

Poglavje 1

Statika togega telesa

1.1 Operacije nad sistemom sil

V tem razdelku si bomo ogledali operacije, ki ohranjajo ekvipolentnost sistema sil. Prvo se vprašajmo, ali lahko dani sili sistema sil spremenimo prijemališče. Naj bo

$$\mathcal{F} = \{(P_1, \vec{F}_1), (P_2, \vec{F}_2), \dots, (P_n, \vec{F}_n)\}$$

dani sistem sil. Sili \vec{F}_1 prestavimo prijemališče v P'_1 . Tako dobimo sistem

$$\mathcal{F}' = \{(P'_1, \vec{F}_1), (P_2, \vec{F}_2), \dots, (P_n, \vec{F}_n)\}.$$

Ali sta sistema sil \mathcal{F} in \mathcal{F}' ekvipolentna, ali velja $\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{R}(\mathcal{F}')$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \vec{N}(\mathcal{F}', O)$ za poljubni izbrani pol? Očitno je $\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{R}(\mathcal{F}')$, saj imata sistema enake sile, le prijemališče sile \vec{F}_1 je različno. Zapišimo

$$\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \sum_{i=1}^n O\vec{P}_i \times \vec{F}_i.$$

Vidimo, da je $\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \vec{N}(\mathcal{F}', O)$, če je

$$O\vec{P}_1 \times \vec{F}_1 = O\vec{P}'_1 \times \vec{F}_1$$

oziroma

$$(O\vec{P}_1 - O\vec{P}'_1) \times \vec{F}_1 = \vec{0}.$$

Vektorski produkt je enak nič, če sta vektorja vzporedna, torej če je $P'_1P \parallel \vec{F}_1$. To pomeni, da lahko prijemališče sile prestavimo samo po premici, ki gre skozi prvotno prijemališče in ima smer sile. Temu pravilu pravimo *princip o polznosti sile*.

Naj bo sedaj sistem sile oblike

$$\mathcal{F} = \{(P_1, \vec{F}_1), (P_1, \vec{F}_2), (P_3, \vec{F}_2), \dots, (P_n, \vec{F}_n)\},$$

sili \vec{F}_1 in \vec{F}_2 imata isto primejališče. Pokažimo, da je sistem sil

$$\mathcal{F}' = \{(P_1, \vec{F}_1 + \vec{F}_2), (P_1, \vec{F}_2), (P_3, \vec{F}_2), \dots, (P_n, \vec{F}_n)\}$$

ekvipolenten sistemu \mathcal{F} . Očitno je $\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{R}(\mathcal{F}')$. Nadalje, ker je

$$O\vec{P}_1 \times \vec{F}_1 + O\vec{P}_1 \times \vec{F}_2 = O\vec{P}_1 \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$$

je tudi $\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \vec{N}(\mathcal{F}', O)$ in sistema sil sta res ekvipolentna, torej $\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}'$. Temu pravilu pravimo *princip o seštevanju sil s skupnim prijemašiščem*.

Očitno dodajanje ničelne sile ne vpliva na ekvipolentnost. Velja torej

$$\{(P_1, \vec{0}), (P_2, \vec{F}_2), (P_3, \vec{F}_2), \dots, (P_n, \vec{F}_n)\} \equiv \{(P_2, \vec{F}_2), (P_3, \vec{F}_2), \dots, (P_n, \vec{F}_n)\}.$$

Potemtakem je po principu o seštevanju sil s skupnim prijemašiščem tudi

$$\{(P_1, \vec{F}_1), (P_1, -\vec{F}_1), (P_3, \vec{F}_2), \dots, (P_n, \vec{F}_n)\} \equiv \{(P_2, \vec{F}_2), (P_3, \vec{F}_2), \dots, (P_n, \vec{F}_n)\}.$$

Tej enakosti pravimo *princip o uravnoteženem paru sil*. Zapisanim principom pravimo osnovni principi statike. Poglejmo si sedaj primer njihove uporabe.

1.2 Redukcija ravninskega sistema

Dan je ravninski sistem dveh sil $\mathcal{F} = \{(P_1, \vec{F}_1), (P_2, \vec{F}_2)\}$. Ločimo primera, ko sili nista vzporedni in ko sta vzporedni. Če sili nista vzporedni, se njuni premici nosilke sekata v skupni točki P_0 . Po principu o polznosti lahko potem prijemašišči sil premaknemo v presečišče nosilk. Potem velja

$$\{(P_1, \vec{F}_1), (P_2, \vec{F}_2)\} \equiv \{(P_0, \vec{F}_1), (P_0, \vec{F}_2)\} \equiv \{(P_0, \vec{F}_1 + \vec{F}_2)\}.$$

Dani sistem sil smo reducirali na sistem z eno samo silo. Pravimo, da smo uspeli reducirati sistem sil na skupno prijemašišče, saj je očitno $\vec{N}(\mathcal{F}, P_0) = \vec{0}$. Točki P_0 pravimo tudi redukcijska točka. Za grafični prikaz glej sliko.



Slika 1.1: Redukcija ravninskega sistema, levo $\vec{F}_1 \nparallel \vec{F}_2$, desno $\vec{F}_1 \parallel \vec{F}_2$.

Naj bosta sedaj sili vzporedni. Prepostavimo prvo, da sta sili enako usmerjeni. S principom o polznosti lahko dosežemo, da sta prijemašišči poravnani, kaj več pa ne. Sedaj nam pride prav princip o uravnoteženem paru sil. Zapišimo

$$\mathcal{F} = \{(P_1, \vec{F}_1), (P_2, \vec{F}_2)\} \equiv \{(P_1, -\vec{F}_0), (P_1, \vec{F}_0), (P_1, \vec{F}_1), (P_2, \vec{F}_2)\},$$

kjer je F_0 poljubna sila. Ker sta prijemašišči poravnani, glej sliko, je potem po principu o polznosti in seštevanju sil s skupnim prijemašiščem

$$\mathcal{F} \equiv \{(P_1, \vec{F}_1 - \vec{F}_0), (P_2, \vec{F}_2 + \vec{F}_0)\}.$$

Dobili smo sistem dveh sil, ki nista vzporedni. Nosilke se sekata v točki P_0 , glej skico. Potem je

$$\mathcal{F} \equiv \{(P_0, \vec{F}_1 + \vec{F}_2)\}.$$

Sistem sil ima tudi v tem primeru skupno prijemališče. Izbor sile F_0 je bil poljuben. Kako njegov izbor vpliva na redukcijo na skupno prijemališče? Iz slike vidimo, da večja sila F_0 pomakne skupno prijemališče navzgor, manjša pa navzdol, obakrat v smeri rezultante $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Ta pomik ustreza polznosti sile, zato izbira velikosti sile nima vpliva na določitev redukcijske točke.

Poglejmo sedaj primer, so sta sili vzporedni in nasprotno usmerjeni. Postopamo tako kot v primeru, ko sta sili enakousmerjeni. Opazimo, da tudi sedaj dobimo skupno presečišče, ki pa se pomika v neskončnost, ko sta velikosti nasprotno usmerjenih sil vedno bolj enaki. Tako v primeru, ko je $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ sistem dveh sil nima skupnega prijemališča. Tak sistem sil

$$\mathcal{F} = \{(P_1, \vec{F}_1), (P_2, -\vec{F}_1)\}$$

je dvojica, saj je $\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{0}$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, P_1) \neq \vec{0}$. Povzamimo, ravninski sistem sil, ki ni dvojica lahko reduciramo na sistem z eno samo silo, ki je rezultanta sil s prijemališčem v redukcijski točki.

1.3 Dvojica

Dvojica je sistem sil \mathcal{F} , za katerega je $\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{0}$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, O) \neq \vec{0}$. Navor dvojice je neodvisen od pola. To sledi iz formule, ki pove, kako je navor sistema odvisen od pola. Na odvisnost navora od pola vpliva rezultanta sistema sil in če je rezultanta enaka nič, je potem navor neodvisen od pola. Potemtakem je za dvojico $\vec{N}(\mathcal{F}, O) \neq \vec{0}$ za vsak pol O . Sistem sil, ki je dvojica bomo v nadaljevanju označili z \mathcal{D} . Neodvisnost dvojice od pola dovoljuje, da dvojico \mathcal{D} , ki je sistem sil, identificiramo s pripadajočim navorom. Po tej identifikaciji $\mathcal{D} \equiv \vec{N}(\mathcal{D}, O)$, kjer je O poljubna točka. Ker je navor neodvisen od pola, pravimo, da je navor prosti vektor. Po drugi strani pa sila ni prosti vektor, ker je odvisna še od prijemališča.

Sistem sil $\mathcal{F} = \{(P_1, -\vec{F}), (P_2, \vec{F})\}$ je dvojica. Pokažimo sedaj, da lahko vsaki dvojici \mathcal{D} priredimo tak ekvipolenten sistem sil. Določiti moramo prijemališči P_1 in P_2 in silo \vec{F} , da bo

$$\mathcal{D} = \vec{N}(\mathcal{F}, P_1) = P_1\vec{P}_2 \times \vec{F}.$$

Izbira točke P_1 je poljubna, saj je dvojica neodvisna od pola. Ker je vektorski produkt dveh vektorjev vektor, ki je pravokoten na oba vektorja, je sila \vec{F} pravokotna na \mathcal{D} , točko P_2 pa izberimo v taki smeri, da je vektor $P_1\vec{P}_2$ pravokoten ne samo na \mathcal{D} , ampak tudi na \vec{F} . Sedaj si lahko poljubno izberemo velikost sile \vec{F} ali pa vektorja $P_1\vec{P}_2$. Preostalo velikost potem določimo iz enakosti

$$|\mathcal{D}| = |P_1\vec{P}_2| |\vec{F}|.$$

Orientacijo vektorja $P_1\vec{P}_2$ potem določa pravilo desnega vijaka za vektorski produkt. Dvojici \mathcal{D} smo tako uspeli prirediti ekvipolentni sistem $\{(P_1, -\vec{F}), (P_2, \vec{F})\}$. Vidimo, da lahko pri tem poljubno izberemo silo \vec{F} ali ročico $P_1\vec{P}_2$. Edini pogoj je, da sta izbiri pravokotni na \mathcal{D} .

1.4 Redukcijska točka in prestavitveni moment

Sedaj ko vemo, kako je z redukcijo ravninskega sistema dveh sil se vprašajmo, kdaj je redukcija na skupno prijemališče možna za poljubnen, bodisi ravninski ali prostorski sistem sil. V ta namen prvo definirajmo unijo dveh sistemov sil. Unija dveh sistemov sil \mathcal{F}_1 in \mathcal{F}_2 je unija, ki vsebuje vse pare prijemališče, sila obeh sistemov in je potemtakem tudi sistem sil. Očitno je

$$\vec{R}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) = \vec{R}(\mathcal{F}_1) + \vec{R}(\mathcal{F}_2), \quad \vec{N}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2, O) = \vec{N}(\mathcal{F}_1, O) + \vec{N}(\mathcal{F}_2, O).$$

Unija dveh ravnovesnih sistemov je torej tudi ravnovesni sistem, unija dveh dvojic pa je dvojica ali pa ravnovesni sistem, saj je možno, da je $\vec{R}(\mathcal{F}_1) + \vec{R}(\mathcal{F}_2) = \vec{0}$, čeprav je $\vec{R}(\mathcal{F}_i) \neq \vec{0}$, $i = 1, 2$.

Madalje, če je \mathcal{F}_1 poljubni sistem, \mathcal{F}_2 pa je ravnovesni sistem, je $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1$. Ravnovesni sistem sil zato lahko označimo tudi z znakom za prazno množico \emptyset , $\mathcal{F}_2 = \emptyset$.

Naj bo sedaj \mathcal{F} poljubni sistem sil

$$\mathcal{F} = \{(P_1, \vec{F}_1), (P_2, \vec{F}_2), \dots, (P_n, \vec{F}_n)\}.$$

Izberimo poljubno točko P_0 . Po principu o uravnoveženem paru sil je

$$\mathcal{F} \equiv \{(P_0, \vec{F}_1), (P_0, -\vec{F}_1), (P_1, \vec{F}_1), (P_2, \vec{F}_2), \dots, (P_n, \vec{F}_n)\}.$$

Par $\{(P_0, -\vec{F}_1), (P_1, \vec{F}_1)\}$ je sistem sil, ki je dvojica. Označimo jo z \mathcal{D}_1 . Potem je

$$\mathcal{F} \equiv \mathcal{D}_1 \cup \{(P_0, \vec{F}_1), (P_2, \vec{F}_2), \dots, (P_n, \vec{F}_n)\}.$$

Ponovno uporabimo princip o uravnoveženem paru sil, tokrat za silo \vec{F}_2 ,

$$\mathcal{F} \equiv \mathcal{D}_1 \cup \{(P_0, \vec{F}_1), (P_0, \vec{F}_2), (P_0, -\vec{F}_2), (P_2, \vec{F}_2), \dots, (P_n, \vec{F}_n)\}.$$

Sedaj označimo z \mathcal{D}_2 dvojico $\{(P_0, -\vec{F}_2), (P_2, \vec{F}_2)\}$. Potem, uporabimo še princip o seštevanju sil s skupnim prijemaščem, dobimo

$$\mathcal{F} \equiv \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \{(P_0, \vec{F}_1 + \vec{F}_2), (P_3, \vec{F}_3), \dots, (P_n, \vec{F}_n)\}.$$

Postopek nadaljujemo. Po n korakih dobimo

$$\mathcal{F} \equiv \mathcal{D} \cup \{(P_0, \vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_n)\},$$

kjer je $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \dots \cup \mathcal{D}_n$ unija dvojic in potemtakem tudi dvojica ali ravnovesni sistem sil.

Kaj smo dosegli? Obravnavajmo prvo primer, ko je \mathcal{D} ravnovesni sistem sil. Potem je

$$\mathcal{F} \equiv \mathcal{D} \cup \{(P_0, \vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_n)\} \equiv \{(P_0, \vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_n)\} \equiv \{(P_0, \vec{R}(\mathcal{F}))\}.$$

Sistem sil smo reducirali na rezultanto sistema s prijemaščem v P_0 . Dani sistem \mathcal{F} ima tako v P_0 skupno prijemašče.

V primeru, ko je \mathcal{D} dvojica pa je

$$\mathcal{F} \equiv \mathcal{D} \cup \{(P_0, \vec{R}(\mathcal{F}))\}.$$

Sistem \mathcal{F} sedaj nima skupnega prijemašča v P_0 . Če želimo sistem \mathcal{F} nadomestiti z rezultanto s prijemaščem v P_0 , moramo dodati dvojico oziroma navor \mathcal{D} . Navoru \mathcal{D} pravimo premestitveni moment. Premestitveni moment je enak momentu sistema sil s polom v redukcijski točki, velja torej

$$\mathcal{D} = \vec{N}(\mathcal{F}, P_0) = \sum_{i=1}^n P_0 \vec{P}_i \times \vec{F}_i.$$

1.5 Skupno presečišče sistema sil

Sedaj iščemo redukcijsko točko, v kateri je premestitveni navor enak nič. Povedano drugače, iščemo skupno prijemašče sistema sil. Privzemimo, da ima dani sistem sil \mathcal{F} skupno prijemašče. Označimo ga s P_0 . Potem je $\vec{N}(\mathcal{F}, P_0) = \vec{0}$ in po formuli za odvisnost navora od pola

$$\vec{0} = \vec{N}(\mathcal{F}, P_0) = P_0 \vec{O} \times \vec{R}(\mathcal{F}) + \vec{N}(\mathcal{F}, O)$$

za poljubni pol O . Od tod, upoštevajmo, da je $O\vec{P}_0 = -P_0\vec{O}$, sledi

$$\vec{N}(\mathcal{F}, O) = O\vec{P}_0 \times \vec{R}(\mathcal{F}).$$

Vidimo, če obstaja skupno prijemališče sistema sil \mathcal{F} , je $\vec{R}(\mathcal{F}) \perp \vec{N}(\mathcal{F}, O)$ za vsak pol O . Pogoji, da sta vektorja $\vec{R}(\mathcal{F})$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, O)$ med seboj pravokotna je torej potreben pogoj za obstoj skupnega presečišča. Pokažimo še, da je pogoj tudi zadostni, da iz veljavnosti pogoja sledi, da obstaja skupno presečišče. Izberimo poljubni pol O in sistemu sil priredimo ekvipolentni sistem

$$\mathcal{F} \equiv \vec{N}(\mathcal{F}, O) \cup \{(O, \vec{R}(\mathcal{F}))\}.$$

Ker je $\vec{N}(\mathcal{F}, O)$ pravokoten na $\vec{R}(\mathcal{F})$, lahko dvojico $\mathcal{D} = \vec{N}(\mathcal{F}, O)$ zapišemo v obliki

$$\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \{P_0, -\vec{R}(\mathcal{F})\}, (P_0, \vec{R}(\mathcal{F}))\}.$$

Potem je

$$\mathcal{F} \equiv \{O, -\vec{R}(\mathcal{F})\}, (P_0, \vec{R}(\mathcal{F}))\} \cup \{(O, \vec{R}(\mathcal{F}))\} = \{(P_0, \vec{R}(\mathcal{F}))\}.$$

Sistem sil ima tako skupno prijemališče v točki P_0 . Kako P_0 izračunamo bomo videli v nadaljevanju.

1.6 Os sistema

Sedaj že vemo, da sistem sil nima skupnega prijemališča, če rezultanta navorov in sil nista pravokotna. Pokazali bomo, da v tem primeru obstaja redukcijska točka P_0 tako, da je potem rezultanta navorov s polom v P_0 vzporedna rezultanti sil. $\vec{N}(\mathcal{F}, P_0) \parallel \vec{R}(\mathcal{F})$. Naj bo \mathcal{F} dani sistem sil. Označimo na kratko z $\vec{R} = \vec{R}(\mathcal{F})$ in $\vec{N} = \vec{N}(\mathcal{F}, O)$, kjer je O poljubno izbrani pol. Iščejo tako redukcijsko točko P_0 , da je

$$\vec{N}(\mathcal{F}, P_0) = (P_0\vec{O} \times \vec{R} + \vec{N}) \parallel \vec{R}.$$

Enačba ne določa iskani P_0 enolično. To sledi iz principa o polznosti sile, $\vec{N}(\mathcal{F}, P_0)$ je neodvisen od pomika točke P_0 v smeri \vec{R} . Zgornjo enačbo pomnožimo vektorsko z \vec{R} . Potem je

$$(P_0\vec{O} \times \vec{R} + \vec{N}) \times \vec{R} = \vec{0}.$$

Uporabimo sedaj formulo $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$. Tako dobimo

$$(P_0\vec{O} \cdot \vec{R})\vec{R} - (\vec{R} \cdot \vec{R})P_0\vec{O} = -\vec{N} \times \vec{R}.$$

Izberimo tak P_0 , da je $P_0\vec{O} \cdot \vec{R} = 0$. Potem je iskana redukcijska točka dana z enačbo

$$O\vec{P}_0 = \frac{\vec{R} \times \vec{N}}{|\vec{R}|^2} = \frac{\vec{R}(\mathcal{F}) \times \vec{N}(\mathcal{F}, O)}{|\vec{R}(\mathcal{F})|^2}.$$

Premici skozi P_0 v smeri $\vec{R}(\mathcal{F})$ pravimo os sistema.

Veno, da ima sistem sil skupno prijemališče, če sta $\vec{R}(\mathcal{F})$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, O)$ med seboj pravokotna. Pokažimo, da v tem primeru skupno prijemališče leži na osi sistema. Res, z uporabo zgoraj formule izračunajmo

$$\vec{N}(\mathcal{F}, P_0) = P_0\vec{O} \times \vec{R}(\mathcal{F}) + \vec{N}(\mathcal{F}, O) = \frac{(\vec{N} \times \vec{R}) \times \vec{R}}{|\vec{R}|^2} + \vec{N} = \vec{0},$$

saj je $(\vec{N} \times \vec{R}) \times \vec{R} = (\vec{N} \cdot \vec{R})\vec{R} - (\vec{R} \cdot \vec{R})\vec{N} = -|\vec{R}|^2 \vec{N}$. Dokazali smo, če ima sistem sil skupno prijemališče, leži to na osi sistema.

