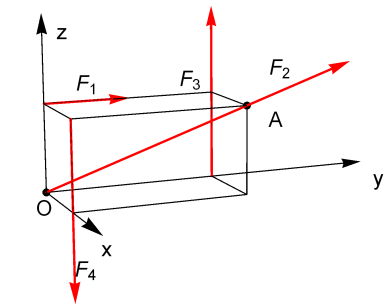
Kolokvij iz Osnov mehanike 8. junija 2016

1. Za prostorski sistem sil podan na sliki, sile so v smereh stranic in diagonale kvadra dimenzije 1m $\times$2m $\times$1m:

   (a) Izračunaj rezultanto sil.

   (b) Izračunaj navor glede na pol O.

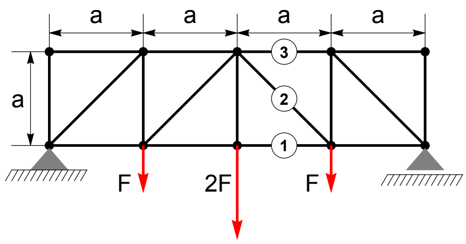
   Velikosti sil so $F_1 = 1$KN, $F_2 = 3$KN, $F_3 = 2$KN, $F_4 = 2$KN.



2. Za paličje na sliki izračunaj:

   (a) sile v podporah;

   (b) sile označenih palic $1, 2, 3$.



3. Z ekstenziometrom smo izmerili osne deformacije v vodoravni, navpičini in v smeri, ki oklepa kot 45° glede na vodoravno smer. Izmerjene vrednosti so 0.001, 0.002 in -0.005.

   (a) Določi deformacijski tenzor.

   (b) Pripadajoče ekstremalne vrednosti osne deformacije.

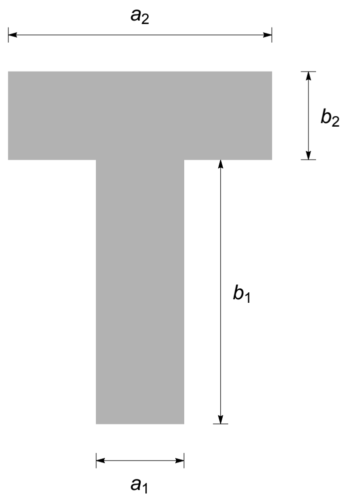
   (c) Smeri ekstremalnih osnih deformacij.

4. Enostavno podprt T nosilec dolžine $l = 1$m je točkovno obremenjen v navpični smeri pri $x_1 = \frac{1}{4}l$ in $x_2 = \frac{3}{4}l$ s silama $F_1 = 2$kN in $F_2 = -1$kN. Dimenzija preseka so $a_1 = 1$cm, $a_2 = 3$cm, $b_1 = 2$cm in $b_2 = 1$cm.

   (a) Skiciraj potek prečne sile in upogibnega momenta. Kolikšna je maksimalna vrednost upogibnega momenta?

   (b) Določi središče preseka in njegov ploskovni moment I.

   (c) Izračunaj maksimalno osno napetost.



Rešitve

1. Označimo prijemališča sil $\vec{F_i}$ s P_i, $i = 1, 2, 3, 4$. Koordinate orijemališč so $P_1 = (0, 0, 1)$, $P_2 = (0, 0, 0)$, $P_3 = (0, 2, 0)$ in $P_4 = (1, 0, 1)$. Sile $\vec{F_1}$, $\vec{F_3}$ in $\vec{F_4}$ so v koordinatnih smereh in tako $\vec{F_1} = F_1\vec{j}$, $\vec{F_3} = F_3\vec{k}$ in $\vec{F_4} = -F_4\vec{k}$. Sila $\vec{F_2}$ je v smeri diagonale $\vec{OA} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$. Pripadajoči enotski vektor v tej smeri je $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})$. Potemtakem $\vec{F_2} = F_2\vec{e}_2$.

   (a) Rezultanta sil je
   $$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4} = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\vec{i} + \left(1 + \sqrt{6}\right)\vec{j} + \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\vec{k}\right) \text{kN}.$$

   (b) Za rezultanto navorov izračunajmo posebej: $\vec{OP_1}\times\vec{F_1} = -\vec{i}$, $\vec{OP_2}\times\vec{F_2} = \vec{0}$, $\vec{OP_3}\times\vec{F_3} = 4\vec{i}$ in $\vec{OP_4} \times \vec{F_4} = 2\vec{j}$. Potem
   $$\vec{N} = \sum_{i=1}^{4} \vec{OP_i} \times \vec{F_i} = \left(3\vec{i} + 2\vec{j}\right) \text{kNm}.$$

2. (a) Označimo levo podporo z A, desno z B, pripadajoči sili podpor pa z $\vec{A}$ in $\vec{B}$. Ravnovesna momentna enačba v A se glasi
   $$-aF - 4aF - 3aF + 4aB = 0 \Longrightarrow B = 2F,$$
   ravnovesna momentna enačba v B pa
   $$3aF + 4aF + aF - 4aA = 0 \Longrightarrow A = 2F.$$
   Kontrola izračunanega pokaže, da je vsota vseh sil enaka nič.

