}$.



   (a) Določi sile in njihovo rezultanto.

   (b) Izračunaj navor glede na pol s koordinatami $(\frac{1}{2}, 1, 0)$.

2. Za paličje na sliki, desna podpora je drsna pod kotom $\pi/3$ izračunaj:



   (a) sile v podporah;

   (b) sile označenih palic $1, 2, 3$.

3. Med dvema vzporednima togima stenama v medsebojni razdalji $a = 20\,\mathrm{cm}$ je vstavljen elastični kvader dimenzij $a \times b \times b$, kjer je $b = 5\,\mathrm{cm}$, z materialnimi lastnostmi $E = 210\,\mathrm{GPa}$, $\nu = 1/3$ in $\alpha = 12 \times 10^{-6}/\mathrm{C}^\circ$. Kvader segrejemo za $\Delta T = 50\mathrm{C}^\circ$.

   (a) Izračunaj pripadajočo napetostno stanje.

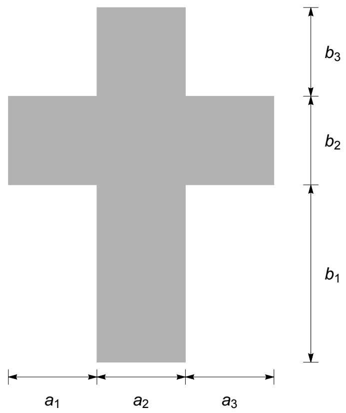
   (b) Določi deformacijo kvadra. Kakšne so njegove deformirane dimenzije?

4. Enostavno podprt nosilec s presekom v obliki križa dolžine $l = 1\mathrm{m}$ je točkovno obremenjen v navpični smeri pri $x_1 = \frac{1}{2}l$ in $x_2 = \frac{3}{4}l$ s silama $F_1 = F_0$ in $F_2 = 2F_0$. Dimenzija preseka so, glej skico $a_1 = a_2 = a_3 = 1\,\mathrm{cm}$, $b_1 = 2\,\mathrm{cm}$, $b_2 = b_3 = 1\,\mathrm{cm}$.

   (a) Skiciraj potek prečne sile in upogibnega momenta. Kolikšna je maksimalna vrednost upogibnega momenta?

   (b) Določi središče preseka in njegov ploskovni moment I.

   (c) Določi dopustno obremenitev F_0 tako, da bo maksimalna napetost manjša od $\sigma_{\max} = 120\,\mathrm{MPa}$.



Rešitve

1. (a) Iz slike hitro vidimo, da so sile enake:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 &= \frac{F_0}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{k}),\\
\vec{F}_2 &= \frac{F_0}{\sqrt{5}}(2\vec{j}+\vec{k}),\\
\vec{F}_3 &= \frac{F_0}{\sqrt{2}}(-\vec{i}+\vec{k}),\\
\vec{F}_4 &= \frac{F_0}{\sqrt{5}}(-2\vec{j}+\vec{k}).
\end{aligned}$$

Potem je

$$\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+\vec{F}_4 = F_0\left(\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

Torej $F \approx 11.54\,\mathrm{kN}$ v smeri $\vec{k}$.

(b) Koordinate prijemališč sil so

$$P_1=(0,0,0), P_2=(1,0,0), P_3=(1,2,0), P_4=(0,2,0).$$

Glede na pol $P_0=(\frac{1}{2},1,0)$ so potem ročice sil

$$\begin{aligned}
\vec{r}_1 &= (-\frac{1}{2}\vec{i}-\vec{j}),\\
\vec{r}_2 &= (\frac{1}{2}\vec{i}-\vec{j}),\\
\vec{r}_3 &= (\frac{1}{2}\vec{i}+\vec{j}),\\
\vec{r}_4 &= (-\frac{1}{2}\vec{i}+\vec{j}).
\end{aligned}$$

Rezultanta navora sistema sil glede na pol P_0 je potem

$$\vec{N} = \sum_{i=1}^{4}\vec{r}_i\times\vec{F}_i = \left(5\sqrt{2}+2\sqrt{5}\right)\mathrm{kNm}.$$

2. (a) Označimo z a dolžino stranice enakostraničnega trikotnika iz katerih je sestavljeno paličje. Postavimo koordinatni sistem z izhodiščem v levi podpori A. Potem sta koordinati desne podpore

$$B=\left(\frac{11}{2}a,\frac{\sqrt{3}}{2}a\right),$$

sila podpore v B pa je

$$\vec{B}=B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}\right).$$

Tu je B velikost sile v podpori. Pripadajoči moment glede na A je potem

$$aB\left(\frac{11}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right)\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}\right)=\frac{7}{2}aB\vec{k}.$$

Momentna enačba s polom v A se tako glasi

$$-a \times F - 3a \times 2F - 5a \times F + \frac{7}{2}a \times B = 0.$$

Tako dobimo $B = \frac{24}{7}F$. Sila podpore v A je $\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j}$. Iz ravnovesja sil v smeri x sledi $A_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}B = 0$. Torej $A_1 = \frac{12\sqrt{3}}{7}F$. Momentna s polom v podpori B se glasi

$$\frac{a}{2}\left(F + 10F + 9F - 11A_2 + \sqrt{3}A_1\right) = 0.$$

Vstavimo A_1 in dobimo

$$A_2 = \frac{16}{7}F.$$

(b) Sile označenih palic dobimo s prerezno metodo. V ta namen prvo zapišimo že izračunano silo podpore B. Torej

$$\vec{B} = (-\sqrt{3}\vec{i} + \vec{j})\frac{12}{7}F.$$

Presek prve in druge palice označimo s C, druge in tretje z D. Momentna enačba s polom v C se glasi

$$\frac{\sqrt{3}}{2}F_3 - F + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{12\sqrt{3}}{7} + \frac{3}{2} \times \frac{12}{7}F = 0.$$

Od tod sledi $F_3 = -\frac{58}{7\sqrt{3}}F$. Momentna enačba s polom v D je

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \times F - 1 - \frac{3}{2} \times F + 2 \times \frac{12}{7} = 0.$$

Potem $F_1 = \frac{9\sqrt{3}}{7}F$. Iz ravnovesja sil vertikalni smeri potem sledi še $F_2 = -\frac{10}{7\sqrt{3}}F$.