1.7 Invarianta sistema sil

Invarianta sistema sil je $I(\mathcal{F}) = \vec{R}(\mathcal{F}) \cdot \vec{N}(\mathcal{F}, O)$. V definiciji nastopa pol O . Hitro pa vidimo, da je definicija neodvisna od pola saj je

$$\vec{R}(\mathcal{F}) \cdot \vec{N}(\mathcal{F}, P_0) = \vec{R} \cdot \left(P_0 \vec{O} \times \vec{R}(\mathcal{F}) + \vec{N}(\mathcal{F}, O) \right) = \vec{R}(\mathcal{F}) \cdot \vec{N}(\mathcal{F}, O),$$

saj je mešani produkt z dvema enakima faktorjema enak nič.

Poglejmo kaj nam pove invarianta sistema sil.

1. Naj bo $I(\mathcal{F}) = 0$. Potem imamo naslednje možnosti

- Oba faktorja sta enaka nič, torej $\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{0}$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \vec{0}$. To pomeni, da je v tem primeru \mathcal{F} ravnovesni sistem sil.
- Ena faktor je enak nič, recimo $\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{0}$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, O) \neq \vec{0}$. Sistem sil je dvojica.
- Naj bo sedaj $\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{\rho}$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \vec{0}$. Sistem sil ima skupno prijemališče v O .
- Oba faktorja sta neničelna vektorja. Potem iz $I(\mathcal{F}) = 0$ sledi, da sta $\vec{R}(\mathcal{F})$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, O)$ med seboj pravokotna. Vemo, da ima tudi v tem primeru sistem sil skupno prijemališče.

2. $I(\mathcal{F}) \neq 0$. Sistem sil nima skupnega prijemališča. Pravimo, da je *dinama*. V tem primeru obstaja redukcijska točka P_0 , da sta $\vec{R}(\mathcal{F})$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, P_0)$ med seboj vzporedna. Tak par povzroči vijačno gibanje.

1.8 Primeri

1.8.1 Sistem vzporednih sil

Poglejmo si prvo sistem vzporednih sil. To je sistem

$$\mathcal{F} = \{(P_1, \vec{F}_1), (P_2, \vec{F}_2), \dots, (P_n, \vec{F}_n)\},$$

kjer so vse sile \vec{F}_i med seboj vzporedne, velja torej $\vec{F}_i = m_i \vec{g}$ za števila m_i in vektor \vec{g} . Rezultanti sistema sta

$$\vec{R}(\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^n m_i \vec{g} \quad \text{in} \quad \vec{N}(\mathcal{F}, O) = \sum_{i=1}^n m_i O \vec{P}_i \times \vec{g}.$$

Potem je očitno $I(\mathcal{F}) = 0$ in če sistem ni dvojica, ima sistem skupno prijemališče. Vemo, da je skupno prijemališče na osi sistema, vendar ga v tem posebnem primeru določimo direktno. Iščemo torej tako točko, da je

$$\vec{N}(\mathcal{F}, P_0) = P_0 \vec{O} \times \vec{R}(\mathcal{F}) + \vec{N}(\mathcal{F}, O) = \vec{0}.$$

Enačbo z desne pomnožimo vektorsko z \vec{g} . Potem je natanko, do pomika v smeri $\vec{R}(\mathcal{F})$,

$$\vec{0} = -(\vec{R}(\mathcal{F}) \cdot \vec{g}) P_0 \vec{O} + \left(\sum_{i=1}^n m_i O \vec{P}_i \times \vec{g} \right) \times \vec{g}.$$

Upoštevajmo, da je $\vec{R}(\mathcal{F}) \parallel \vec{g}$. Do pomika do pomika v smeri $\vec{R}(\mathcal{F})$ je tako

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^n m_i P_0 \vec{O} |\vec{g}|^2 - \sum_{i=1}^n m_i O \vec{P}_i |\vec{g}|^2$$

in od tod

$$O\vec{P}_0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n m_i} \sum_{i=1}^n m_i O\vec{P}_i.$$

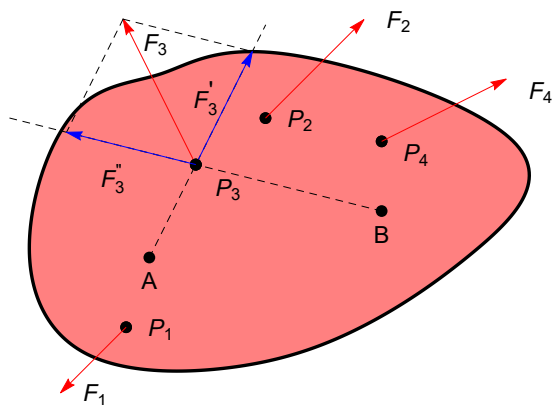
V posebnem primeru, ko je $m_i > 0$ je skupno prijemašče natanko v masnem središču mas m_i , ki imajo položaje P_i .

1.8.2 Redukcija na dve ali tri točke

Pokažimo še, da lahko ravninski (prostorski) sistem sil vedno reduciramo na dve (tri) sile, ki imajo poljubno izbrana prijemašča. Poglejmo prvo ravninski sistem. Naj bo dani sistem

$$\mathcal{F} = \{(P_1, \vec{F}_1), (P_2, \vec{F}_2), \dots, (P_n, \vec{F}_n)\}.$$

Izberimo poljubni dve točki A in B , ki ležita v ravnini prijemašč oziroma sil. Začnimo s silo (P_1, \vec{F}_1) . Če je slučajno P_1 na premici, ki gre skozi A in B , premaknimo P_1 v smeri \vec{F}_1 , da premaknjeno prijemašče ne bo ve"na tej premici. To lahko vedno storimo, če le \vec{F}_1 ni v smeri te premice. Če slučajno je, potem lahko po principu o polznosti (P_1, \vec{F}_1) takoj premaknemo v A ali pa v B . Naj bo torej $\vec{F}_1 \not\parallel \vec{AB}$. Potem iz P_1 potegnemo poltraka v smeri A in B . Silo \vec{F}_1 lahko potem zapišemo kot vsoto dveh sil, ki imata smeri teh dveh poltrakov. Te dve sili po polznosti premaknemo v A in B in s tem smo (P_1, \vec{F}_1) uspeli reducirati na dve sili s prijemaščema v A in B . Enak postopek naredimo še za vse preostale sile.



Slika 1.2: Redukcija ravninskega sistema sil na dve točki. Silo \vec{F}_3 razstavimo na komponenti v smeri vektorjev \vec{AP}_3 in \vec{BP}_3 in jih po polznosti premaknemo v A in B .

Podoben postopek naredimo v prostorskem primeru. Razlika je le v tem, da sedaj potegnemo tri poltrake.

1.9 Ekvivalentnost sistemov sil na osnovi enakosti momentov

Naj bosta \mathcal{F}_1 in \mathcal{F}_2 dva ekvivalentna sistema sil. Po definiciji to pomeni, da je $\vec{R}(\mathcal{F}_1) = \vec{R}(\mathcal{F}_2)$ in $\vec{N}(\mathcal{F}_1, O) = \vec{N}(\mathcal{F}_2, O)$ za poljubno izbrani pol O . Pokažimo sedaj, da sta dva prostorska sistema sil ekvivalentna natanko tedaj, ko imata enaka momenta v polih v štirih nekoplanarnih točkah. Podobna trditev velja za ravninski sistem sil v treh nekolinearnih točkah. V eno smer je trditev

očitna. Pokažimo še drugo smer. Naj bodo P_i , $i = 0, 1, 2, 3$ štiri točke, ki ne ležijo v isti ravnini in naj velja $\vec{N}(\mathcal{F}_1, P_i) = \vec{N}(\mathcal{F}_2, P_i)$ za $i = 0, 1, 2, 3$. Uporabimo enakost

$$\vec{N}(\mathcal{F}, P_i) - \vec{N}(\mathcal{F}, P_0) = \vec{R}(\mathcal{F}) \times P_0\vec{P}_i, \quad i = 1, 2, 3$$

za sistema \mathcal{F}_1 in \mathcal{F}_2 . Ta enakost sledi iz formule, ki pove, kako se navor sistema sil spremeni s spremembo pola. Potem je

$$\vec{R}(\mathcal{F}_1) \times P_0\vec{P}_i = \vec{R}(\mathcal{F}_2) \times P_0\vec{P}_i, \quad i = 1, 2, 3$$

oziroma

$$\left(\vec{R}(\mathcal{F}_1) - \vec{R}(\mathcal{F}_2)\right) \times P_0\vec{P}_i = \vec{0}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.1)$$

saj je $\vec{N}(\mathcal{F}_1, P_i) - \vec{N}(\mathcal{F}_1, P_0) = \vec{N}(\mathcal{F}_2, P_i) - \vec{N}(\mathcal{F}_2, P_0)$. Vektorji $P_0\vec{P}_i$, $i = 1, 2, 3$ tvorijo bazo vektorskega prostora. To pomeni, da lahko vektorja $\vec{R}(\mathcal{F}_k)$, $k = 1, 2$ zapišemo kot linearno kombinacijo te baze in tako tudi,

$$\vec{R}(\mathcal{F}_1) - \vec{R}(\mathcal{F}_2) = \alpha_1 P_0\vec{P}_1 + \alpha_2 P_0\vec{P}_2 + \alpha_3 P_0\vec{P}_3. \quad (1.2)$$

Sistema sta ekvipolentna, če so koeficienti α_i , $i = 1, 2, 3$ vsi enaki nič. Pokažimo, da je to res. Vstavimo (1.2) v (1.1). Potem dobimo

$$\begin{aligned} \alpha_2 P_0\vec{P}_2 \times P_0\vec{P}_1 + \alpha_3 P_0\vec{P}_3 \times P_0\vec{P}_1 &= \vec{0} \\ \alpha_1 P_0\vec{P}_1 \times P_0\vec{P}_2 + \alpha_3 P_0\vec{P}_3 \times P_0\vec{P}_2 &= \vec{0} \\ \alpha_1 P_0\vec{P}_1 \times P_0\vec{P}_3 + \alpha_2 P_0\vec{P}_2 \times P_0\vec{P}_3 &= \vec{0}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Pri izpeljavi (1.3) smo upoštevali, da je $P_0\vec{P}_i \times P_0\vec{P}_i = \vec{0}$. Pomnožimo sedaj prvo enačbo skalarno z $P_0\vec{P}_2$, drugo z $P_0\vec{P}_3$ in tretjo z $P_0\vec{P}_1$ in upoštevajmo, da je mešani produkt $(P_0\vec{P}_1 \times P_0\vec{P}_2) \cdot P_0\vec{P}_3$ različen od nič, saj točke P_i , $i = 0, 1, 2, 3$ ne ležijo v isti ravnini. Ker je po drugi strani mešani produkt z dvema enakima faktorjema enak nič, sledi $\alpha_3 = 0$, $\alpha_1 = 0$ in $\alpha_2 = 0$ in sistema sta res ekvipolentna. Strnimo ugotovljeno v trditve:

Izrek 1. *Dva prostorska(ravninska)sistema sil \mathcal{F}_1 in \mathcal{F}_2 sta ekvipolentna natanko tedaj, ko $\vec{N}(\mathcal{F}_1, P_i) = \vec{N}(\mathcal{F}_2, P_i)$ za štiri(tri) točke P_i , ki ne ležijo na isti ravnini(premici).*

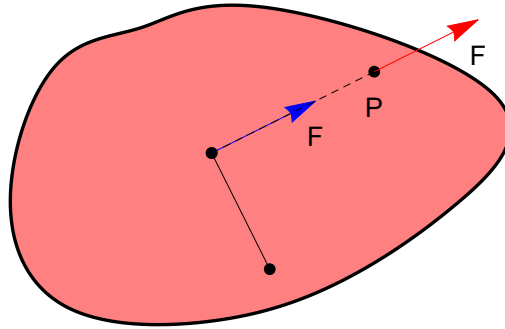
V statiki nas posebej zanimajo ravnovesni sistemi sil. Očitna posledica zgornje trditve je:

Posledica 1. *Prostorski(ravninski) sistema sil \mathcal{F} je ravnovesen natanko tedaj, ko $\vec{N}(\mathcal{F}, P_i) = \vec{0}$ v štirih(treh) točkah P_i , ki ne ležijo na isti ravnini(premici).*

Dokazano lastnost pogostokrat uporabimo pri reševanju nalog statike, še posebej za ravninske naloge, kjer je računanje navora enostavno, saj lahko po principu o polznosti sile vedno dosežemo, da sta ročica in sila med seboj pravokotna, glej sliko 1.3. V tem primeru je velikost navora enaka produktu dolžine ročice in velikosti sile, navor pa je usmerjen po pravilu desnega vijaka. Uporabljamo pa tudi kombinacijo pogoja ravnovesnosti sil in momentov. Naprimer, zahtevamo ravnovesje sil v eni smeri in ravnovesje navorov v treh oziroma dveh polih.

1.10 Osnovna naloga statike

Naj bo \mathcal{F} sistem sil, ki ni v popolnosti določen. Naprimer, znana so vsa prijemališča, niso pa znane vse sile. Ali pa poznamo sile, ne poznamo pa vsa prijemališča. V splošnem pa morda ne poznamo vseh prijemališč in še kakšne sile. Osnovna naloga statike je določiti neznanke sistema sil, tako da bo sistem sil postal ravnovesni sistem sil. Seveda lahko tako nalogo rešimo samo, če ima naloga



Slika 1.3: Polznost sile in računanje navora.

toliko enačb, kot ima neznanek. Enačbe so $\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{0}$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \vec{0}$. To sta vektorski enačbi. V ravninskem primeru je $\vec{R}(\mathcal{F})$ lahko poljubni ravninski vektor, $\vec{N}(\mathcal{F}, O)$ pa ima komponento samo v smeri normale. Potemtakem ima ravninska naloga tri ravnovesne enačbe. Za prostorski sistem sil pa je $\vec{N}(\mathcal{F}, O)$ lahko poljubni prostorski vektor. Tako imamo v tem primeru šest enačb. Če imamo toliko enačb, kolikor je neznanek in je sta sistem enačb enolično rešljiv pravimo, da je naloga *statično določena*. V nasprotnem primeru je naloga *statično nedoločena*. Primer ravninske statično določene naloge je, da poznamo vsa prijemališča, poznamo smeri vseh sil, ne poznamo pa velikosti treh sil. Prostorski primer pa je, poznamo vsa prijemališča in vse sile razen dveh.

V konkretnih primerih pogostokrat poznamo obremenitve togega telesa, ne poznamo pa sile podpor. Tipični primer je naslednja naloga, glej sliko 1.4. Nosilec dolžine a je enostavno podprt na svojih koncih. Levo podporo označimo z A , desno pa z B , silo s prijemališčem v levi podpori zapišemo z \vec{A} , v desnem pa z \vec{B} . Leva podpora je fiksna, desna pa drsna. To pomeni, da leva podpora preprečuje pomik v kateri koli smeri, desna pa dopušča vodoravni pomik. Sila \vec{A} ima tako dve komponenti, sila \vec{B} pa samo vertikalno komponento. Pri dani obremenitvi nosilca je naša naloga, da določimo sili podpor tako, da bo nosilec v statičnem ravnovesju. To pomeni, da iščemo sili podpor \vec{A} in \vec{B} tako, da je sistem sil

$$\mathcal{F} = \{(A, \vec{A}), (B, \vec{B}), (P, \vec{F})\}$$

ravnovesni sistem sil. Tu smo s P zapisali prijemališče obremenitve nosilca. Postavimo koordinatni sistem z izhodiščem v levi podpori, z osjo x v smeri nosilca. Potem so prijemališča $A(0, 0)$, $B(a, 0)$, $P(b, 0)$, sile pa so $\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j}$, $\vec{B} = B_2\vec{j}$ in $\vec{F} = -F\vec{j}$.



Slika 1.4: Enostavno podprt nosilec, levo dvotočkovno, desno trotočkovno podprt.

Enačba ravnovesja sil $\vec{R}(\mathcal{F})$ se po komponentah glasi

$$A_1 = 0, \quad A_2 + B_2 - F = 0.$$

Za ravnovesje momentov moramo prvo izbrati pol. Kam ga postavimo? Lahko kamorkoli, praviloma pa tja, da bo ravnovesni sistem čim enostavnejši. Zato ga postavimo v prijemališče A . Iz

$\vec{N}(\mathcal{F}, A) = \vec{0}$ sledi

$$-bF + aB_2 = 0.$$

Dobili smo tri skalarne enačbe za tri neznanke A_1 , A_2 in B_2 . Iz zadnje enčbe dobimo $B_2 = \frac{b}{a}F$, nato pa še $A_2 = F - B_2 = (1 - b/a)F$ in $A_1 = 0$. V posebnem primeru $b = a/2$ dobimo $A_2 = B_2 = F/2$. Podpori sta enako obremenjeni. To seveda vemo zaradi simetrije tudi brez računanja. Pri nalogah s splošnimi podatki je vedno koristno, če preverimo, ali se izračunana rešitev ujema s tem, kar vemo, da mora veljati.

Naloga pa lahko rešimo tudi takole, zapišemo pogoj ravnovesja sil v vodoravni smeri $A_1 = 0$, nato pa ravnovesje momentov v obeh podporah $\vec{N}(\mathcal{F}, A) = \vec{0}$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, B) = \vec{0}$. Dobimo

$$(a - b)F - aA_2 = 0 \quad -bF + aB_2 = 0.$$

Potem $A_2 = \frac{a-b}{a}F$ in $B_2 = \frac{b}{a}F$, kar se seveda ujema z že izračunano rešitvijo. Razlika med obema načinoma je, da smo po drugi poti dobili takoj neznani vertikalni komponenti sil, po prvi poti pa smo morali rešiti enostavni sistem. Pri tej nalogi ni razlike med obema načinoma, če pa je naloga računsko bolj zahtevna, je boljše, da za ravnovesni pogoj uporabimo ravnovesje navora s polom v prijemališču neznane sile.

Poglejmo si sedaj nalogo trotočkovno podprtega nosilca, slika 1.4. Silo podpore v C označimo z $\vec{C} = C_2\vec{j}$. Ravnovesne enačbe so

$$A_1 = 0, \quad A_2 + B_2 + C_2 = 0, \quad -bF + aC_2/2 + aB_2 = 0.$$

Imamo tri ravnovesne enačbe in sedaj štiri neznanke A_1 , A_2 , B_2 in C_2 . Ker je neznank več kot enačb, sistema ne moremo enolično rešiti, naloga je statično nedoločena. Seveda pa to ne pomeni, da naloga ni smiselna. Še več, če v podporo postavimo silomere, bomo v izvedbi te naloge izmerili sile podpor. Kako je možno, da lahko nekaj izmerimo, ne moremo pa izračunati? Odgovor je v modelu togega telesa. V naravi je vsak nosilec tog samo v okviru modela, v resnici pa se deformira in ta deformacija potem določa sile v podporah. Kako se nosilec deformira bomo spoznali pri Trdnosti. Vidimo, da je model togega telesa omejen, zelo hitro pridemo do statično nedoločenih nalog. Po drugi strani pa je model enostaven in zato omogoča za statično določene naloge rešitev v zaprti obliki. Sposobnost dobrega modeliranja je, da izberemo tak model, ki je izračunljiv in ki dobro opiše pojav.