   (b) Sile označenih palic dobimo s prerezno metodo. Iz ravnovesne enačbe za desni del paličja s polom v presečišču druge in tretje palice sledi $-aF_1 - aF + 2aB$ in tako $F_1 = 3F$. Momentna enačba s polom v presečišču prve in druge palice nam da $aF_3 + aB = 0$ in $F_3 = -B = -2F$. Silo F_2 dobimo iz pogoja, da je vsota vseh sil na desni del paličja enaka nič. V vodoravni smeri tako $-F_3 - F_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}F_2 = 0$. Od tod $F_2 = -\sqrt{2}F$. Kontrola pokaže, da je potem tudi vsota v navpični smeri enaka nič.

3. (a) Postavimo koordinatni sistem tako, da je os x v vodoravni smeri, y pa v navpični. Osna deformacija v vodoravni smeri je 10^{-3}, zato $e_{11} = 10^{-3}$. Podobno $e_{22} = 2 \times 10^{-3}$. Deformacijski tenzor je tako oblike
   $$\underline{\underline{\epsilon}} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 1 & x \\ x & 2 \end{bmatrix}.$$
   Označimo $\vec{n} = \cos(\pi/4)\vec{i} + \sin(\pi/4)\vec{j} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{i} + \vec{j}\right)$. Potem $\vec{n} \cdot \underline{\underline{\epsilon}}\,\vec{n} = -5 \times 10^{-3}$ oziroma v matričnem zapisu
   $$10^{-3}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & x \\ x & 2 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -5 \times 10^{-3}.$$
   Od tod po krajšem računu $x = -\frac{13}{2}$. Potemtakem
   $$\underline{\underline{\epsilon}} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 1 & -13/2 \\ -13/2 & 2 \end{bmatrix}.$$

(b) Ekstremalne vrednosti dobimo po formulah

$$\epsilon_{\text{ext}} = \frac{1}{2}\left(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} \pm \sqrt{(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})^2 + 4\epsilon_{12}^2}\right).$$

Vstavimo izračunano. Potem $\epsilon_{\max} = \frac{1}{2}(3+\sqrt{170}) \doteq 8.02$ in $\epsilon_{\min} = \frac{1}{2}(3-\sqrt{170}) \doteq -5.02$.

(c) Smer ekstremalnih napetosti je dana s formulo

$$\varphi_1^{\mathrm{a}} = \frac{1}{2}\arctan\frac{2\epsilon_{12}}{\epsilon_{11} - \epsilon_{22}}, \quad \varphi_2^{\mathrm{a}} = \varphi_1^{\mathrm{a}} + \frac{\pi}{2}.$$

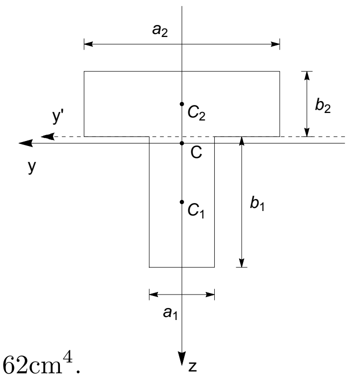
Izračunamo

$$\varphi_1^{\mathrm{a}} = \frac{1}{2}\arctan 13 = 42.8^\circ \qquad \varphi_2^{\mathrm{a}} = 132.8^\circ.$$

4. (a) Prvo izračunamo sile podpor, levo označimo z A, desno z B. Iz ravnovesnja momentov dobimo $A = \frac{5}{4}$kN in $B = -\frac{1}{4}$kN. Potek prečne sile in upogibnega momenta je dan na sliki. Maksimalni upogibni moment je $M_{\max} = 5/16\,\text{kNm} \doteq 0.3125\,\text{kNm}$.

Slika 1: Potek prečne sile in upogibnega momenta.

(b) Postavimo pomožni koordinatni sistem (y', z') tako kot kaže slika. Glede na ta koordinatni sistem sta z' koordinati središčnih točk C_2 in C_1 zgornjega in spodnjega pravokotnika enaki $z_1' = 1\,\text{cm}^2$ in $z_2' = -1/2\,\text{cm}^2$. Pripadajoči ploščini sta $A_1 = 2\,\text{cm}^2$ in $A_2 = 3\,\text{cm}^2$. Središče T profila je potem dan s formulo



$$z_* = \frac{1}{A_1 + A_2}(A_1 z_1' + A_2 z_2') = \frac{1}{10}\text{cm}.$$

Ploskovni moment izračunamo po formuli

$$I = \frac{1}{12}a_1 b_1^3 + (z_1 - z_*)^2 A_1 + \frac{1}{12}a_2 b_2^3 + (z_2 - z_*)^2 A_2 = \frac{217}{60}\text{cm}^4 \doteq 3.62\text{cm}^4.$$

(c) Maksimalna osna napetost je dana s formulo

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I} z_{\max}.$$

V izraz vstavimo $z_{\max} = 19/10$cm. Tako dobimo

$$\sigma_{\max} = \frac{5 \times 60 \times 19}{16 \times 217} 10^8\text{Nm}^{-2} \doteq 164\,\text{MPa}.$$