3. (a) Izhodišče je enačba termoelastičnosti izotropičnega materiala

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{t}} - \frac{\nu}{E}\mathrm{Sl}\,(\underline{\underline{t}})\,\underline{\underline{I}} + \alpha\Delta T\,\underline{\underline{I}}.$$

Postavimo koordinatni sistem z osjo x v smeri pravokotnice na steno. Ker sta ploskvi kvadra v smereh osi y in z prosti, je $t_{22} = t_{33} = 0$. Potemtakem je napetostno stanje enoosno v smeri osi x. Nadalje v smeri x ni deformacije, torej $e_{11} = 0$. Tako iz enačbe termoelastičnosti dobimo

$$0 = \frac{1+\nu}{E}t_{11} - \frac{\nu}{E}t_{11} + \alpha\Delta T$$

in od tod

$$t_{11} = \alpha\Delta T E = 126\,\mathrm{MPa}.$$

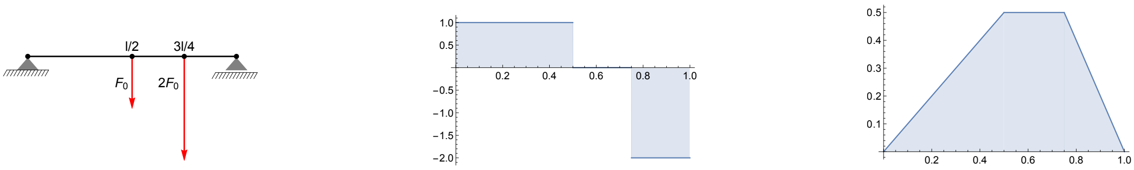
Vse ostale komponente napetostnega tenzorja pa so enake nič.

(b) Za deformacijo dobimo

$$e_{22} = \alpha\Delta T(1+\nu) = 8 \times 10^{-2}.$$

Očitno je $e_{33} = e_{22}$ Kvader se deformira v kvader z dimenzijami v centimetrih $20 \times 5.4 \times 5.4$.

4. (a) Skica obremenitve s potekom prečne sile in upogibnega momenta je podana na spodnji sliki. Za potek prečne sile, ki je odsekoma konstantna prvo izračunamo sile podpor. Imamo enačbi ravnovesja momentov v podporah. Torej $\frac{l}{4} \times 2F_0 + \frac{l}{2} \times F_0 = lA$ in $\frac{l}{2}F_0 + \frac{3l}{4} \times 2F_0 = lB$. Tako dobimo $A = F_0$ in $B = 2F_0$. Za potek momenta M upoštevamo, da je $\frac{dM}{dx} = Q$. Od tod sledi, da je maksimalen upogibni moment enak $M_{\max} = \frac{l}{2}F_0$.



Slika 1: Točkovno obremenjen nosilec s potekom prečne sile in upogibnega momenta.

(b) Križ je sestavljen iz treh pravokotnikov, pokončnega dimenzije $a_2 \times (b_1 + b_2 + b_3)$ in dveh krakov dimenzije $a_1 \times b_2$ oziroma $a_3 \times b_2$. Postavimo koordinatni sistem v središče preseka krakov in pokončnega dela. Očitno $x_* = 0$, za y_* pa velja formula

$$y_* = \frac{1}{A_1 + A_2 + A_3} \left(A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3 \right),$$

kjer je $A_1 = 4\,\mathrm{cm}^2$ površina pokončnega dela, $A_2 = A_3 = 1\,\mathrm{cm}^2$ pa površini krakov. Nadalje $y_1 = -\frac{1}{2}\mathrm{cm}$ in $y_2 = y_3 = 0$. Tako dobimo $y_* = -\frac{1}{3}\mathrm{cm}$. Ploskovni moment dobimo po formuli

$$I = \frac{1}{12} a_2 (b_1 + b_2 + b_3)^3 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)^2 \mathrm{cm}^2 A_1 + 2 \left(\frac{1}{12} a_1 b_2^3 + \left(\frac{1}{3}\mathrm{cm} \right)^2 A_2 \right).$$

Tu smo upoštevali simetrijo levega in desnega kraka. Tako dobimo

$$I = \frac{35}{6}\mathrm{cm}^4.$$

(c) Vsavimo dobljeno v formulo $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} z_{\max}}{I}$, kjer je $z_{\max}$ maksimalna oddaljenost od centralne osi do roba preseka nosilca v smeri obremenitve, torej $z_{\max} = (2 + \frac{1}{3})\mathrm{cm} = \frac{7}{3}\mathrm{cm}$. Vstavimo izračunane vrednosti v formulo. Tako dobimo

$$120\,\mathrm{MPa} = \frac{F_0}{2}\mathrm{m} \times \frac{6}{35} \times 10^8 \mathrm{m}^{-4} \times \frac{7}{3} 10^{-2}\mathrm{m}.$$

Tako dobimo $F_0 \leq 600\,\mathrm{N}$.