1.11 Klasifikacija podpor

Pri primeru nosilca smo spoznali dve vrsti podpor, pomično in nepomično. Poglejmo si, kakšne podpore poznamo. Vrsto podpore določa prenos sil in momentov v točki podpora. Poznamo naslednje podpore:

1. *Konzolna oziroma vpeta podpora.* V tem primeru v točki podpore delujejo vse komponente navora in sile. To pomeni, da imamo v ravninski konzolni podpori tri neznanke, v prostorski pa šest. Potemtakem lahko poljubni sistem sil uravnovesimo, če mu dodamo konzolno podporo.
2. *Členkasta podpora.* Ta prenaša vse komponente sil, ne prenaša pa navorov. Ker prenaša vse komponente sil s tem preprečuje pomike v poljubni smeri. Členkasti podpori, ki prenaša vse komponente sil pravimo tudi nepomična členkasta podpora.
3. *Ravninsko pomična členkasta podpora.* Podpora je pomična v smeri ravnine in tako prenaša samo silo v smeri normale na ravnino. Ravninsko pomična podpora nastopa samo v primeru prostorske naloge.

4. Linijsko pomična členkasta podpora. Sedaj je podpora pomična v eni smeri, v preostalih dveh pa ne. Podpora torej prenaša dve komponenti sili, ki sta pravokotni na smer možnega pomika.

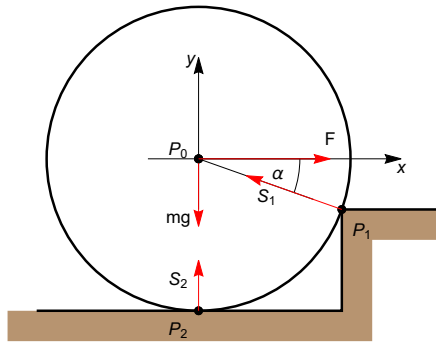
Našteli smo samo osnove vrste podpor. V splošnem podporo določa število v podpori delujočih komponent sile in navora. V ravninskem primeru lahko podpora prenaša nič, eno ali dve komponenti sil in nič ali eno komponento navora. Možno število ravninskih podpor je tako 6. Vendar niso vse prave podpore, saj podpora mora prenašati vsaj eno komponento sil. Tako poznamo 4 prave ravninske podpore, konzolno, fiksno členkasto, pomično členkasto in pomično podporo, ki prenaša vse komponente navora. V prostorskem primeru pa obstaja 12 pravih podpor.

1.12 Osnovni koraki reševanja statičnih nalog

Osnovni koraki reševanja naloge statike togega telesa so

1. Identifikacija vseh sil in njihovih prijemališč. Ta korak je bistven, če spustimo kakšno silo, narobe določimo prijemališča ali napačno predvidimo smer delovanja sil, skoraj gotovo naloge ne bomo pravilno rešili. Reši nas lahko samo poseben primer, ko napačna identifikacija ne vpliva na rešitev. V veliko pomoč pri pravilni identifikaciji sil in prijemališč je dobra in pregledna skica naloge. Določene sile opredeljuje že besedilo naloge, nekatere sile pa lahko pravilno identificiramo samo če pravilno razumemo nalogo.
2. Postavitev koordinatnega sistema, vektorski zapis sil in koordinat prijemališč. Pri tem koraku je bistveno, da postavimo tak koordinatni sistem, ki je skladen s problemom. Nerodno postavljeni KS lahko bistveno oteži računski del naloge.
3. Sledi zapis ravnovesnih enačb. Kot smo videli v primeru enostavno podprtega nosilca, imamo tu več možnosti. Praviloma se računski del poenostavi, če uporabimo ravnovesje navorov v polih, ki so v prijemališčih neznanih sil. Potem ko zapišemo ravnovesne enačbe, preštejemo neznanke. Če je neznanek več kot je enačb, je sistem statično nedoločen. V tem primeru reševanje naloge prekinemo, ali pa dodamo novo enačbo. Seveda nove enačbe ne smemo dodati kar tako, ampak jo moramo utemeljiti. Naprimer, pri nalogah s simetrijo pričakujemo, da je tudi rešitev simetrična. Pri simetrični nalogi za trotočkovno obremenjen nosilec tako lahko predpostavimo, da so sile podpor enake. Če je neznanek manj kot je enačb, je naloga predoločena. Konkretno, dani sistem sil ne moremo uravnovesiti s silo s prijemališčem v predpisani točki, ki ni skupno prijemališče sistema sil. Razlog za predoločen sistem je lahko napaka v identifikaciji sil, lahko pa je tudi naloga napačno zastavljena.
4. Če imamo toliko neznanek kot je enačb, sledi reševanje sistema. Vendar pozor. Čeprav ima naloga toliko enačb kot neznanek, to še ne zagotavlja, da je naloga enolično rešljiva. Naprimer, če ima sistem sil skupno prijemališče je momentna enačba s polom v skupnem prijemališču trivialna $\vec{0} = \vec{0}$. Če smo zapisali momentno enačbo v polu, ki ni skupno prijemališče, enačba ni trivialna. Vendar pa so ravnovesne enačbe ekvivalentne enačbam, kjer je pol skupno prijemališče in zato ta naloga ni enolično rešljiva, če ima v ravninskem primeru dve oziroma v prostorskem tri neznanke.
5. Po rešitvi ravnovesnega sistema je na mestu analiza rezultata. Velja preveriti, ali se rešitev kvalitativno ujema s pričakovanim rezultatom. Čeprav rešitve ne poznamo, pogostokrat vemo v naprej, kam so naprimer usmerjene neznane sile. Če v nalogi nastopajo parametri, lahko preverimo ali limitne vrednosti teh parametrov dajo pričakovani rezultat. V primeru, če smo nalogo rešili za konkretna števila, je kontrola rezultata tudi dimenzijska skladnost rešitve.

Primer 1. Določi najmanjšo silo, ki povleče kolo z maso m in polmerom r_0 čez robnik višine h .



Slika 1.5: Potisk kolesa čez robnik.

- Prvi korak je določitev sil. Prvo obravnavajmo silo teže. Na vsak delček kolesa dm deluje sila teže $dm\vec{g}$, kjer je \vec{g} pospešek težnosti. Sistem teh sil je sistem vzporednih sil. Kot že vemo, ima ta sistem vzporednih sil skupno prijemališče v masnem središču, ki je za homogeno kolo v njenem središču P_0 . To bomo v nadaljevanju vedno upoštevali, na togo telo deluje sila teže kot točkovna sila $m\vec{g}$ s prijemališčem v masnem središču. Nadalje deluje na kolo vlečna sila \vec{F} . Privzeli bomo, da je ta sila v vodoravni smeri v višini kolesa. Po polznosti lahko potem prijemališče premaknemo v središče kolesa. Robnik se upira vlečenju kolesa. Robnik in kolo se dotikata v eni točki in tako ima sila robnika na kolo prijemališče v tej točki, ki jo označimo s P_1 . Razmislimo še o smeri sili robnika. Ena komponenta sile robnika je v smeri, ki je pravokotna na krog v P_1 , druga pa v obodni smeri. Hitro vidimo, da je obodna komponenta enaka nič. Neničelna obodna komponenta bi kolo zavrtela in je tako lahko prisotna samo, če kolo čez robnik potisne moment kolesa. To pa je že druga naloga, saj v naši nalogi deluje samo sila vlečenja. Sila robnika na kolo \vec{S}_1 tako kaže v smeri od prijemališča P_1 do središča kolesa. Na vrsti je razmislek o sili podlage na kolo. Dokler je kolo v kanalu, se kolo dotika dna kanala v točki P_2 in v tej točki deluje sila podlage \vec{S}_2 v navpični smeri. Večja je sila vlečenja, manjša je sila podlage in v določenem trenutku je sila podlage \vec{S}_2 enaka nič. Iščemo torej tako vlečno silo \vec{F} , da bo $\vec{S}_2 = \vec{0}$. S tem smo zaključili identifikacijo sil. Dobili smo sistem štirih sil. Posebnost tega sistema je, da lahko vse te sile po polznosti prestavimo v središče kolesa. Sistem sil je tako sistem s skupnim prijemališčem.
- Sledi postavitve koordinatnega sistema. Najenostavnejše je, če izhodišče postavimo v središče kolesa, os x usmerimo vodoravno, os y pa navpično. Potem je

$$\vec{F} = F\vec{i}, \quad m\vec{g} = -mg\vec{j}, \quad \vec{S}_1 = S_1(-\cos\alpha\vec{i} + \sin\alpha\vec{j}), \quad \vec{S}_2 = S_2\vec{j}.$$

Tu smo z α označili kot med smerjo P_0P_1 in osjo x . Kot α lahko izrazimo s podatkom, polmer kolesa in višina robnika. Iz slike vidimo $\sin\alpha = (r - h)/r$. Tu smo predpostavili, da je $h \leq r$, saj če je robnik previsok, kolesa z vodoravno vlečno silo s prijemališčem v višini središča kolesa ne moremo potegniti čez robnik.

- Zapišimo ravnovesne enačbe. Ker ima naloga sistem sil s skupnim prijemališčem, je edina ravnovesna enačba ravnovesje sil $\vec{F} + m\vec{g} + \vec{S}_1 = \vec{0}$. Tu smo že upoštevali, da je v trenutku dviga kolesa $\vec{S}_2 = \vec{0}$. V komponentnem zapisu je potem

$$F - S_1 \cos\alpha = 0, \quad -mg + S_1 \sin\alpha = 0.$$

Imamo dve enačbi. Kaj so neznanke? Ne poznamo F , S_1 . Imamo torej dve enačbi in dve neznanke. Naloga je statično določena.

4. Sistem brez težav rešimo. Iz druge enačbe sledi $S_1 = mg/\sin \alpha$ in potem iz prve

$$F = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} mg.$$

5. Analizirajmo rezultat. Vlečna sila je sorazmerna sili teže. To je pričakovan rezultat. V primeru, če ni robnika, $h = 0$, je $\alpha = \pi/2$. Vlečna sila je v tem primeru enaka nič, kar mora tudi biti, saj ni robnika. Z višino robnika narašča vlečna sila in s $h \rightarrow r$ gre proti neskončnosti. To se ujema z dejstvom, da kolesa ne moremo povleči čez robnik višine r .

1.13 Vprašanja in naloge

1.13.1 Vprašanja

1. Za tri točke na premici določi tri sile s temi prijemališči tako da bo dobljen sistem sil:
 - ravnovesen;
 - dvojica;
 - sistem s skupnim prijemališčem.
2. Ali je lahko ravninski sistem dinama?
3. Definiramo presek dveh sistemov sil kot presek dveh množic.
 - Ali je presek dveh ravnovesnih sistemov tudi ravnovesni sistem?
 - Poišči primer, ko je presek dveh dvojic tudi dvojica. Ali je lahko presek dveh dvojic sistem sil, ki ni dvojica, niti ravnovesni sistem?
4. Ali lahko
 - dvojici
 - dinamidodamo silo tako, da bo novi sistem sil ravnovesni sistem?
5. Zapiši poljubni ravninski sistem treh sil. Izberi še dve točki in reduciraj sistem sil na sistem dveh sil s prijemališčema v teh dveh točkah.
6. Za ravninski sistem sil \mathcal{F} naj velja $\vec{N}(\mathcal{F}, P_1) = \vec{N}(\mathcal{F}, P_2) = \vec{0}$. Kaj lahko poveš za $\vec{R}(\mathcal{F})$? Ali je $\vec{R}(\mathcal{F}) \cdot \vec{n} = 0$, kjer je $\vec{n} \perp P_1P_2$.
7. Za trotočkovno podprti nosilec zapiši ravnovesne enačbe, vsota sil v navpični smeri in ravnovesje momentov s poli v krajiščih nosilca A in B . Dodaj še ravnovesje momenta v polu C . Kaj lahko ugotoviš za ta sistem štirih enačb za štiri neznanke?
8. Najdi še svoj primer statično nedoločene naloge.
9. Izračunaj silo podore in momenta v konzolno vpetemu nosilcu.
10. Določi navor, ki dvigne kolo čez robnik.

1.13.2 Naloge

1. Dan je ravninski sistem sil $\mathcal{F} = \{(P_1, \vec{F}_1), (P_2, \vec{F}_2), (P_3, \vec{F}_3), (P_4, \vec{F}_4)\}$, kjer imajo prijemališča sil koordinate $P_1 = (0, 2a)$, $P_2 = (a, -2a)$, $P_3 = (2a, -a)$, $P_4 = (-2a, -2a)$, sile pa so $\vec{F}_1 = F_0(-2\vec{i} - \vec{j})$, $\vec{F}_2 = F_0(3\vec{i} - 2\vec{j})$, $\vec{F}_3 = 2F_0\vec{i}$, $\vec{F}_4 = F_0(-2\vec{i} - 2\vec{j})$.

- Izračunaj rezultanto sistema sil.
- Izračunaj rezultanto navora sistema sil glede na pol v koordinatnem izhodišču.
- Izračunaj invarianto sistema sil.
- Določi os sistema.

Rešitev:

- Rezultanta sistema sil je $\vec{R}(\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^4 \vec{F}_i = F_0(\vec{i} - 5\vec{j})$.
- Izračunajmo

$$\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \sum_{i=1}^4 \vec{OP}_i \times \vec{F}_i = 4aF_0\vec{k} + 4aF_0\vec{k} + 2aF_0\vec{k} + 0aF_0\vec{k} = 10aF_0\vec{k}.$$

- Invarianta sistema sil je enaka nič, ker je sistem ravninski. Ker je rezultanta sil različna od nič, sistem sil ni dvojica in ima skupno prijemališče, ki leži na osi sistema.
- Os sistema je premica v smeri $\vec{R}(\mathcal{F})$, ki gre skozi točko P_0 dano s krajevnim vektorjem

$$\vec{OP}_0 = \frac{\vec{R}(\mathcal{F}) \times \vec{N}(\mathcal{F}, O)}{\vec{R}(\mathcal{F}) \cdot \vec{R}(\mathcal{F})} = \frac{5a}{13}(-5\vec{i} - \vec{j}).$$

2. Podan je prostorski sistem sil $\vec{F}_1 = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{F}_2 = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{F}_3 = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, s prijemališči v točkah $P_1(1, 2, 1)$, $P_2(-1, 0, 1)$, $P_3(1, -1, 0)$.

- Izračunaj rezultanto sistema sil.
- Izračunaj rezultanto navora sistema sil glede na pol v koordinatnem izhodišču.
- Izračunaj invarianto sistema sil.
- Določi os sistema.

Rešitev:

- Rezultanta sistema sil je $\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 2\vec{i} + 2\vec{k}$.
- Izračunajmo

$$\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \sum_{i=1}^3 \vec{OP}_i \times \vec{F}_i = (\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}) + (\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}) + (-\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}.$$

- Invarianta sistema sil je $I(\mathcal{F}) = \vec{R}(\mathcal{F}) \cdot \vec{N}(\mathcal{F}, O) = 0$. Ker je $I(\mathcal{F}) = 0$ in $\vec{R}(\mathcal{F}) \neq \vec{0}$, ima sistem sil skupno prijemališče, ki leži na osi sistema.
- Os sistema je premica v smeri $\vec{R}(\mathcal{F})$, ki gre skozi točko P_0 dano s krajevnim vektorjem

$$\vec{OP}_0 = \frac{\vec{R}(\mathcal{F}) \times \vec{N}(\mathcal{F}, O)}{\vec{R}(\mathcal{F}) \cdot \vec{R}(\mathcal{F})} = -\frac{3}{4}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{3}{4}\vec{k}.$$

Kratek račun

$$\vec{N}(\mathcal{F}, P_0) = P_0\vec{O} \times \vec{R}(\mathcal{F}) + \vec{N}(\mathcal{F}, O) = \vec{0}$$

potrdi, da je P_0 res skupno prijemališče sil.

3. Podan je sistem sil $\vec{F}_1 = F_0(3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})$, $\vec{F}_2 = F_0(-3\vec{j} + \vec{k})$, $\vec{F}_3 = F_0(-2\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k})$ s prijemališči v točkah $P_1(a, 0, a)$, $P_2(2a, 2a, -2a)$, $P_3(-a, 0, 0)$. Dodaj sistemu silo (P_4, \vec{F}_4) tako, da razširjeni sistem sil imel skupno prijemališče v točki $P_0(a, -a, a)$.

Rešitev: Računali bomo brezdimenzijsko, z $a = 1$ in $F_0 = 1$. Za vrnitev v dimenzijski zapis, sile pomnožimo z F_0 , položaje z a , navore pa z aF_0 . Označimo dani sistem sil s \mathcal{F} in izračunajmo $\vec{N} = \vec{N}(\mathcal{F}, P_0)$. Imamo

$$\vec{N} = \left((\vec{i} - 3\vec{k}) + (-6\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}) + (-4\vec{j} - 4\vec{k}) \right) = (-5\vec{i} - 5\vec{j} - 10\vec{k}).$$

Sistemu sil moramo dodati (P_4, \vec{F}_4) tako, da bo $\overrightarrow{P_0P_4} \times \vec{F}_4 = -\vec{N}$, saj bo potem za razširjeni sistem sil $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cup \{(P_4, \vec{F}_4)\}$ veljalo $\vec{N}(\mathcal{G}, P_0) = \vec{0}$.

Enačba $\overrightarrow{P_0P_4} \times \vec{F}_4 = -\vec{N}$ ima več rešitev. Izberimo P_4 in \vec{F}_4 tako, da bodo vektorji $\overrightarrow{P_0P_4}$, \vec{F}_4 in \vec{N} med seboj paroma pravokotni. Izberimo prvo $\overrightarrow{P_0P_4} = (3\vec{i} + \vec{j} + x\vec{k})$ in določimo x tako, da bo

$$0 = \overrightarrow{P_0P_4} \cdot \vec{N} = -20 - 10x.$$

Rešitev enačbe je $x = -2$ in tako $\overrightarrow{P_0P_4} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$. Sila \vec{F}_4 je v smeri $\overrightarrow{P_0P_4} \times \vec{N}$. Potem

$$\vec{F}_4 = f \overrightarrow{P_0P_4} \times \vec{N} = 10f (-2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}),$$

kjer je f neznanka, ki jo določimo s pogoja

$$-\vec{N} = \overrightarrow{P_0P_4} \times \vec{F}_4 = f \overrightarrow{P_0P_4} \times (\overrightarrow{P_0P_4} \times \vec{N}) = -f |\overrightarrow{P_0P_4}|^2 \vec{N} = -14f \vec{N}.$$

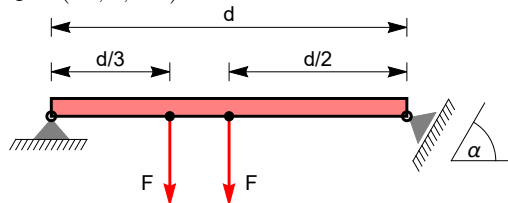
Torej $f = 1/14$. Tu smo uporabili formulo $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ in upoštevali, da sta $\overrightarrow{P_0P_4}$ in \vec{N} med seboj pravokotna. Dodana sila je tako

$$\frac{5F_0}{7} (-2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k})$$

s prijemališčem v

$$P_4 = P_0 + \overrightarrow{P_0P_4} = (4a, 0, -a).$$

4. Nosilec dolžine d je podprt tako kot kaže skica. Leva podpora je nepomična, desna pa je drsna v smeri ki oklepa kot $\alpha = \pi/3$. Za dano obremenitev določi sile v podporah.



Rešitev: Postavimo koordinatni sistem z izhodiščem v levi podpori in usmerimo os x v smeri nosilca, os y pa navpično navzgor. Silo leve podpore označimo z $\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j}$, silo desne podpore pa z \vec{B} . Ker je desna podpora drsna, je smer sile \vec{B} določena, neznana je samo njena velikost. Sila \vec{B} oklepa z navpičnico kot α . Potem je $\vec{B} = B(-\sin \alpha \vec{i} + \cos \alpha \vec{j})$. Nosilec je obremenjen v točkah $P_1(d/3, 0)$ in $P_2(d/2, 0)$.

