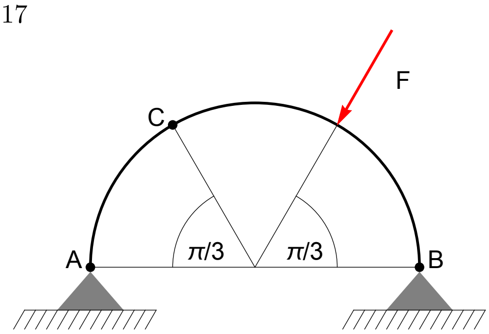
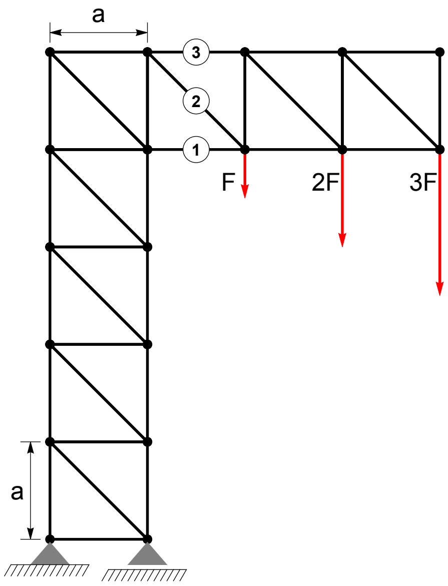
4. izpit iz Osnov mehanike

8. marec 2017

1. Tročleni lok s polmerom $R = 1\,\mathrm{m}$ sestavljen iz lokov AC in CB je obremenjen tako kot kaže skica. Določi sile podpor. Velikost sile F je $3\,\mathrm{kN}$.



2. 

Za paličje na sliki izračunaj:

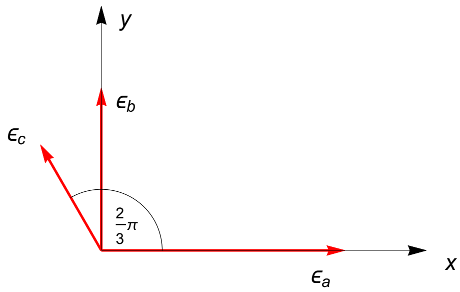
(a) sile v podporah;

(b) sile označenih palic 1, 2, 3.

3. Z ekstenziometrom smo v smereh, ki med seboj oklepajo kote kot kaže skica, izmerili osne deformacije $\epsilon_\mathrm{a} = 0.003$, $\epsilon_\mathrm{b} = 0.002$ in $\epsilon_\mathrm{c} = 0.001$.

   (a) Določi infinitezimalni deformacijski tenzor.

   (b) Naj bo deformiran material izotropičen z Youngovim modulom $E = 210\,\mathrm{GPa}$ in Poissonovim količnikom $\nu = 0.2$. Za po prvi točki izračunano ravninsko deformacijo določi pripadajoči napetostni tenzor $\underline{\underline{t}} = \frac{E}{1+\nu}\underline{\underline{\epsilon}} + \frac{\nu E\,\mathrm{sl}(\underline{\underline{\epsilon}})}{(1+\nu)(1-2\nu)}\underline{\underline{I}}$.

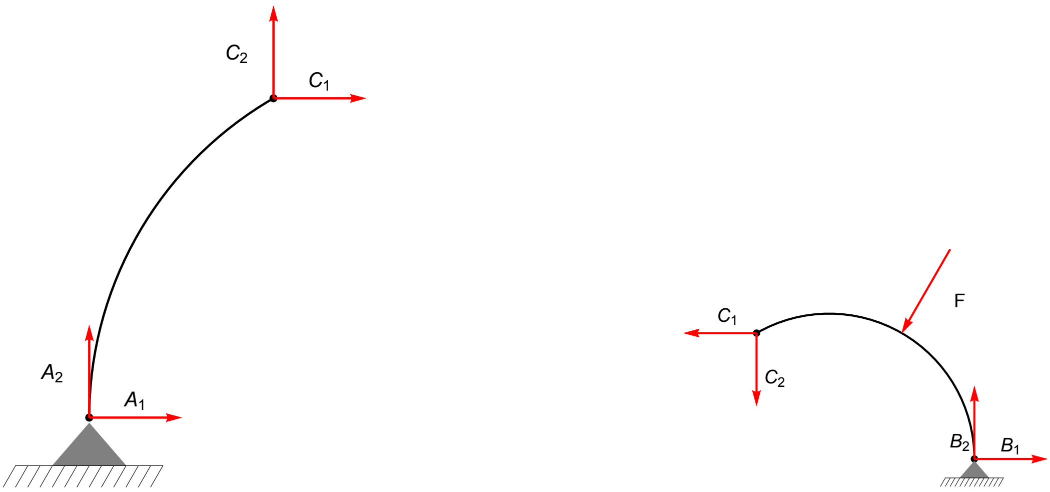


4. Enostavno podprt vodoravni nosilec dolžine $l = 1\,\mathrm{m}$ je v vertikalni smeri točkovno obremenjen pri $x_1 = \frac{l}{4}$, $x_2 = \frac{l}{2}$ in $x_3 = \frac{3l}{4}$ s silami $F_1 = -F_0$, $F_2 = 2F_0$ in $F_3 = -F_0$.

   (a) Skiciraj potek prečne sile in upogibnega momenta. Določi vrednost maksimalnega upogibnega momenta.

   (b) Nosilec je votel s kvadratnim presekom dimenzij $2\,\mathrm{cm} \times 3\,\mathrm{cm}$. Določi pogoj na velikost sile F_0 tako, da bo osna napetost v nosilcu manjša od $\sigma_0 = 120\,\mathrm{MPa}$.