Sile podpor določimo iz ravnovesnih enačb. Rezultanta navorov sistema sil s polom v desni podpori je enak nič. Velja torej

$$-dA_2 + \frac{d}{2}F + \frac{2d}{3}F = 0.$$

Od tod sledi $A_2 = \frac{7}{6}F$. Rezultanta navorov s polom v levi podpori je prav tako enaka nič. Potem

$$-\frac{d}{3}F - \frac{d}{2}F + B \cos \alpha = 0.$$

Rešitev je

$$B = \frac{5F}{6 \cos \alpha} = \frac{5F}{3}.$$

Komponento A_1 določimo iz ravnovesnega pogoja, da je vsota vseh sil v vodoravni smeri enaka nič.

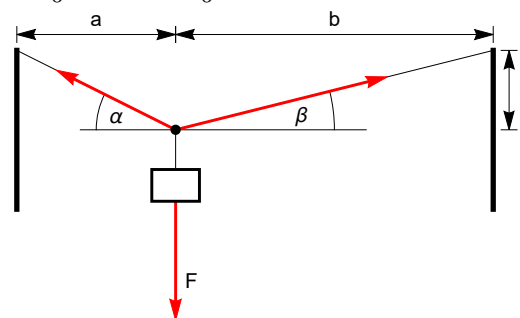
$$A_1 - B \sin \alpha = 0 \implies A_1 = B \sin \alpha = \frac{5F}{6} \tan \alpha = \frac{5\sqrt{3}}{6}F.$$

Za kontrolo lahko še preverimo, da je tudi vsota sil v navpični smeri enaka nič. Res,

$$A_2 - F - F + B \cos \alpha = \frac{7}{6}F - 2F + \frac{5F}{6} = 0.$$

5. Na žico med dvema stebroma je obešena utež tako kot kaže skica. Določi sili žic.

Rešitev: Silo leve žice označimo z F_1 , desno z F_2 . Sistem sil F , F_1 in F_2 ima skupno prijemališče v točki obremenitve. Ravnovesna enačba je ravnovesje sil $\vec{F} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$. Potem je po komponentah



$$F_1 \cos \alpha = F_2 \cos \beta, \quad F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \beta = F.$$

Tu sta α in β kota, ki ju žici oklepata z vodoravno smerjo. Potem je $F_2 = F_1 \cos \alpha / \cos \beta$ in

$$F = F_1 (\sin \alpha + \cos \alpha \sin \beta / \cos \beta) = F_1 \sin(\alpha + \beta) / \cos \beta.$$

Sili žic sta tako

$$F_1 = \frac{\cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad \text{in} \quad F_2 = \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Če upoštevamo, da je

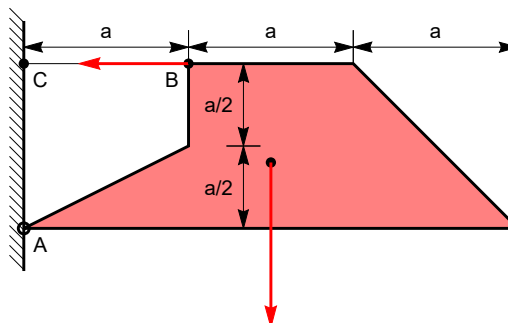
$$\sin \alpha = \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}}, \quad \sin \beta = \frac{h}{\sqrt{b^2 + h^2}}, \quad \cos \beta = \frac{b}{\sqrt{b^2 + h^2}},$$

dobimo

$$F_1 = \frac{bF\sqrt{a^2 + h^2}}{ah + bh}, \quad F_2 = \frac{aF\sqrt{b^2 + h^2}}{ah + bh}.$$

6. Homogena plošča s površinsko gostoto ρ , glej skico, je v točki A vpeta na steno s tečajem A , v točki B pa je pripeta z vodoravno vrstico BC .

- Izračunaj koordinati masnega središča plošče.
- Določi silo podpore v A in silo vrvice BC .



Rešitev: Postavimo izhodišče koordinatnega sistemav točko A . Plošča je sestavljena iz treh likov, levi trikotnik, kvadrat in desni trikotnik. Za izračun masnega središča sestavimo tabelo:

Lik	x_*	y_*	A
Levi trikotnik	$\frac{2}{3}a$	$\frac{1}{6}a$	$\frac{1}{4}a^2$
Kvadrat	$\frac{3}{2}a$	$\frac{1}{2}a$	a^2
Desni trikotnik	$\frac{7}{3}a$	$\frac{1}{3}a$	$\frac{1}{2}a^2$

Ploščina lika je $\frac{7}{4}a^2$, koordinati masnega središča pa sta

$$x_* = \frac{4}{7a^2} \left(\frac{2}{3}a \frac{1}{4}a^2 + \frac{3}{2}aa^2 + \frac{7}{3}a \frac{1}{2}a^2 \right) = \frac{34}{21}a$$

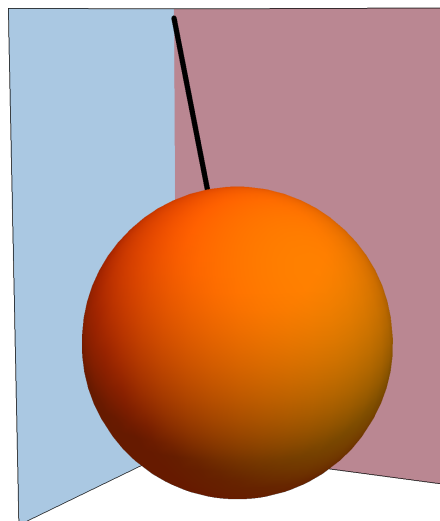
in

$$y_* = \frac{4}{7a^2} \left(\frac{1}{6}a \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}aa^2 + \frac{1}{3}a \frac{1}{2}a^2 \right) = \frac{17}{42}a.$$

Določimo sedaj iskane sile. Označimo z A_x in A_y komponenti sile podpore v A v smeri osi x in y , z F pa silo vrvice. Sila teže je $F_g = mg = \rho Ag = \frac{7}{4}\rho a^2 g$, kjer je ρ ploščinska gostota. Para sil $\{A_x \vec{i}, -F \vec{i}\}$ in $\{A_y \vec{j}, -F_g \vec{j}\}$ sta dvojici. Potem je $A_x = F$, $A_y = F_g$. Nadalje iz ravnovesja navora v točki A sledi $aF - x_* F_g = 0$. Potem $F = \frac{17}{6}\rho g a^2$ in tako

$$A_x = \frac{17}{6}\rho g a^2, \quad A_y = \frac{7}{4}\rho a^2 g.$$

7. Homogena krogla s polmerom a in z maso m visi pripeta na vrvico dolžine l v vogalu med dvema pravokotnima stenama tako kot kaže skica. Določi silo vrvice.



Rešitev: Postavimo koordinatni sistem z osjo z navpično navzdol v smeri sile teže, osi x in y pa v smeri sten. Na kroglo deluje sila teža \vec{F} , sila vrvice \vec{S} in sili sten \vec{A}_1 in \vec{A}_2 . Sili sten sta pravokotni na steni. Očitno ima ta sistem sil skupno prijemašče, ki je v središču krogle. Ravnovesni pogoj iz katerega bomo določili silo vrvice je pogoj, da je vsota vseh sil enaka nič. Koordinatni zapis sil je $\vec{F} = mg\vec{k}$, $\vec{A}_1 = A_1\vec{j}$, $\vec{A}_2 = A_2\vec{i}$. Zapisati moramo še silo vrvice.

Ta je v smeri od središča krogle $P_0(a, a, \sqrt{(l+a)^2 - 2a^2})$ do koordinatnega izhodišča O , kjer je vrvica pripeta v vogal. Pri določitvi središča krogle smo upštevali, da je razdalja od središča krogle do O enaka $l+a$. Sila vrvice je potem enaka

$$\vec{S} = -\frac{S}{l+a}(a\vec{i} + a\vec{j} + \sqrt{(l+a)^2 - 2a^2}\vec{k}).$$

Iz pogoja $\vec{F} + \vec{S} + \vec{A}_1 + \vec{A}_2 = \vec{0}$ dobimo sistem

$$\begin{aligned} A_2 - \frac{aS}{l+a} &= 0 \\ A_1 - \frac{aS}{l+a} &= 0 \\ mg - \frac{S}{l+a}\sqrt{(l+a)^2 - 2a^2} &= 0. \end{aligned}$$

Rešitev je

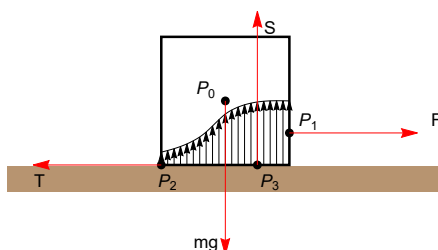
$$S = mg \frac{l+a}{\sqrt{(l+a)^2 - 2a^2}}, \quad A_1 = A_2 = mg \frac{a}{\sqrt{(l+a)^2 - 2a^2}}.$$

Vidimo, krajša je vrvica, večje so sile. V limiti $l \rightarrow a(\sqrt{2} - 1)$ gredo sile čez vse meje.

Poglavje 2

Trenje

Po vodoravni podlagi enakomerno vlečemo kvader s težo $m\vec{g}$, glej sliko 2.1. Na kvader deluje sila teže s prijemališčem v masnem središču P_0 , vlečna sila \vec{F} s prijemališčem v P_1 in sila podlage. Tu smo se zaradi enostavnosti omejili na ravninski primer. Prostorski primer lahko reduciramo na ravninski primer, na ravnino, ki vsebuje prijemališči vlečne sile in sile teže. Podlaga in kvader se dotikata vzdolž stične ploskve, zato je sila podlage površinska sila, to pomeni, da nastopa v vsaki stični točki. Silo razstavimo na dve komponenti vertikalno in vodoravno. Vodoravno komponento lahko po polnosti prestavimo v točko P_2 , glej sliko. Njihovo rezultanto označimo s \vec{T} . Vertikalne komponente tvorijo sistem vzporednih sil. Kot vemo ima sistem vzporednih sil skupno prijemališče. Označimo ga z P_3 , rezultanto pa z \vec{S} . Ker se kvader giblje enakomerno, veljajo ravnovesne enačbe ali povedano drugače sistem sil je ravnovesen. Rezultanti sil v vodoravni in vertikalni smeri sta enaki nič. To pomeni, da sta para sil $\{(P_1, \vec{F}), (P_2, \vec{T})\}$ in $\{(P_0, m\vec{g}), (P_3, \vec{S})\}$ dvojici. Prva dvojica ima tendenco, da se kvader prevaga, druga dvojica pa to preprečuje. Višje je prijemališče vlečne sile, bolj proti desni se pomakne prijemališče P_3 in ko doseže rob se kvader prekucne. Dvojici sta v ravnovesju in to ravnovesje določa položaj prijemališča sile \vec{S} . Za dano vlečno silo smo dobili tri



Slika 2.1: Kvader na vodoravni podlagi.

ravnovesne enačbe za tri neznanke, velikosti sil \vec{T} in \vec{S} in položaj prijemališča sile \vec{S} . Ta sistem enačb je enolično rešljiv. To pomeni, da lahko kvader enakomerno vlečemo s poljubno vlečno silo. To pa ni res, eksperimentalno dejstvo je, da lahko kvader enakomerno vlečemo samo z določeno vlečno silo. To dejstvo je *Coulombov zakon trenja*, ki imenuje vodoravno rezultanto sile podlage \vec{T} silo trenja, za kater velja

- sila trenja ima smer nasprotno od smeri gibanja;
- velikost sile trenja je sorazmerna vertikalni, pravimo ji tudi normalni, rezultanti sile podlage, z enačbo

$$|\vec{T}| = k |\vec{S}|.$$

Tabela 2.1: Tabela koeficientov trenja

material/material	suho	mokro
aluminij/jeklo	0.61	
lito železo/baker	1.05	
beton/guma	1.0	0.3
beton/les	0.62	
les/les	0.25 - 0.5	0.2
teflon/teflon	0.04	

Koeficient k imenujemo koeficient trenja.

V našem primeru je $S = |\vec{S}| = mg$ in potem $F = |\vec{F}| = |\vec{T}| = kmg$. Enakomerno gibanje je možno samo pri tej vlečni sili. Če je vlečna sila večja, se kvader giblje pospešeno, pri manjši pa kvader miruje.

Vprašajmo se, od česa je odvisen koeficient k . Eksperimentalno dejstvo je, da je k odvisen samo od hrapavosti stičnih ploskev, kvadra in podlage in je neodvisen od površine stične ploskve ali hitrosti gibanja. Seveda velja to samo pri določenih pogojih, pravimo jim normalnih pogojih. Po drugi strani ima zelo majhna stična ploskev veliko obrabo površin, kar seveda vpliva na hrapavost in s tem na koeficient trenja k . Nadalje na koeficient vpliva tudi temperatura, in pri trenju pride do segrevanja, kar pav tako lahko vpliva na k . V nadaljevanju se bomo omejili na normalne pogoje, kjer teh vplivov ne upoštevamo. Vrednosti koeficientov trenja so dane v tabeli 2.1.

Trenje, ki smo ga spoznali imenujemo tudi dinamično trenje, ker nastopa pri gibanju. Poznamo pa tudi trenje, imenujemo ga oprijemalno ali statično trenje, ki nastopa pri mirovanju. Naj tako kot prej na ravni podlagi stoji kvader. Kvader povlecimo, sprva z majhno silo. Kvader se ne premakne. Silo vlečenja uravnovesi sila, ki ji pravimo oprijemalno trenje. Silo vlečenja povečujemo in v trenutku, ko se kvader premakne razmerje velikosti sil T/mg označimo z k_l . Koeficientu k_l pravimo koeficient lepenja, ki je praviloma nekoliko večji kot sila trenja. To vemo iz vsakdanje izkušnje, če želimo nekaž premakniti, se gibanje prične s sunkom, sila s katero smo uspeli premakniti je nekoliko večja, kot je sila potrebna za enakomerno gibanje. Razlika pa ni velika, je v okviru natančnosti izmere koeficienta trenja, zato v nadaljevanju ne bomo delali razlike med obema koeficientoma.

2.1 Klada na klanecu

Olejmo si naslednji primer. Po klanecu z naklonskim kotom α dvigujemo oziroma spuščamo klado z maso m s silo \vec{F} , glej sliko 2.2. Sila \vec{F} oklepa s strmino klanca kot β , $|\beta| < \pi/2$. Naša naloga je določiti velikost sile \vec{F} , da se bo klada gibala enakomerno. Če bo velikost sile manjša od te izračunane vrednosti bo klada mirovala, če bo večja se bo klada gibala pospešeno.



Slika 2.2: Klada na klanecu. Levo: dvigovanje klade; desno: spuščanje klade.

Na klado delujejo sile \vec{F} , sila teže $m\vec{g}$, normalna sila podlage \vec{S} in sila trenja \vec{T} . Postavimo

koordinatni sistem z osjo x v smeri klanca, glej sliko. Potem je

$$m\vec{g} = mg(-\sin\alpha\vec{i} - \cos\alpha\vec{j}) \quad \text{in} \quad \vec{S} = S\vec{j}.$$

V primeru dvigovanja je

$$\vec{F} = F(\cos\beta\vec{i} - \sin\beta\vec{j}) \quad \text{in} \quad \vec{T} = -T\vec{i} \quad (2.1)$$

pri spuščanju pa

$$\vec{F} = F(\cos\beta\vec{i} - \sin\beta\vec{j}) \quad \text{in} \quad \vec{T} = T\vec{i}. \quad (2.2)$$

Primeri lahko obravnavamo enotno, če zapišemo (2.1-2.2) v obliki

$$\vec{F} = F(\cos\beta\vec{i} - \sin\beta\vec{j}) \quad \text{in} \quad \vec{T} = -aT\vec{i},$$

kjer je $a = 1$ za dvigovanje in $a = -1$ za spuščanje.

Ravnovesni enačbi sta ravnovesje sil in navorov. Prijemališče normalne sile podlage \vec{S} ni znano v naprej. Določa ga ravnovesje momentov. Ker nas zanima sila \vec{F} , se bomo omejili samo na ravnovesje sil. Ta situacija je pri nalogah s trenjem tipična. Če nas ne zanima prijemališče normalne sile podlage, zapišemo in rešujemo samo ravnovesne enačbe za sile. Iz vektorske enačbe

$$\vec{F} + m\vec{g} + \vec{S} + \vec{T}$$

dobimo enačbe po komponentah

$$0 = -mg\sin\alpha + F\cos\beta - aT,$$

$$0 = -mg\cos\alpha - F\sin\beta + S.$$

V prvo enačbo vstavimo Coulombov zakon $T = kS$. Tako dobimo dve enačbi za neznanke F in S . Iz druge enačbe izrazimo $S = F\sin\beta + mg\cos\alpha$ in vstavimo v prvo enačbo $T = kS$. Potem je

$$0 = -mg\sin\alpha + F\cos\beta - ka(F\sin\beta + mg\cos\alpha).$$

Od tod sledi

$$F = \frac{mg(\sin\alpha + ka\cos\alpha)}{\cos\beta - ka\sin\beta}. \quad (2.3)$$

Tu smo privzeli, da je imenovalec različen od nič. Koeficient trenja k zapišemo v obliki $k = \tan\alpha_0$. Kotu α_0 pravimo *torni kot*. Njegovo poimenovanje bomo v kratkem razkrili. Pomnožimo (2.3) z $\cos\alpha_0$. Potem je

$$F = \frac{mg(\sin\alpha\cos\alpha_0 + a\cos\alpha\sin\alpha_0)}{\cos\beta\cos\alpha_0 - a\sin\beta\sin\alpha_0}. \quad (2.4)$$

Sedaj upoštevajmo, da za $a = \pm 1$ velja $a\sin\alpha_0 = \sin(a\alpha_0)$ in $\cos\alpha_0 = \cos(a\alpha_0)$. Potem iz (2.4) sledi

$$F = mg \frac{(\sin\alpha\cos(a\alpha_0) + \cos\alpha\sin(a\alpha_0))}{\cos\beta\cos(a\alpha_0) - \sin\beta\sin(a\alpha_0)} = mg \frac{\sin(\alpha + a\alpha_0)}{\cos(\beta + a\alpha_0)}. \quad (2.5)$$

V zadnji enakosti smo upoštevali adicijska izreka za \sin in \cos .

Analizirajmo dobljeno formulo. Privzemimo, da klado dvigujemo. Potem je $a = 1$ in

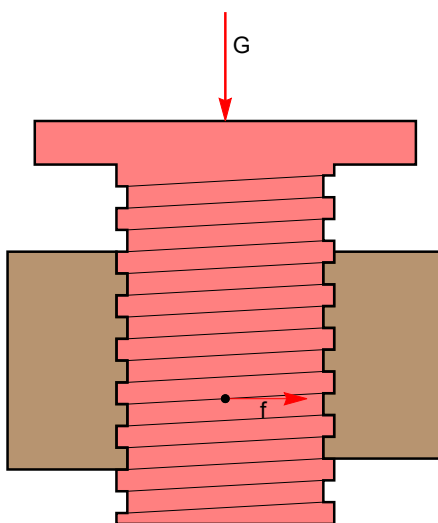
$$F = mg \frac{\sin(\alpha + \alpha_0)}{\cos(\beta + \alpha_0)}. \quad (2.6)$$

Iz formule vidimo, da za vlečenje kot β ne sme biti prevelik, veljati mora $-\pi/2 < \beta + \alpha_0 < \pi/2$. Za spuščanje je $a = -1$ in

$$F = mg \frac{\sin(\alpha - \alpha_0)}{\cos(\beta - \alpha_0)}. \quad (2.7)$$

Opazimo, da je za $\alpha = \alpha_0$ sila F enaka nič. Pri tem kotu torej klada na katero ne deluje sila bodisi miruje, bodisi se enakomerno spušča. Torni kot potemtakem lahko določimo s počasnim večanjem kota strmine α . Začnemo z $\alpha = 0$. Klada miruje. Povečamo kot, klada še vedno miruje, slej ko prej, pa pri dovolj velikem kotu zdrсне. Najmanjši kot pri katerem zdrсне je torni kot α_0 , ki določa koeficient trenja $k = \tan\alpha_0$.

2.2 Vijačna dvigalka



Slika 2.3: Vijačna dvigalka, dvigovanje bremena.

Vijak zavrt v ohišje se pri vrtenju dviguje ali spušča. Zanima nas s kolikšnim navorom moramo delovati na vijak, da bomo enakomerno dvignili ali spustili vijak, ki je osno obremenjen s silo \vec{G} , glej sliko 2.3. Kot bomo videli, je iskani navor odvisen od polmera vijaka r_0 in strmine vijačnice, naklonskega kota α . Pri vrtenju navoj vijaka drsi ob navoj ohišja oziroma matice, tako da na tem stiku deluje sila trenja. Koeficient trenja označimo s $k = \tan \alpha_0$, kjer je α_0 torni kot. Celotna obremenitev vijaka se razporedi po dolžini l skupnega navoja vijaka in ohišja. Zapišimo $\vec{G} = l\vec{g}$, kjer je \vec{g} dolžinska gostota obremenitve. Na navor \vec{N} , ki deluje na vijak lahko gledamo kot na dvojico. Tej dvojici priredimo sistem sil, ki so po velikosti enake in porazdeljene vzdolž navoja vijaka v obodni smeri. To je res dvojica, saj pripadata dvema diametralno nasprotnima točkama vzporedni sili, po velikosti enaki in naprotno usmerjeni. To silo s prijemališčem na navoju vijaka označimo z \vec{f} , glej sliko 2.3. Navor, ki pripada temu sistemu sil je potem $\vec{N} = r_0 l f \vec{k}$, kjer je \vec{k} enotski vektor v smeri osi vijaka.

Sedaj moramo določiti zvezo med \vec{g} in f . Ker gre za trenje na strmini, bomo uporabili formulo (2.5), kjer je sedaj f namesto F , g namesto mg in $\beta = \alpha$. Velja torej

$$f = g \frac{\sin(\alpha + a\alpha_0)}{\cos(\alpha + a\alpha_0)} = g \tan(\alpha + a\alpha_0). \quad (2.8)$$

Potem

$$\vec{N} = r_0 l f \vec{k} = r_0 l g \tan(\alpha + a\alpha_0) \vec{k} = r_0 G \tan(\alpha + a\alpha_0) \vec{k}. \quad (2.9)$$

Za dvigovanje bremena \vec{G} je potemtakem potreben navor

$$\vec{N} = r_0 G \tan(\alpha + \alpha_0) \vec{k}. \quad (2.10)$$

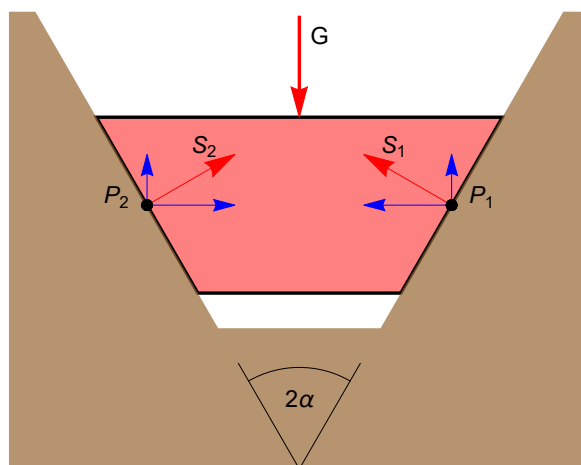
Večje je trenje v navoju, večji navor potrebujemo. Vidimo, da pri dobro mazanem in položnem navoju lahko s sorazmerno majhnim navorom dvignemo težko breme in je pravi smisel vijačne dvigalke. Poglejmo še kako je s spuščanjem, kjer je $a = -1$. Navor spuščanja je

$$\vec{N} = r_0 G \tan(\alpha - \alpha_0) \vec{k}. \quad (2.11)$$

Za $\alpha > \alpha_0$ je navor \vec{N} v smeri \vec{k} . To pomeni, da moramo za enakomerno spuščanje z navorom \vec{N} zadrževati spuščanje. Brez tega zadrževalnega navora se breme vedno hitreje, nekontrolirano spušča. Za $\alpha < \alpha_0$, torej če je strmina navoja manjša od tonega kota, za spuščanje potrebujemo navor, ki vijak spušča. Pravimo, da je v tem primeru vijaka dvigalka *samozaporna*. Breme dvignemo z navorom danim s formulo (2.10). Potem, ko breme dvignemo, se breme ne prične samo od sebe spuščati, saj za spuščanje potrebujemo navor po formuli (2.11).

2.3 Klinasti jermen

V tračnih pogonskih elementih želimo preprečiti drsenje traka oziroma jermena. Ena možnost je uporaba verižnega prenosa ali zobatega jermena, ki pa ima svoje druge pomanjkljivosti kot je naprimer mazanje ali obraba. Drsenje tračnega prenosa lahko omejimo z manjšo obremenitvijo ali s povečanjem trenja. Zadnje lahko dosežemo z uporabo klinastega jermena.



Slika 2.4: Klinasti jermnen.

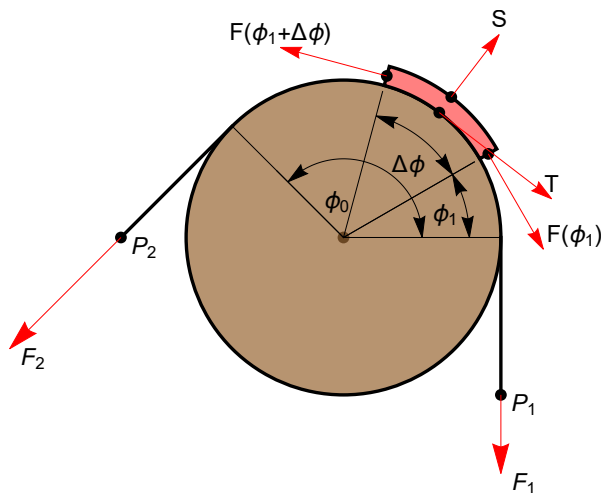
Klinasti jermen je prikazan na sliki 2.4. Jermen je gibljiv v smeri, ki je pravokotna na slika. Privzeli bomo, da je jermen obremenjen s silo \vec{G} tako kot kaže skica. Ta obremenitev je posledica napetja jermena, bolj je jermen napet, večja je sila. To silo uravnovesita ploskovni sili na obeh straneh jermena. Ponovno imamo opravka s sistemom vzporednih sil, ki ima rezultanto \vec{S}_1 oziroma \vec{S}_2 . Kot je vidno s slike se vodoravni komponenti med seboj uravnovesita, vsota navpičnih komponent pa uravnovesi obremenitev \vec{G} . Sili \vec{S}_i , $i = 1, 2$ oklepata z vodoravno smerjo kot α , glej sliko 2.4. Iz simetrije sledi, da sta sili \vec{S}_1 in \vec{S}_2 enako veliki. Označimo njuni velikosti z S . Potemtakem je $G = 2S \sin \alpha$. Velikost normalne komponente je potem $S = \frac{G}{2 \sin \alpha}$. Po Coulombovem zakonu jermen ne zdrsne, če za velikost sile v smeri tendence zdrsa velja $T \leq kS$ oziroma

$$T \leq \frac{k}{\sin \alpha} \frac{G}{2}.$$

Vidimo, da v neenakosti nastopa modificiran koeficient trenja $k' = k / \sin \alpha > k$, ki je pri majhnem kotu α bistveno večji od koeficienta k . Klinasti jermen ima potemtakem bistveno boljši oprijem kot naveden jermen, ki se naslanja na obod. Manjši je α večji je modificiran koeficient trenja, po drugi strani pa je tudi večja obraba jermena. Z obrabo jermen leze v utor in ko se nasloni na obod izgubi svojo učinkovitost.

2.4 Trenje vrvi na kolutu

Iz vsakdanjega življenja vemo, da je dvigovanje bremena z vrvjo preko roba težavno, pri spuščanju pa se vrv zelo segreje in obrabi. Razlog je v trenju vrvi na robu. Trenje vrvi je tudi razlog zakaj držijo vozli in zakaj lahko z ovitjem vrvi okoli stebra zadržimo veliko silo na drugi strani vrvi.



Slika 2.5: Vrv na kolutu, \vec{S} je radialna, \vec{T} pa obodna komponenta ploskovne sile na del vrvi med ϕ_1 in $\phi_1 + \Delta\phi$.

Teoretični model trenja vrvi preko fiksnega roba kaže slika 2.5. Tu smo zaradi enostavnosti privzeli da je rob fiksn kolut oziroma valj. Naj bo tendenca gibanja vrvi v nasprotni smeri urinega kazalca, sila \vec{S}_2 vleče, \vec{S}_1 pa zadržuje. Pokazali bomo, da za sili velja zveza

$$F_2 = F_1 e^{k\phi_0}, \quad (2.12)$$

kjer je k koeficient trenja med vrvjo in kolutom, ϕ_0 pa ovojni kot, torej kot za koliko je vrv ovita. Kot ovitja je podan v radianih, za polni kot je torej $\phi_0 = 2\pi$. Vidimo, da sila ni odvisna od polmera koluta. Če je namesto vrvi napeljan preko utora klinasti jermen, v formuli nastopa namesto koeficienta k modificiran koeficient k' . Formula pove, da sila F_2 narašča eksponentno s kotom ovitja. Za lažjo predstavbo si oglejmo razmerje F_2/F_1 za različne kote ovitja v tabeli 2.2.

Tabela 2.2: Razmerje F_2/F_1 za različne kote ovitja pri $k = 1/2$.

ϕ_0	F_2/F_1
$\pi/4$	1.48
$\pi/2$	2.19
$3\pi/4$	3.25
π	4.81
$5\pi/4$	7.12
$3\pi/2$	10.55
$7\pi/4$	15.63
2π	23.14

Sedaj bomo dokazali formulo (2.12). Izpeljavo formule temelji na uporabi Coulombovega zakona trenja, zato bo edina ravnovesna enačba ravnovesja sil

$$\vec{F}(\phi_1 + \Delta\phi) - \vec{F}(\phi_1) + \int_{\phi_1}^{\phi_1 + \Delta\phi} (\vec{s} + \vec{t}) d\phi = \vec{0}. \quad (2.13)$$

Tu smo rezultanto sile koluta na vrv izrazili z integralom dolžinske gostote sile, kjer je \vec{s} radialna gostota, \vec{t} pa obodna gostota. Rezultanto zvezno porazdeljene sile zapišemo z integralom, podobno kot rezultanto po točkah porazdeljene sile zapišemo z vsoto. Enačo (2.13) delimo z $\Delta\phi$ in poženemo $\Delta\phi$ proti nič. Upoštevajmo, da je limita diferenčnega kvocienta enaka odvodu, da velja

$$\lim_{\Delta\phi \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(\phi_1 + \Delta\phi) - \vec{F}(\phi_1)}{\Delta\phi} = \frac{d\vec{F}}{d\phi}(\phi_1). \quad (2.14)$$

Nadalje velja po izreku o povprečni vrednosti

$$\lim_{\Delta\phi \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\phi} \int_{\phi_1}^{\phi_1 + \Delta\phi} (\vec{s} + \vec{t}) d\phi = \vec{s}(\phi_1) + \vec{t}(\phi_1). \quad (2.15)$$

Veljavnost izreka o povprečni vrednosti sledi iz geometrijskega pomena določenega integrala, ki pravi, da je določen integral funkcije $f(x)$ enak površini A lika med abscisno osjo x in funkcijo na območju integracije $x \in (a, b)$,

$$A = \int_a^b f(x) dx.$$

Uporabili bomo izrek o povprečni vrednosti, ki pravi, da je

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(\xi), \quad \text{kjer je } \xi \in (a, b).$$

Potem je po izreku o povprečni vrednosti

$$\lim_{b \rightarrow a} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(a).$$

Vstavimo (2.14) in (2.15) v (2.13). Dobimo

$$\frac{d\vec{F}}{d\phi} + \vec{s} + \vec{t} = \vec{0}. \quad (2.16)$$

Enačba velja pri $\phi = \phi_1$ in ker je ϕ_1 poljuben, velja za katerikoli kot ϕ . Sedaj upoštevamo, da je sila vrvi v obodni smeri, da je $\vec{F} = F\vec{e}_\phi$. Podobno $\vec{s} = s\vec{e}_r$ in $\vec{t} = -t\vec{e}_\phi$. Nadalje je

$$\frac{d}{d\phi} F\vec{e}_\phi = \frac{dF}{d\phi} \vec{e}_\phi - F\vec{e}_r.$$

Uporabili smo pravilo za odvod produkta in enakost $\frac{d}{d\phi} \vec{e}_\phi = -\vec{e}_r$. Enačba (2.16) se potem po komponentah glasi

$$-F + s = 0, \quad \frac{dF}{d\phi} - t = 0.$$

Dobili smo dve enačbi za tri neznanke, F , s in t . Tretja enačba, ki določa neznanke je zakon trenja $t = ks$, ki velja, ker vrv drsi po kolutu. Potem je

$$\frac{dF}{d\phi} = t = ks = kF.$$

Dobili smo diferencialno enačbo za F , ki pravi, da je odvod funkcije F sorazmeren vrednosti funkcije. To je naravni zakon rasti, ki pravi, da je sprememba neke količine sorazmerna količini. Rešitev je

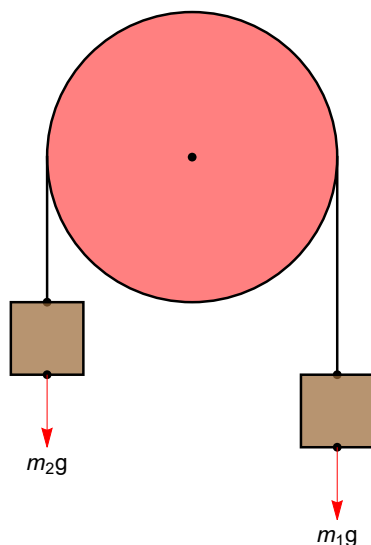
$$F = C e^{k\phi},$$

kjer je C konstanta. Konstanto določimo iz pogoja, da je $F(\phi = 0) = C = F_1$. Z besedami, vrednost sile vrvi na enem koncu določa vrednost vrvi na drugem koncu. Vrednost vrvi na drugem koncu pri $\phi = \phi_0$ je potem

$$F_2 = F(\phi_0) = F_1 e^{k\phi_0}$$

in formula (2.12) je s tem dokazana. Dokazali smo jo za krožni kolut, velja pa za kolut poljubne oblike.

2.4.1 Zdrs vrvi na kolutu



Slika 2.6: Zdrs vrvi na kolutu.

Čez skripec potegnemo vrv, na en konec obesimo utež z maso m_1 , na drugi konec pa z m_2 , glej sliko 2.6. Koeficient trenja med škricem in vrvjo je k . Določiti moramo razmerje med masama, da vrv ne zdrsne. Uporabili bomo formulo za zdrs vrvi na kolutu (2.12). Ovojni kot je očitno pol kroga, torej $\phi_0 = \pi$. Privzemimo, da je $m_1 > m_2$. Potem je tendenca zdrsa v smeri urinega kazalca. Formula (2.12) določa kdaj vrv zdrsne. Vrv ne zdrsne, če je sila manjša kot po formuli, torej če je

$$m_1g \leq m_2g e^{k\pi}.$$

Iskani kvocient je

$$\frac{m_1}{m_2} \leq e^{k\pi}.$$

Vrednosti dopustnega kvocienta lahko preberemo iz tabele 2.2.

2.5 Vprašanja in naloge

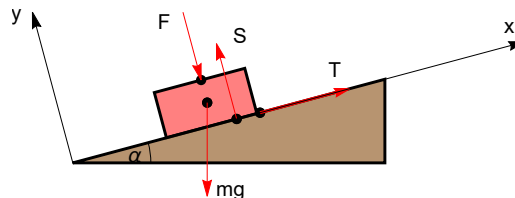
2.5.1 Vprašanja

1. Ali je sila trenja odvisna od ploščine površine stika?
2. Kaj velja za vijračno dvigalko, če v vijaku ni trenja?
3. Kolikšen je ovojni kot, če vrv ovijemo dvakrat okrog koluta?
4. Za koliko moramo povečati ovojni kot, če se koeficient trenja zmanjša za polovico?

2.5.2 Naloge

1. Na klancu z naklonskim kotom α leži klada z maso m , glej sliko. Določi velikost sile \vec{F} , da klada ne zdrsne. Koeficient tenja med klado in klancem je k .

Rešitev: Ker je tendenca gibanja klade navzdol, kaže sila \vec{T} navzgor. Ravnovesna enačba je



$$\vec{F} + \vec{T} + \vec{S} + m\vec{g} = \vec{0}.$$

Enačbe za ravnovesje momenta ne upoštevamo, saj ni znano prijemališče normalne sile podlage \vec{S} . V koordinatnem sistemu na sliki je $\vec{F} = -F\vec{j}$, $\vec{T} = T\vec{i}$, $\vec{S} = S\vec{j}$ in $m\vec{g} = mg(-\sin\alpha\vec{i} - \cos\alpha\vec{j})$. Po komponentah je potem

$$-mg\sin\alpha + T = 0, \quad -mg\cos\alpha - F + S = 0.$$

Potem je

$$S = F + mg\cos\alpha, \quad T = mg\sin\alpha.$$

Klada ne zdrsne, če velja

$$T \leq kS,$$

saj je največja tangentska sila, ki jo lahko prenese podlaga enaka kS . Če smo natančni, je tu k koeficient oprijemalnega trenja oziroma koeficient lepenja. Vendar, je med koeficientom trenja in koeficientom lepenja tako majhna razlika, da med njima ne delamo razlike. Iz zgornje neenakosti sledi

$$mg\sin\alpha \leq k(F + mg\cos\alpha)$$

in od tod

$$mg \left(\frac{1}{k} \sin\alpha - \cos\alpha \right) \leq F.$$

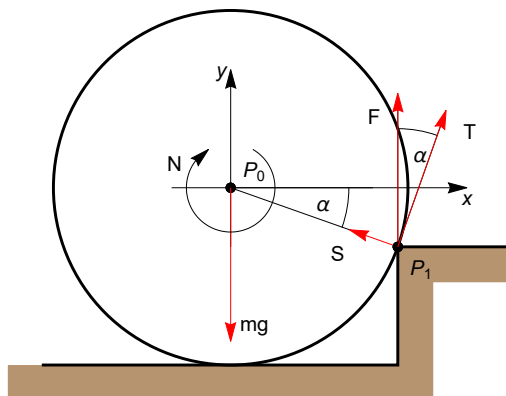
Koeficient trenja izrazimo s tornim kotom $k = \tan\alpha_0$. Potem po krajšem računu, tu uporabimo adicijski izrek za sin sledi

$$mg \frac{\sin(\alpha - \alpha_0)}{\sin\alpha_0} < F.$$

Če je $\alpha_0 > \alpha$, za ravnovesje ni potrebna sila F , za $\alpha_0 < \alpha$ pa moramo klado pritiskati ob strmino, da ne zdrsne. Če ni trenja, klada zdrsne ne glede na silo F .

2. Kolo s polmerom r_0 spelje čez robnik višine h , gkej skico. Določi potrebni navor na kolo. Določi dopustno višino robnika, da se kolo ne zavrti v prazno, če je koeficient trenja med kolesom in robnikom k .