Rešitve

1. 

Slika 1: Sile na levi in desni lok.

Lok razdelimo na dva loka, glej skico. Za vsak lok veljajo ravnotežne enačbe. Za levi imamo

$$\begin{aligned} 0 &= A_1 + C_1 \\ 0 &= A_2 + C_2 \\ 0 &= R(1-\frac{1}{2})C_2 - R\frac{\sqrt{3}}{2}C_1. \end{aligned}$$

Namesto ravnotežnih enačb za desni lok raje zapišimo ravnovesne enačbe za tročleni lok

$$\begin{aligned} 0 &= A_1 + B_1 - \frac{1}{2}F \\ 0 &= A_2 + B_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}F \\ 0 &= -RA_2 + RB_2. \end{aligned}$$

Tu smo uporabili momentno enačbo v središču loka. Sistem rešimo in dobimo

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{4}F = \frac{3}{4}\text{kN} \\ A_2 &= \frac{\sqrt{3}}{4}F = \frac{3\sqrt{3}}{4}\text{kN} \\ B_1 &= A_1 = \frac{3}{4}\text{kN} \\ B_2 &= A_2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}\text{kN} \end{aligned}$$

2. Prvo izračunamo sile podpor. Levo označimo z A, desno drsno z B. Očitno nastopata samo vertikalni sili podpor, ki ju označimo z A_2 in B_2. Iz momentne enačbe v podpori A sledi

$$a \cdot B_2 - 2a \cdot F - 3a \cdot 2F - 4a \cdot 3F = 0$$

in od tod $B_2 = 20F$. Ravnovesna momentna enačba s polom v B je

$$-a \cdot A_2 - a \cdot F - 2a \cdot 2F - 3a \cdot 3F = 0$$

in tako $A_2 = -14F$.

Sile označenih palic dobimo s prerezno metodo. Označimo z C presečišče prve in druge palice in z D presečišče druge in tretje palice. Izberimo desni del paličja in zapišimo momentno enačbo s polom v C. Dobimo

$$a \cdot F_3 - a \cdot 2F - 2a \cdot 3F = 0$$

in $F_3 = 8F$. Momentna enačba s polom v D je

$$-a \cdot F_1 - a \cdot F - 2a \cdot 2F - 3a \cdot 3F = 0$$

in $F_1 = -14F$. Silo F_2 dobimo iz ravnovesja sil v vodoravni smeri. Enačba je

$$0 = \frac{1}{\sqrt{2}} F_2 + F_1 + F_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} F_2 - 6F$$

in $F_2 = 6\sqrt{2}F$.

3. (a) Ker je osna napetost v smeri osi x enaka ϵ_a, je $\epsilon_{11} = 3 \times 10^{-3}$ in podobno $\epsilon_{22} = 2 \times 10^{-3}$. Enotski vektor v smer osne deformacije ϵ_c je $\vec{e}_\mathrm{c} = \cos(2\pi/3)\vec{\imath} + \sin(2\pi/3)\vec{\jmath} = -\frac{1}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}$. Zapišimo tenzor deformacije

$$\underline{\underline{\epsilon}} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 3 & \alpha \\ \alpha & 2 \end{bmatrix}.$$

Neznanko α določimo iz pogojev

$$\epsilon_\mathrm{c} = \vec{e}_\mathrm{c} \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \cdot \vec{e}_\mathrm{c} = \frac{1}{4}\epsilon_\mathrm{a} - \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha + \frac{3}{4}\epsilon_\mathrm{a}$$

Rešiev je $\alpha = \frac{5}{2\sqrt{3}}$ Potemtakem je

$$\underline{\underline{\epsilon}} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 3 & \frac{5}{2\sqrt{3}} \\ \frac{5}{2\sqrt{3}} & 2 \end{bmatrix}.$$

(b) Uporabimo dano formulo. Izrčunajmo posebej $\frac{1}{1+\nu} = \frac{5}{6}$, $\frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{5}{18}$ in $\mathrm{sl}\left(\underline{\underline{\epsilon}}\right) = 4 \times 10^{-3}$. Tako dobimo

$$\underline{\underline{t}} = 70\,\mathrm{MPa} \begin{bmatrix} \frac{35}{3} & \frac{25}{4\sqrt{3}} \\ \frac{25}{4\sqrt{3}} & \frac{55}{6} \end{bmatrix} \mathrm{MPa}$$

4. (a) Prvo izračunamo sile podpor, levo označimo z A, desno z B. Iz simetrije problema sledi $A = B$. Vsota vseh sil je nič, potem $A = B = 0$. Potek prečne sile in upogibnega momenta je dan na sliki. Maksimalni upogibni moment je $M_\mathrm{max} = \frac{l}{4}F_0$.

(b) Ploskovni moment pravokotnika dimenzije $a \times b$ je

$$I = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} y^2\, dy = 2a \int_{-b/2}^{b/2} y^2\, dy = \frac{1}{12}ab^3 = \frac{9}{2}\mathrm{cm}^4.$$

Osna napetost je dana s formulo $\sigma = \frac{M}{I}z$. Veljati mora pogoj

$$\frac{M_\mathrm{max}}{I} z_\mathrm{max} \leq \sigma_0.$$

Ker je $z_\mathrm{max} = \frac{a}{2}$ in $M_\mathrm{max} = \frac{l}{4}F_0$, dobimo od tod neenačbo

$$F_0 \leq \frac{8I\sigma_0}{la} = 2.16\,\mathrm{kN}.$$

Slika 2: Potek prečne sile in upogibnega momenta.