Rešitev: Na kolo deluje sila teže $m\vec{g}$, sila robnika \vec{F} s prijemališčem na robniku v P_1 in navor \vec{N} . Iz enačbe $\vec{F} + m\vec{g} = \vec{0}$ sledi, da je $\vec{F} = -m\vec{g}$. Par \vec{F} in $m\vec{g}$ je torej dvojica, ki uravnoveša navor $\vec{N} = N\vec{k}$. Potem je $N = r_0 mg \cos \alpha$ iskani navor. Upoštevajmo še, da je $\sin \alpha = (r_0 - h)/r_0$.



$$N = mg \sqrt{r_0^2 - (r_0 - h)^2}.$$

Določiti moramo še pogoj, da kolo ne zdrsne. Velikost projekcije sile \vec{F} na obodno smer je T , na normalno pa S . Tako je $T = mg \cos \alpha$ in $S = mg \sin \alpha$. Pogoj, da kolo ne zdrsne je $T \leq kS$. Veljati torej mora $\cos \alpha \leq k \sin \alpha$. Če zapišemo k s tornim kotom $k = \tan \alpha_0$, se pogoj glasi

$$\tan \alpha_0 \geq \cot \alpha = \frac{\sqrt{r_0^2 - (r_0 - h)^2}}{r_0 - h}.$$

Poglavje 3

Statika sistema togih teles

Številni mehanizmi in stroji so sestavljeni iz togih komponent in jih v enakomernem obratovalnem režimu lahko obravnavamo v okviru statike sistema togih teles. Ravnovesne enačbe sistema togih teles so ravnovesne enačbe za vsako togo telo sistema. Te enačbe vežejo pogoji, kako so telesa med seboj sklopljena. Delovanje sosednjega telesa na izbrano togo telo je v bistvu enako, kot vpliv podpore na telo, zato je klasifikacija spojev med telesi podobna klasifikaciji podpor. Pri tem dodatno upoštevamo veljavnost tretjega Newtonovega zakona. Če telo \mathcal{B}_1 deluje na \mathcal{B} s silo \vec{F}_{12} in navorom \vec{N}_{12} , potem telo \mathcal{B}_2 deluje na \mathcal{B}_1 s silo $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ in navorom $\vec{N}_{21} = -\vec{N}_{12}$.

Klasifikacijo spojev med dvema togima telesoma je naslednja. Spoju ki ne prenaša vseh komponent navora pravimo zglob, spoju, ki ne prenaša vseh komponent sil pa drsnik. Spoj lahko klasificiramo s parom števil (s, n) . Pvo število para pove koliko komponent sile prenaša spoj, drugo pa koliko komponent navora.

Tipični primeri spojev so naslednji:

- *Popolni spoj.* Ta spoj prenaša vse komponente sile in navorov med telesoma. Popolni spoj je v bistvu zvar in eno telo veže z drugim v togo telo. To pomeni, da lahko zvarjeni togi telesi obravnavamo kot eno togo telo. Pripadajoči par je $(3, 3)$.
- *Tečaj* $(3, 2)$ prenaša vseh komponente sil in dve komponenti navora, ki sta pravokotni na os tečaja. Togo telo spojeno s tečajem z drugim telesom je prosto vrtljivo okrog osi tečaja. Drugo telo vrteža ne zazna. Primer je tečaj vrat, eno telo je krilo vrat, drugo pa okvir vrat.
- *Križni ali kardanski zglob.* Prenos komponent sil je popoln, momenta pa se prenaša samo v eni smeri. Primer križnega zgloba je prenos pogona na krmilno kolo. Par je $(3, 1)$.
- *Krogelni zglob* ne prenaša nobene komponente navora, prenaša pa vse komponente sile. Ta spoj omogoča prosto rotacijo enega telesa glede na drugo okrog točke spoja. Primer je kolčni zglob, par pa je $(3, 0)$.
- *Linijski drsnik* prenaša komponenti sile, ki sta pravokotni na smer drsnika, ne prenaša pa sile v smeri drsnika. Prenos momenta je popoln, zato mu pripada par $(2, 3)$. Primer so drsna vrata.
- *Ploskovni drsnik.* Kot pove ime spoj ne omejuje ravninskega gibanja spoja, ne dopušča pa gibanje spoja izven ravnine. Prenos momenta je popoln, par pa je $(1, 3)$.

Našteli nismo vseh možnih kombinacij spojev in drsnikov, naprimer kombinacije linijskega drsnika s krogelnim zglobom, ki je realizacija para $(2, 0)$. Vseh možnih parov (s, n) je 12, saj je $s \in \{1, 2, 3\}$ in $n \in \{0, 1, 2, 3\}$. Pri ravninski nalogi je $s \in \{1, 2\}$ in $n \in \{0, 1\}$ tako, da je sedaj vseh možnih parov 4: zvar, tečaj, drsnik in tečaj na drsniku.

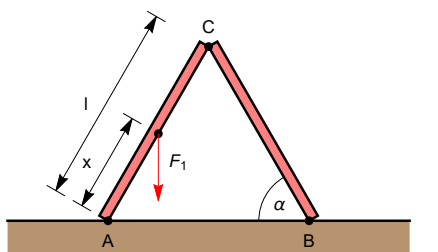
3.1 Potek reševanja naloge statike togega telesa

1. Prvi korak je razčelnitev sistema na toge komponente. Če sta dve telesi spojeni s popolnim spojem, ju obravnavamo kot eno telo.
2. Naslednji korak je identifikacija zunanjih sil. Med zunanje sile štejemo tudi sile podpor s katerimi je naš sistem togih teles uravnovešen.
3. Sledi identifikacija spojev. Spoje med telesi praviloma določa že opis naloge. Vrstni red prvih treh korakov lahko poljubno spremenimo.
4. Pred zapisom ravnovesnih enačb za vsako togo telo sistema praviloma narišemo diagram prostih teles. To pomeni, da za vsako togo telo identificiramo sistem sil, ki deluje na to telo. Sistem sil sestavljajo zunanje sile, ki imajo prijemališče znotraj telesa in vse sile in navori v spojih s sosednjimi telesi. Potem narišemo togo telo s pripadajočim sistemom sil.
5. Sledi zapis ravnovesnih enačb za vsako togo telo sistema. Po zapisu sistema enačb preštejemo število enačb in neznank in razmislimo ali je sistem statično določen ali nedoločen.
6. Sistem ravnovesnih enačb rešimo. Dimenzija sistema je lahko velika, če je sistem sestavljen iz n togih teles v prostoru je število enačb $6n$.

3.2 Primer: A lestev

Na hrapavo podlago je postavljena A lestev brez vmesne vrvi, ki bi preprečevala razprtje lestve, glej sliko 3.1. Oba kraka lestve imata enako dolžino in oklepata kot α z vodoravno podlago, levi krak lestve pa je obremenjen s silo \vec{F} . Vprašanje je, ali pri danem koeficientu trenja k med podlago in lestvijo lestev stoji ali se razpre.

Lestev je sestavljena iz dveh krakov. Tako imamo sistem dveh togih teles, ki sta spojeni v točki C , glej sliko 3.1. A lestev lahko zložimo, zato je spoj C tečaj. Zunanje sile, ki delujejo na lestev sta sili podpor \vec{A} in \vec{B} v podporah A in B ter obremenitev \vec{F} .



Slika 3.1: A lestev.

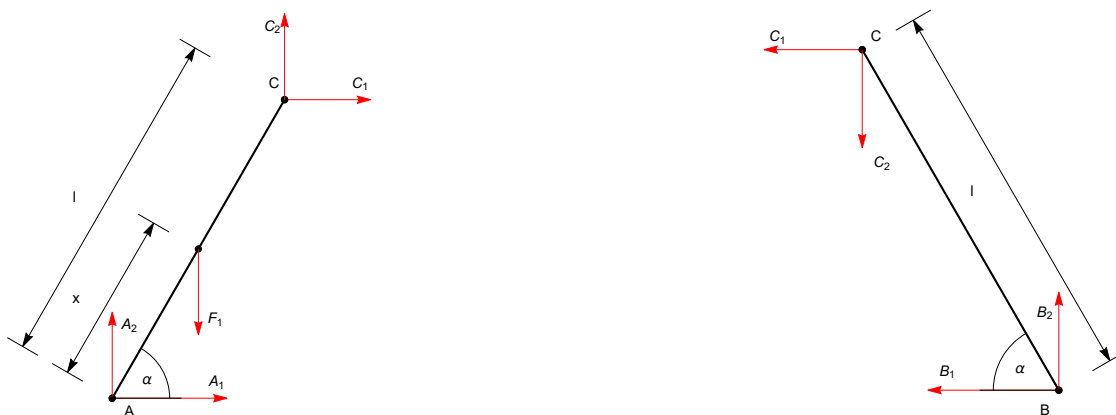
Sedaj narišemo diagrama prostih teles, glej sliko 3.2. Prvo obravnavajmo levi krak lestve. Na njega delujejo sile \vec{A} , \vec{F} in sila desnega kraka lestve \vec{C} . Ker sta kraka spojena s tečajem, desni krak na levi ne deluje z navorom. Ravnovesne enačbe za levi krak so ravnovesne enačbe za togo telo. Enačbe so

$$A_1 + C_1 = 0, \quad A_2 + C_2 - F = 0, \quad -xF \cos \alpha - lC_1 \sin \alpha + lC_2 \cos \alpha = 0. \quad (3.1)$$

Zadnja enačba je momentna enačba s polom v točki A .

Ker je naloga ravninska imamo tri ravnovesne enačbe, neznanke pa so štiri, po dve komponenti za \vec{A} in \vec{C} . Ta primer je tipičen, neznanke za posamezno togo telo sistema togih teles ne moremo rešiti

brez obravnavanja vseh togih teles hkrati. Z drugimi besedami, prvo moramo napisati ravnovesne enačbe za vsako togo telo sistema, šele potem se lahko lotimo reševanja teh enačb.



Slika 3.2: Diagram prostih teles za A lestev; levi in desni krak lestve.

Pri konstrukciji diagrama za desni krak upoštevajmo, da levi krak deluje na desni krak s silo $-\vec{C}$. Ravnovesne enačbe za desni krak so tako

$$-B_1 - C_1 = 0, \quad B_2 - C_2 = 0, \quad lC_1 \sin \alpha + lC_2 \cos \alpha = 0. \quad (3.2)$$

Dobili smo 6 enačb za šest komponent. Opazimo, da sta momentni enačbi (3.1-3.2) dve enačbi za neznanke C_1 in C_2 . Rešitev je

$$C_1 = \frac{x}{2l} F \cot \alpha, \quad C_2 = \frac{x}{2l} F. \quad (3.3)$$

Potem, ko poznamo C_1 in C_2 , brez težav iz (3.1-3.2) dobimo

$$A_1 = \frac{x}{2l} F \cot \alpha, \quad A_2 = F - C_2 = \left(1 - \frac{x}{2l}\right) F, \quad B_1 = \frac{x}{2l} F \cot \alpha, \quad B_2 = \frac{x}{2l} F. \quad (3.4)$$

Sile so sedaj znane. Odgovoriti moramo še na vprašanje, ali se lestev razpre ali ne. Pogoja, da podpora ne zdrsneti je

$$A_1 \leq kA_2 \quad \text{in} \quad B_1 \leq kB_2,$$

oziroma po (3.4)

$$\frac{x}{2l} F \cot \alpha \leq k \left(1 - \frac{x}{2l}\right) F, \quad \frac{x}{2l} F \cot \alpha \leq k \frac{x}{2l} F. \quad (3.5)$$

Tako dobimo pogoja

$$\frac{x}{2l} \cot \alpha \leq k \left(1 - \frac{x}{2l}\right), \quad \cot \alpha \leq k. \quad (3.6)$$

Drugi pogoj se nanaša na podporo B . Ta ne zdrsne, če je lestev postavljena dovolj strmo, če je $\cot \alpha \leq k$. Pogoj v podpori A je odvisen od x . Pri $x = 0$ je vedno izpolnjen, potem pa z naraščajočim x postaja vedno strožji. Pri $x = l$ dobimo že znani pogoj $\cot \alpha \leq k$. Potemtakem ta pogoj zagotavlja, da se lestev ne razpre. Če pa se razpre, potem zdrsne podpora B .

3.3 Vprašanja in naloge

3.3.1 Vprašanja

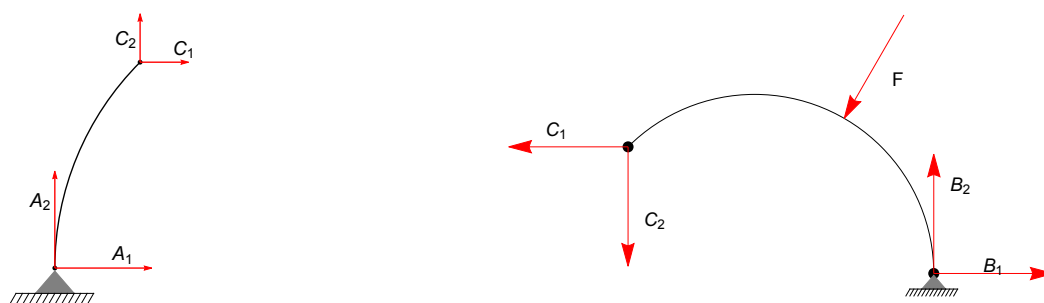
1. Naštej kombinacije zglobov in drsnikov, ki jih nismo našli v klasifikaciji spojev.

3.3.2 Naloge

1. Tročleni lok s polmerom R sestavljen iz lokov AC in CB je obremenjen tako kot kaže skica. Določi sile podpor.

Rešitev: Lok razdelimo na dva loka, glej skico. Za vsak lok veljajo ravnotežne enačbe. Za levi velja

$$\begin{aligned} 0 &= A_1 + C_1, \\ 0 &= A_2 + C_2, \\ 0 &= R(1 - \cos \beta)C_2 - R \sin \beta C_1. \end{aligned}$$



Slika 3.3: Sile na levi in desni lok.

Drugi sklop enačb so ravnotežne enačbe za desni lok. Namesto le teh pa raje zapišimo ravnovesne enačbe za celotni tročleni lok, saj če so izpolnjene ravnovesne enačbe za levi lok in celotni tročleni lok, so izpolnjene tudi za desni lok. Ravnovesne enačbe za celotni tročleni lok so namreč nekoliko enostavnejše kot enačbe za desni lok.

$$\begin{aligned} 0 &= A_1 + B_1 - F \cos \alpha, \\ 0 &= A_2 + B_2 - F \sin \alpha, \\ 0 &= -RA_2 + RB_2. \end{aligned}$$

Tu smo uporabili momentno enačbo s polom v središču loka. Sistem rešimo. Prvo dobimo, da je $A_2 = B_2$ in od tod $A_2 = B_2 = \frac{1}{2}F \sin \alpha$. Nadalje je

$$C_1 = \frac{1 - \cos \beta}{\sin \beta} C_2 = \tan \frac{1}{2} \beta C_2 = -\frac{1}{2} \sin \alpha \tan \frac{1}{2} \beta F.$$

Tako dobimo še

$$A_1 = -C_1 = \frac{1}{2} \sin \alpha \tan \frac{1}{2} \beta F \quad B_1 = F \cos \alpha - A_1 = \left(\cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha \tan \frac{1}{2} \beta \right) F.$$

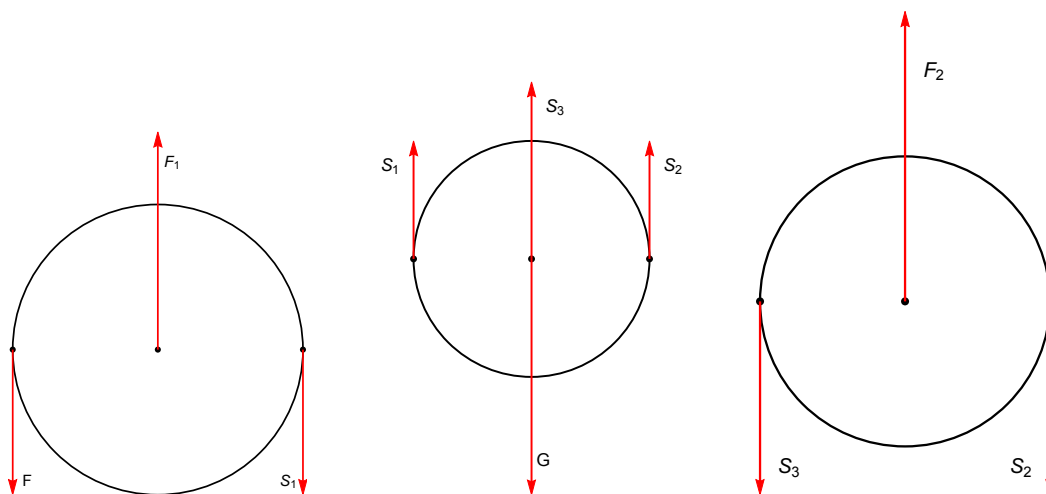
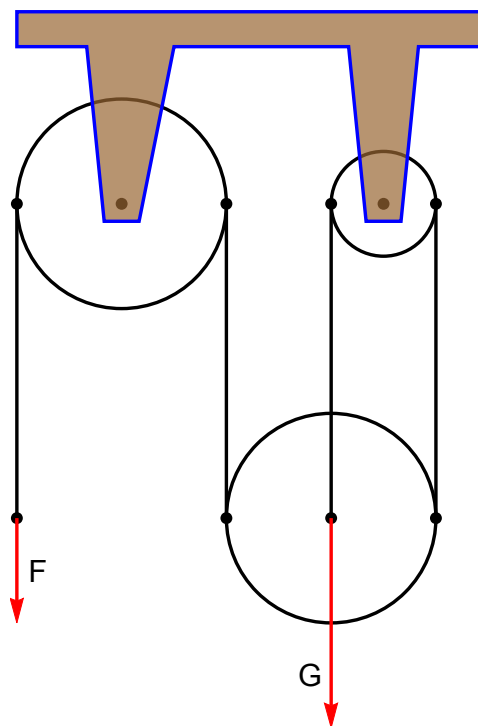
Dobljena formula sil v podporah velja tudi, če je tročleni lok obremenjen v členku. V tem primeru lahko silo obremenitve \vec{F} zapišemo v obliki $\vec{F} = \lambda \vec{F} + (1 - \lambda) \vec{F}$ in nato pri razdelitvi tročlenega loka na levi in desni lok upoštevamo, da je levi lok obremenjen v spojnem členku s silo $\lambda \vec{F}$, desni pa z $(1 - \lambda) \vec{F}$. Rezultat izračuna sil v podporah je neodvisen od števila λ , sila v spojnem členku pa je, vendar to ni pomembno, saj je v okviru statike pomembno samo to, da je vsota vseh sil na členek enaka nič.

2. Za škripec na skici določi silo F potrebno za enakomerno dvigovanje bremena s težo G . Trenje v ležajih škripca zanemari.

Rešitev: Škripec je sestavljen iz treh kolutov, ki jih povezujejo vrvi, glej skico razčlenitve na prosta telesa. Polmere kolutov označimo z r_1 , r_2 in r_3 . Za vsak kolut posebej veljajo ravnotežne enačbe. Ker nas ne zanimajo sile v ležajih, je dovolj za vpeta koluta napisati samo momentno enačbo. Ravnotežne momentne enačbe so tako $r_1 F - r S_1 = 0$ za levi zgornji kolut, $-r_2 S_1 + r_2 S_2 = 0$ za spodnji kolut in $r_3 S_3 - r_3 S_2 = 0$ za desni zgornji kolut. Iz teh enačb sledi $S_1 = S_2 = S_3 = F$. Zapišimo sedaj ravnotežno enačbo za sile za spodnji kolut. Enačba je

$$S_1 + S_2 + S_3 - G = 0.$$

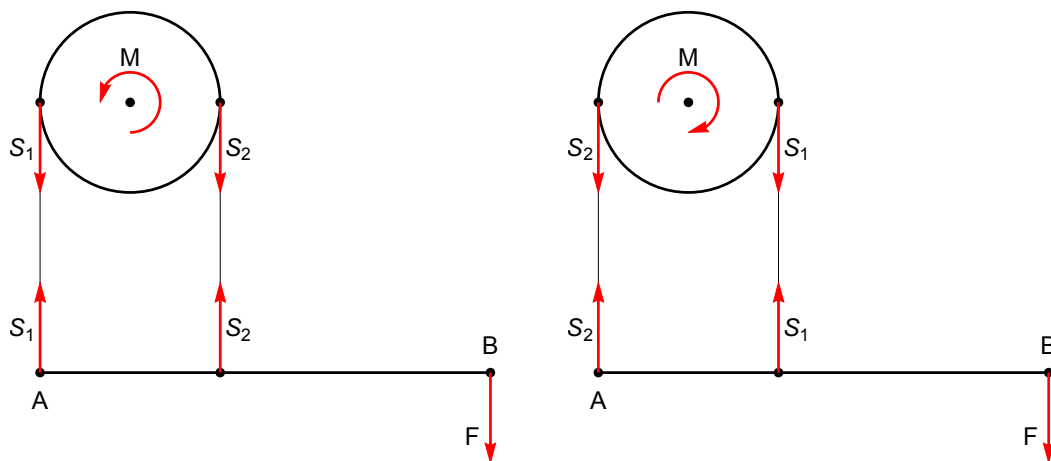
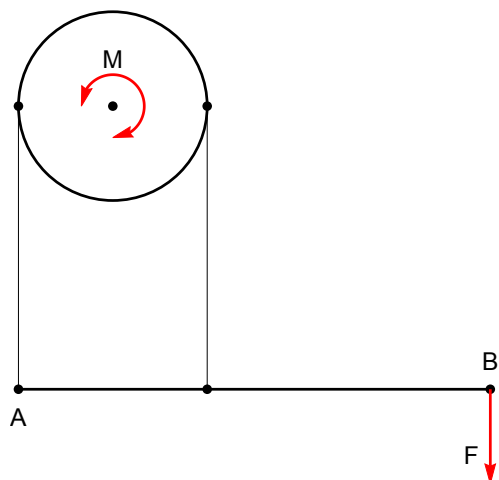
Od tod sledi $3F = G$. Sila F , ki zagotavlja enakomerno dvigovanje (spuščanje) bremena je tako $G/3$.



Slika 3.4: Diagram sil na kolute škripca, levi, spodnji, desni kolut.

3. Za tračno zavoro na skici, z ročico AB dolžine l in polmerom koluta r , določi silo F na ročico, ki bo uravnovesila navor M na kolut. Ločeno obravnavaj primera sournega in protiurnega delovanja navora M .

Rešitev: Tračna zavora je sestavljena iz ročice, koluta in vrvi, ki drsi po kolutu. Sila trenja vrvi na kolutu je $S_2 = S_1 e^{k\varphi}$, kjer je k koeficient trenja vrvi na kolutu, φ pa je ovojni kot vrvi na kolutu. Pri tem sila S_2 kaže v smer drsenja vrvi. To pomeni, da moramo ločiti primera sournega in protiurnega vrtenja koluta.



Slika 3.5: Tračna zavora, protiurna in sournja rotacija koluta.

Poglejmo prvo primer protiurnega vrtenja. Ker ne bomo računali sil na ležaj koluta in ročice, je dovolj, da uporabimo samo momentno enačbo za kolut in ročico. Momentna enačba za kolut je $M + rS_1 - rS_2 = 0$. Od tod, z upoštevanjem sile trenja na kolutu sledi

$$M = rS_1 (e^{k\pi} - 1). \quad (3.1)$$

Momentna enačba za ročico je $-lF + 2rS_2 = 0$. Potem z upoštevanjem zgornje enačbe

$$F = \frac{2R}{l} S_2 = \frac{2R}{l} S_1 e^{k\pi} = \frac{2M e^{k\pi}}{l(e^{k\pi} - 1)}.$$

V primeru sournega vrtenja dobimo ponovno (3.1), za ročico pa $-lF + 2rS_1 = 0$. Potem

$$F = \frac{2R}{l} S_1 = \frac{2M}{l(e^{k\pi} - 1)}.$$

Vidimo, da je v tem primeru sila ročice potrebna za faktor $e^{k\pi}$ manjša sila.

Poglavje 4

Paličje

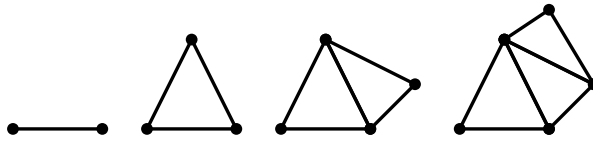
Paličje je togi sistem togih teles sestavljen iz palic s spoji, ki ne prenašajo navore. Spojem paličja pravimo *vozljišča*. Primeri, ki jih modeliramo z modelom paličja so daljnovidni stebri, žerjavi, mostovi in podobne strukture sestavljene iz palic. V naravi palice niso spojene z zglobi, lahko so zavarjene ali zakovane. Vendar pa je kljub temu zaradi tankosti palic prenos momenta iz ene palice na drugo palico majhen, zato je model paličja uporaben model.

Paličje je sestavljeno iz palic. Palica je konstrukcijski element, ki prenaša silo samo v osni smeri, ne prenaša pa prečne sile. Neznanke paličja so tako osne sile palic oziroma na kratko sile palic. Sila palice je lahko natezna ali tlačna. Prevelika natezna sila lahko palico strga, nevarnost tlačne sile pa je uklon palice. Tlačna sila palico stiska, in to silo palica dobro prenaša. Če je tlačna sila natanko v smeri palice, je vse v redu, vendar že najmanjše odstopanje od te smeri povzroči upogib palice in ker je palica členkasto vpeta, to odstopanje povzroči upogib oziroma uklon palice. Lep primer je špaget. Z vlečenjem ga težko zlomimo, če ga pa stisnemo v njegovi smeri, se zelo hitro ukloni in zlomi. Primer so tudi od požledi podrta stebri daljnovidna. Slika podrtega stebra razkrije, da je le redko katera palica strgana, številne pa so zvite. Palice paličja tako dobro prenašajo natezne sile in slabše tlačne sile. Zato moramo pri konstrukciji paličja pozornost posvetiti tlačnim silam in po potrebi spremeniti konstrukcijo paličja.

Ker palice prenašajo samo osno silo, smemo paličje v okviru modela sistema togih teles obremeniti samo v vozljiščih. Lastne teže palic tako v modelu paličja praviloma ne upoštevamo. To v večini primerov ne predstavlja problema, ker so sile obremenitve paličja dominantne. Če jih moramo, potem teže sile palice razporedimo po njenih krajiščih.

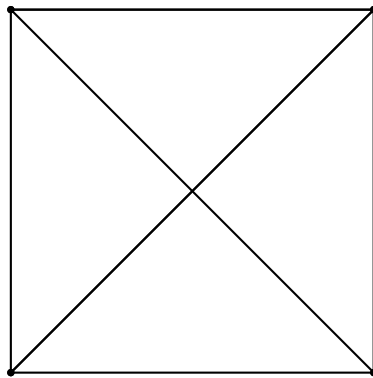
Paličje je seveda tudi podprto. Ker je paličje togi sistem, podpore paličja določajo ravnovesne enačbe togega telesa. Enolično jih lahko določimo, če so podpore statično določene. Nadalje so sile palic notranje sile paličja. Določajo jih pogoji, da mora biti v vsakem vozljišču vsota sil enaka nič. V tej vsoti nastopajo sile palic s krajišči v izbranem vozljišču in morebitna obremenitev paličja, ki ima tu prijemališče. Ker ima ta sistem sil skupno prijemališče, je momentna enačba trivialna $\vec{0} = \vec{0}$. Če lahko določimo vse sile paličja, pravimo, da je paličje *statično določeno*.

Označimo s p število palic in z v število vozljišč. Vsako vozljišče prinese v ravninskem primeru $2v$ enačb, v prostorskem pa $3v$. Ker so neznane tudi sile podpor, je paličje statično določeno, če velja zveza $2v = p + 3$ za ravninsko paličje in $3v = p + 6$ za prostorsko paličje. Najenostavnejše paličje je ena sama palica, potem $v = 2$ in $p = 1$. Očitno je statično določeno. Naslednje paličje je trikotno. Dodamo eno vozljišče in to vozljišče povežemo s krajiščima prve palice z dvema palicama. Tudi to paličje je statično določeno. Če ostanemo pri ravninskem paličju, nadaljujemo po naslednjem postopku. Dodamo novo vozljišče in dve palici s katerima povežemo novo vozljišče z že obstoječimi vozljišči, glej sliko 4.1. Tako konstruiranem paličju pravimo *enostavno paličje*. V prostorskem primeru novo vozljišče povežemo s tremi že obstoječimi vozljišči.



Slika 4.1: Ravninsko enostavno paličje; ena, dve, tri, štiri palice.

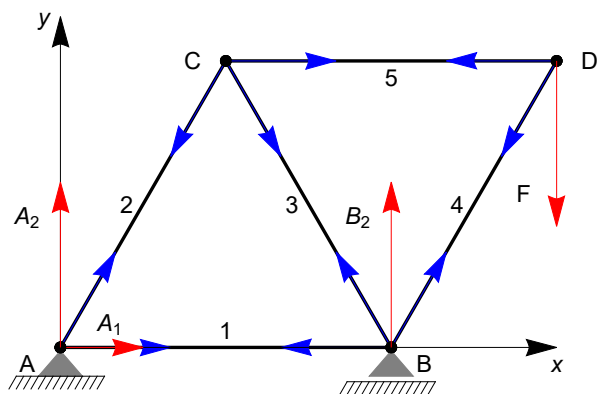
Ni pa seveda vsako paličje enostavno ali statično določeno. Primer je paličje na sliki 4.2. Sedaj je $p = 6$ in $v = 4$, zato $2v = 8 < 9 = p + 3$. Ena palica je odveč, odstranimo lahko katerokoli palico in paličje bo še vedno togi sistem. Paličja sestavljena iz takih elementov, kakor ga kaže slika, pogostokrat vidimo. Pri izvedbi konstrukcij zaradi varnosti oziroma varnostnega faktorja v pravokotnik vključimo obe diagonali, čeprav zadostuje že ena sama diagonala. Z metodami statike sistema togih teles sil palic statično nedoločenega paličja ne moremo enolično izračunati. Na silo jih lahko izračunamo, če dodamo kakšno, po možnosti čim boljše predpostavko o vrednosti sil palic, naprimer da sta sili diagonalnih palic enaki. Seveda jo to res samo ob določeni obremenitvi, zato moramo biti pri tem zelo previdni. Prava rešitev problema statično nedoločenega paličja je, da opustimo model sistema togih teles in dopustimo osno deformacijo palic. Enostavne primere tega pristopa bomo srečali pri Trdnosti.



Slika 4.2: Statično nedoločeno paličje.

4.1 Vozliščna metoda

Ravnovesne enačbe paličja so ravnovesne enačbe sil za vsako vozlišče paličja. Metodi izračuna sil paličja, ki temelji na reševanju ravnovesnih enačb za vsako vozlišče pravimo *vozlíščna metoda*. Kako deluje vozliščna metoda si bomo ogledali na naslednjem primeru. Dano je paličje sestavljeno iz dveh enakostrančnih trikotnikov tako kot kaže slika 4.3. Paličje je podprto s fiksno členkasto podporo v točki A , pomično členkasto v B in je obremenjeno navpično navzdol s silo \vec{F} . Palice oštevilčimo in vsaki palici priredimo silo palic \vec{F}_i . Na sliki 4.3 so z modro barvo narisane sile palic na vozlišča. Po tretjem Newtonovem zakonu je sila palice na levo vozlišče nasprotno enaka sili na desno vozlišče, glej sliko. Prva palica ima krajišči A in B , silo prve palice na A zapišemo v obliki $\vec{F}_1 = F_1 \vec{z}$, silo prve palice na B pa kot $\vec{F}_1 = -F_1 \vec{z}$. Tu je F_1 neznan količina. Če je sila palice natezna, je $F_1 > 0$, če je kompresijska je $F_1 < 0$. Podobno naredimo za ostale palice. Tako dobimo neznanke F_i , $i = 1, \dots, 5$. Na sliki 4.3 smo vse sile palice narisali kot natezne sile in smo tako sile palic na vozlišča usmerili navznoter. To naredimo neglede na to ali so sile natezne ali tlačne, čeprav iz obremenitve paličja na sliki pričakujemo, da bo sila na četrto palico tlačna.



Slika 4.3: Paličje sestavljeno iz dveh enakostraničnih trikotnikov.

Sedaj se lotimo računanja. Prvo bomo poiskali sile podpor. Ta korak ni obvezen, sile palic lahko dobimo tudi tako, da zapišemo vse ravnovesne enačbe hkrati in nato dobljeni linearni sistem enačb za neznanne sile podpor in palic rešimo. Tako bi postopali, če bi nalogo rešili s pomočjo računalnika. Za pravo nalogo, ki ni šolska in vsebuje na desetine palic je to seveda edina prava pot.

Za izračun sil podpor upoštevamo, da je paličje togo telo, ki je obremenjeno s silama podpor \vec{A} in \vec{B} in obremenitvijo \vec{F} . Očitno je $A_1 = 0$. Momentna enačba s polom v A se glasi

$$aB_2 - \frac{3a}{2}F = 0 \implies B_2 = \frac{3}{2}F.$$

Tu smo z a zapisali dolžino stranice enakostraničnega trikotnika. Momentna enačba s polom v B nam da

$$-\frac{a}{2}F - aA_2 = 0 \implies A_2 = -\frac{a}{2}F.$$

Sile podpor so sedaj določene. Izberimo sedaj vozlišče, ki je povezano s paličjem s samo dvema palicama. V našem primeru je to vozlišče D . Ravnovesna enačba je $\vec{F} + \vec{F}_4 + \vec{F}_5 = \vec{0}$. Upoštevajmo, da je $\vec{F} = -F\vec{j}$, $\vec{F}_4 = -F_4 \cos \alpha \vec{i} - F_4 \sin \alpha \vec{j}$ in $\vec{F}_5 = -F_5 \vec{i}$. Tu je α notranji kot enakostraničnega trikotnika, $\alpha = \pi/3$. Po komponentah je

$$-\cos \alpha F_4 - F_5 = 0 \quad \text{in} \quad -\sin \alpha F_4 - F = 0.$$

Rešitvi sta

$$F_4 = -\frac{2F}{\sqrt{3}} \quad \text{in} \quad F_5 = \frac{F}{\sqrt{3}}.$$

Tu smo uporabili $\sin \pi/3 = \sqrt{3}/2$ in $\cos \pi/3 = 1/2$.

Sedaj se lotimo vozlišča C . Ravnovesna enačba je $\vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_5 = \vec{0}$. Sila \vec{F}_5 je že znana, neznan sta \vec{F}_2 in \vec{F}_3 . Po komponentah dobimo sedaj

$$-\cos \alpha F_2 + \cos \alpha F_3 + F_5 = 0 \quad \text{in} \quad -\sin \alpha F_2 - \sin \alpha F_3 = 0.$$

Rešitev

$$F_2 = \frac{F}{\sqrt{3}} \quad \text{in} \quad F_3 = -\frac{F}{\sqrt{3}}.$$

Tu smo upoštevali že znano vrednost za F_5 .

Nadljudujemo z vozliščem A . Ravnovesna enačba je $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{A} = \vec{0}$. Po komponentah

$$A_1 + \cos \alpha F_2 + F_1 = 0 \quad \text{in} \quad A_2 + \sin \alpha F_2 = 0.$$

Dobili smo dve enačbi za eno neznanko, saj F_2 že poznamo, poznamo pa tudi silo podpore \vec{A} . Rešimo sistem kokor, da F_2 ne bi poznali. To storimo zato, da preverimo pravilnost dosedanjih računov. Rešitev je

$$F_1 = -\frac{F}{2\sqrt{3}} \quad \text{in} \quad F_2 = \frac{F}{\sqrt{3}}.$$

Izračunani F_2 se ujema z že izračunano vrednostjo. Dobili smo vse sile palic. Kompresijske so F_1 , F_3 in F_4 . Največja kompresijska sila nastopa v četrti palici. Če želimo, lahko preverimo pravilnost izračuna sil z ravnovesnimi enačbami vozlišča B .

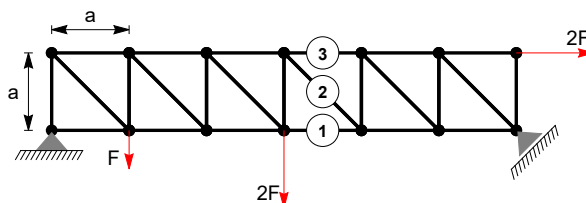
4.2 Prerezna metoda

Pogostokrat želimo izračunati sile palic samo za posamezne palice paličja. Kot smo videli pri vozliščni metodi, je lahko pot od vozlišča do vozlišča zaželenih palic dolgotrajna. Ta težavo reši *prerezna metoda* po kateri izračunamo samo tiste sile palic, ki jih seka navidezni prerez paličja. Metoda pa ni vsemogočna, uporabimo jo lahko samo v primerih:

- Navidezni prerez prereže samo tri palice ravninskega paličja oziroma šest palic prostorskega paličja.
- Prerezane palice nimajo skupnega presečišča.

Prvi pogoj velja zato, ker imamo v statiki na voljo samo tri oziroma šest ravnovesnih enačb, drugi pa zato, ker je v primeru skupnega presečišča momentna enačba trivialna in je tako naloga statično nedoločena. Z drugo omejitvijo se redko soočimo, prva pa pogosto nastopi pri bolj zapletenih paličjih.

Pri prerezni metodi paličje navidezno prerežemo na dva dela. Nato si izberemo en del. Odrezani del je tudi togo telo in ker je del celotnega paličja, ki miruje, veljajo tudi za ta del ravnovesne enačbe in te enačbe določajo sile prerezanih palic, ki so za odrezani del zunanje sile. Poglejmo na primeru, kako deluje prerezna metoda.



Slika 4.4: Paličje sestavljeno kvadratov.

Za podano paličje na sliki 4.4 moramo določiti sile označenih palic. Uporabili bomo presečno metodo, ki z navideznim presekom skozi označene palice razdeli paličje na dva dela. Prvi korak pri presečni metodi je izračun sil podpor. Levo podporo, ki je nepomična členkasta podpora označimo z A , desno pa z B . Desna podpora je drsna v smeri, ki oklepa kot $\pi/4$ z vodoravno smerjo. V levo podporo postavimo izhodišče koordinatnega sistema z osjo x v vodoravni smeri. Potem je sila leve podpore $\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j}$, sila desne podpore pa je $\vec{B} = B(-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j})$. Tu smo upoštevali, da je podpora drsna pod kotom $\pi/4$, in je zato sila podpore v smeri $\pi/4 + \pi/2$. Paličje je obremenjeno v treh točkah s prijemališči $P_1 = (a, 0)$, $P_2 = (3a, 0)$ in $P_3 = (6a, 0)$ s silami $\vec{F}_1 = -F\vec{j}$, $\vec{F}_2 = -2F\vec{j}$ in $\vec{F}_3 = 2F\vec{i}$. Komponento A_2 dobimo iz ravnovesja momenta s polom v B

$$-6a \times A_2 + 5a \times F + 3a \times 2F - a \times 2F = 0.$$

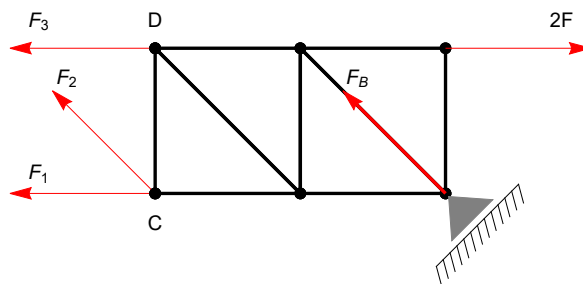
Rešitev je $A_2 = 3F/2$. Momentna enačba s polom v A je

$$-a \times F - 3a \times 2F - a \times 2F + 6a \times B \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.$$

Rešitev je $B = \frac{3F\sqrt{2}}{2}$. Komponento A_1 izračunamo iz ravnovesja sil v vodoravni smeri. Enačba se glasi

$$A_1 - B/\sqrt{2} + 2F = 0.$$

V enačbo vstavimo že izračunano vrednost za B . Potem je $A_1 = -F/2$.



Slika 4.5: Odrezani desni del paličja.

Po izračunu sil podpor je na vrsti izračun sil označenih palic. Izberimo si desni del odrezanega paličja, glej sliko 4.5. Določiti moramo sile F_1 , F_2 in F_3 . Silo F_3 dobimo iz ravnovesja momenta s polom v točki C

$$-a \times F_3 + a \times 2F - 2a \times B/\sqrt{2} = 0.$$

Potem $F_3 = -F$. Tu smo upoštevali že znano vrednost B . Silo F_1 dobimo iz momentne enačbe s polom v presečišču sile \vec{F}_2 in \vec{F}_3

$$-a \times F_1 - a \times B/\sqrt{2} + 3a \times B/\sqrt{2} = 0.$$

Rešitev je $F_1 = 3F$. Silo F_2 izračunamo iz ravnovesja sil. Vsota sil v navpični smeri je

$$F_2/\sqrt{2} + B/\sqrt{2} = 0 \implies F_2 = -\frac{3F\sqrt{2}}{2}.$$

Pravilnost izračuna lahko še peverimo z izračunom vsote v vodoravni smeri. Tako smo dobili iskane sile palic

$$F_1 = 3F, \quad F_2 = -\frac{3F\sqrt{2}}{2} \quad \text{in} \quad F_3 = -F.$$

Seveda lahko kombiniramo obe metodi. S prerezno metodo izračunamo sile presekanih palic, nato pa z vozliščno metodo nadaljujemo z izračunom sil sosednjih palic. Če presek seka več kot tri oziroma šest palic, začnemo z vozliščno metodo v vozlišču, ki je povezano samo z dvema (trema) palicama (palicami) in nato usmerimo vozliščno metodo proti vozliščem presekanih palic.

4.3 Vprašanja in naloge

4.3.1 Vprašanja

1. Skiciraj tri primere statično nedoločenega paličja.

2. Skiciraj primer paličja pri katerem ne moreš uporabiti prerezne metode.
3. Kaj je prednost prerezne metode in kaj so njene slabosti?
4. Kaj je prednost vozliščne metode in kaj so njene slabosti?
5. Za prostorsko paličje, ki je podprto v treh točkah, najdi primer statično določene podpore.

4.3.2 Naloge

1. Za paličje sestavljeno iz enakostраниčnih trikotnikov na sliki izračunaj sile palic.

Rešitev: Označimo levo podporo z A , desno z B in postavimo koordinatni sistem z osjo x v vodoravni smeri in osjo y v navpični. Sili podpor sta $\vec{A} = A\vec{j}$ in $\vec{B} = B_1\vec{i} + B_2\vec{j}$. Iz simetrije naloge takoj sledi $B_1 = 0$ in $A = B_2 = F/2$. Ker je vrh paličja neobremenjen, sta sili palic v vrhu enaki nič, $F_1 = F_2 = 0$. Nadalje zaradi simetrije sledi, da je $F_4 = F_7$, $F_5 = F_6$ in $F_8 = F_9$. Sile F_3, F_6, F_7 in F_9 določimo z vozliščno metodo. Iz ravnovesja sil v desni podpori

$$\frac{1}{2}F + \frac{\sqrt{3}}{2}F_7 = 0, \quad -F_9 - \frac{1}{2}F_7 = 0$$

sledi

$$F_7 = -\frac{1}{\sqrt{3}}F, \quad F_9 = \frac{1}{2\sqrt{3}}F.$$

Iz ravnovesja v presečišču palic 2, 3, 6 in 7

$$-F_3 - \frac{1}{2}F_6 + \frac{1}{2}F_7 = 0, \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}F_6 - \frac{\sqrt{3}}{2}F_7 = 0$$

dobimo

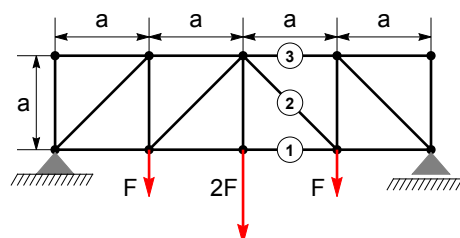
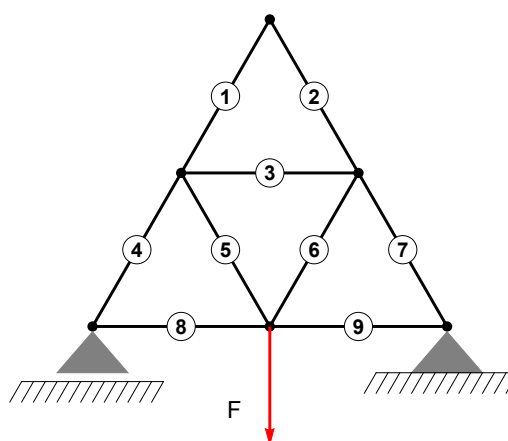
$$F_6 = \frac{1}{\sqrt{3}}F, \quad F_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}F.$$

2. Za paličje na sliki izračunaj:

- (a) sile v podporah A in B ;
- (b) sile označenih palic 1, 2, 3.

Rešitev: Prvo določimo sile podpor. Sili podpor v vertikalni smeri označimo z A in B . Momentna enačba s polom v A je

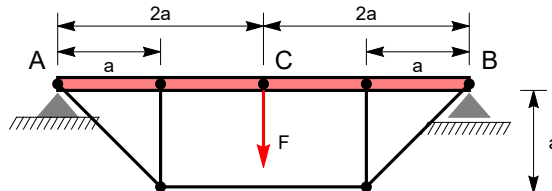
$$4aB - F(a + 4a + 3a) = 0.$$



Od tod $B = 2F$ in zaradi simetrije problema $A = B = 2F$. Horizontalna komponenta v podpori je enaka nič.

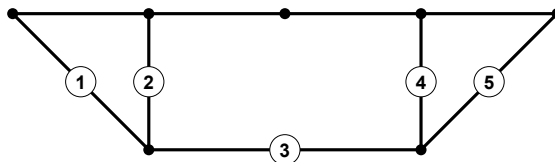
Sile palic bomo izračunali s prerezno metodo. Zapisali bomo ravnovesne enačbe za desni del paličja. Momentna enačba v presečišču prve in druge palice je $aF_3 + aF - 2aA = 0$. Potem $F_3 = 3F$. Momentna enačba v presečišču druge in tretje palice je $-aF_1 - aA = 0$. Od tod $F_1 = -2F$. Silo F_2 druge palice dobimo iz ravnovesja sil v navpični smeri. Velja $A - F + \frac{1}{\sqrt{2}}F_2 = 0$ in tako $F_2 = -\sqrt{2}F$.

3. Dva nosilca sta členkasto speta v točki C , enostavno podprta na svojih krajiščih in spojena s paličjem tako kot kaže skica. Izračunaj sile palic.



Rešitev: Prvo izračunamo sili podpor. Iz simetrije naloge takoj sledi, da sta sili podpor enaki $A = B = F/2$.

Za izračun sil palic, palice prvo označimo, tako kot kaže skica. Palico 3 navidezno prerežemo s prerezom skozi točko C . Na desni del konstrukcije deluje sila desne podpore, levi del konstrukcije s silo \vec{C} v točki C , obtežba \vec{F} in sila palice \vec{F}_3 .



Obtežbo \vec{F} lahko v celoti pripišemo levemu ali desnemu delu, lahko pa jo tudi proporcionalno razdelimo med deloma. Kot bomo kmalu videli, kako obtežbo razdelimo, ne vpliva na sile palic. Ravnotežna enačba momenta s polom v točki C je $2a\frac{1}{2}aF - aF_3 = 0$ in tako $F_3 = F$. V spoju palic 3, 4 in 5 je vsota sil palic enaka nič. Iz ravnovesja v vodoravni smeri dobimo $F_5 = \sqrt{2}F$ in nato še v navpični $F_4 = -F$. Zaradi simetrije so sile palic na levi in desni enake, velja $F_1 = F_5$ in $F_2 = F_4$.

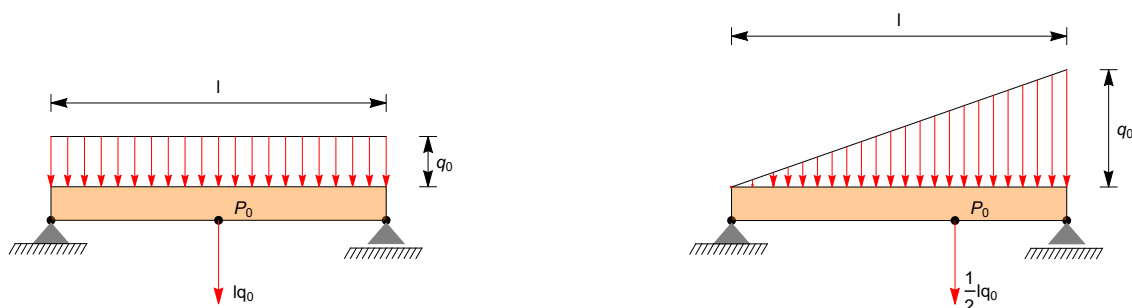
Poglavje 5

Nosilci

Podobno kot palica je nosilec konstrukcijski element z eno prevladajočo dimenzijo. Tej dimenzij pravimo dolžina, ostalima dvema pa debelina in višina. Dimenzija je prevladajoče, če je vsaj za faktor 10 večja od prostalih. Z razliko od palice pa nosilec dopušča obremenitev v poljubni smeri vzdolž celotne dolžine elementa. V tem poglavju bomo nosilec obravnavali v okviru modela togega telesa. Deformacijo nosilcev bomo obravnavali pri Trdnosti. Omejili se bomo na ravne ravninske nosilce. Standarden nosilec v uporabi je raven, ukrivljeni so v večini izdelani po naročilu. Nadalje, če je raven nosilec obremenjen simetrično, lahko uporabimo ravninski model. Ker bomo v tem poglavju nosilce obravnavali kot toga telesa, oblika nosilca ni pomembna. Pomembna je samo njegova dolžina, podpore in sile obremenitve, zato je v tem poglavju pomembna samo os nosilca. Privzeli bomo, da imajo vse sile na nosilec prijemališče na tej osi. Kljub temu pa bomo zaradi lepše predstavitve nosilce na slikah upodobili kot razpotegnjene pravokotnike, ki so obremenjeni na zgornji stranici. Po polznosti lahko obremenitve pravokotne na zgornjo stranico prestavimo na spodnjo stranico na katero bodo delovale tudi sile podpor. Spodnja stranica bo tako predstavljala os nosilca.

5.1 Linijska obremenitev

Nosilec je lahko obremenjen vzdolž svoje dolžine. Pravimo, da je linijsko obremenjen. Linijska obremenitev je podana z dolžinsko gostoto obremenitve. Ker nosilce obravnavamo še v okviru modela togega telesa, želimo linijski obremenitvi prirediti ekvipolentno točkovno obremenitev. V ta namen se omejimo na dve posebna primera linijske obremenitve, konstantno oziroma enakomerno in linearno, glej sliko 5.1. V obeh primerih je sila pravokotna na nosilec. Taki sili pravimo *prečna sila*.

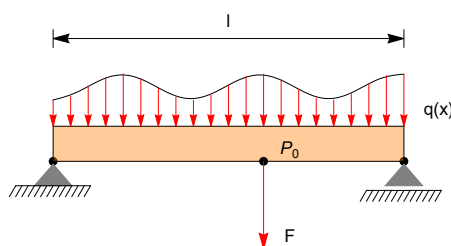


Slika 5.1: Linijska obremenitev z rezultanto: levo konstantna, desno linearna.

Pri konstantni obremenitvi je gostota obremenitve konstantna. Označimo jo s q_0 glej sliko 5.1 za shematski prikaz. Pri upodobitvi sil na skici velja opozoriti na potankost, ki smo jo do sedaj zamolčali. Konstrukcijo oziroma sistem togih teles narišemo v izbranem merilu, ki določa razdaljo med točkami. Nato narišemo na isto sliko še sile. Silo narišemo kot vektor, velikost tega vektorja na sliki bi naj bila velikost sile. Vendar ni, saj ima velikost objekta na sliki dolžinsko enoto. Če želimo torej, da slika v vseh potankostih opiše nalogo, moramo sliko opremiti še s podatkom, kakšno je razmerje med velikostjo sile in dolžinsko enoto na sliki. Ker pa je za vse sile, ki nastopajo v problemu to razmerje enako, nam tega razmerja pri risanju ni potrebno eksplicitno določiti. Razmerja celo ni potrebno določiti, če nalogo rešimo grafično. Grafično reševanje, tej metodi pravimo *grafostatika*, danes ne uporabljamo več. Na sliki 5.1 je torej q_0 poljubno izbran. Nosilec smo ubremenili navzdol, seveda pa bi ga lahko obremenili navzgor. Ko govorimo o predzanku obremenitve nosilca smeri navzdol pravimo pozitivna. V nadaljevanju bomo tako postavili koordinatni sistem xz tako, da bo os x kazala v smeri nosilca, os z pa navzdol. Zakaj smo izbrali os z in ne osi y bomo kmalu videli. Rezultanta konstantne linijske obremenitve je potem q_0l , kjer je l dolžina nosilca. Linijska obremenitev je sistem vzporednih sil, za katerega vemo, da ga lahko reduciramo na silo s skupnim prijemaščem v "masnem" središču obremenitve. V primeru konstantne obremenitve je to na polovici nosilca. Glej sliko 5.1.

Linearna linijska obremenitev je podana na desni sliki slike 5.1. Gostota narašča linearno od vrednosti nič na levem krajišču do vrednosti q_0 na desnem. Če označimo z x razdaljo vzdolž nosilca od levega krajišča, je potem gostota linijske obremenitve $q(x)$ funkcija $q(x) = q_0x/l$. V primeru, ko gostota pada od vrednosti q_0 proti vrednosti nič pa je $q(x) = q_0(l-x)/l$. Linearno linijsko obremenitev si lahko predstavljamo kot na nosilec naložen pesek s konstantno strmino. Rezultanta linearne obremenitve je enak ploščini trikotnika, ki ga omejujeta os x in funkcija $q(x)$, rezultanta je potemtakem enaka $\frac{1}{2}q_0l$. Linearna obremenitev je tudi sistem vzporednih sil. Ekvipolentna rezultanta ima torej prijemašče v masnem središču trikotnika, to je v razdalji $\frac{2l}{3}$ od krajišča, kjer je gostota enaka nič, glej sliko 5.1.

Poleg prečne sile, ki smo jih obravnavali, je nosilec lahko obremenjen tudi v smeri nosilca. Tem silam pravimo osne sile. V okviru statike lahko po polnosti te sile prestavimo vzdolž osi na eno izmed krajišč osi nosilca. V tem poglavju osnim silam ne bomo posvečali večje pozornosti. Naloge z osnimi silami rešimo na podoben način kot naloge s prečnimi silami.



Slika 5.2: Linijska obremenitev z rezultanto.

Poglejmo še splošen primer. Naj bo $q(x)$ poljubna linijska prečna obremenitev, glej sliko 5.2. Potem je rezultanta F dana s ploščino med osjo nosilca in grafom funkcije $q(x)$.

$$F = \int_0^l q(x) dx. \quad (5.1)$$

Smer rezultante je v smeri osi z . Če je $F > 0$ kaže rezultanta navpično navzdol, torej v smeri osi z , če je $F < 0$ pa kaže navzgor. Navor linijske obremenitve s polom v levem krajišču je

$$N = \int_0^l xq(x) dx. \quad (5.2)$$

Smer navora je pravokotna na ravnino nosilca. Če je $N > 0$ navor kaže v ravnino sliko, pri $N < 0$ pa iz ravnine ven. Prvi smer je v smeri vektorja $-\vec{j}$, druga pa \vec{j} . Rezultanta s prijemališčem v

$$x_* = \frac{1}{F} N = \frac{\int_0^l xq(x) dx}{\int_0^l q(x) dx} \quad (5.3)$$

je ekvipolentna točkovna obremenitev.

5.2 Notranje količine nosilca

Če nosilec v statičnem ravnovesju navidezno prerežemo, dobimo dva konca nosilca, ki sta v statičnem ravnovesju. Ravnovesje ohranja delovanje enega dela odrezanega nosilca na drugi. Na prerezu nosilca se prenašajo vse komponente sil in navora. V ravninskem primeru torej komponenti sil v smeri x in z in navor okrog osi y . Komponento v smeri osi x imenujemo osno silo in jo označimo z $V(x)$, komponenta v smeri z je prečna sila $Q(x)$, navoru oziroma momentu v smeri y pa pravimo upogibni moment in ga označimo z $M(x)$. Vse te količine so odvisne od koordinate prereza x , zato so funkcije te koordinate. Pravimo jim *notranje količine nosilca*. V nadaljevanju bomo z $V(x)$, $Q(x)$ in $M(x)$ označevali komponente sil in navora desnega dela $\{s : x \leq s \leq l\}$ odrezanega nosilca pri koordinati x na levi del nosilca $\{s : 0 \leq s < x\}$. V definiciji smo rez $s = x$ vključili v desni del nosilca. Če je torej nosilec točkovno obremenjen v točki x , potem ta obremenitev pri rezu pri x pripada desnemu delu nosilca.



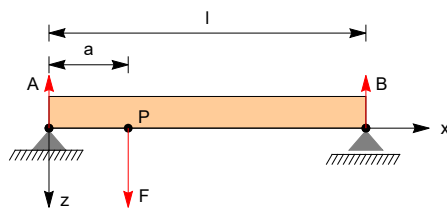
Slika 5.3: Navidezni prerez nosilca.

Na sliki 5.3 je prikazan prerez nosilca iz slike 5.2. Poleg linijske obremenitve in sil podpor so narisane tudi notranje količine. Vidimo da so vse notranje količine levega dela nosilca na desni nasprotno predznačene kot notranje količine desnega dela na levi del. Če postavimo koordinatni sistem z osjo x v smeri dolžine nosilca, osjo y v smeri iz ravnine nosilca in os z v smeri navzdol so sile in momenti desnega dela nosilca na levi $\vec{V} = V(x)\vec{i}$, $\vec{Q} = Q(x)\vec{k}$, $\vec{M} = M(x)\vec{j}$, levega na desni pa $-\vec{V}$, $-\vec{Q}$ in $-\vec{M}$. Na sliki opazimo tudi, da so vertikalne sile podpor usmerjene navzgor. Tako bomo sile podpor na nosilec pisali v obliki $\vec{A} = A_1\vec{i} - A_3\vec{k}$ za fiksno podporo in $\vec{B} = -B\vec{k}$ za drsno podporo.

Notranje količine so odvisne od kraja prereza. Spoznali bomo dve metodi, kako jih določiti.

5.3 Prerezna metodo

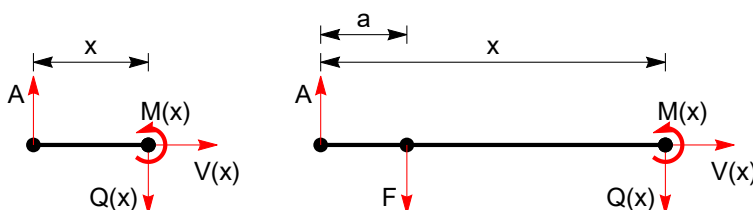
Kako deluje metoda je najbolje razložiti na primeru. Začnimo s primerom točkovno obremenjenega nosilca, glej sliko 5.4. Prvi korak je določitev sil podpor. Ker je nosilec obremenjen samo vertikalno s silo $\vec{F} = F\vec{k}$, sta očitno obe sili podpor samo v vertikalni smeri. Torej je $\vec{A} = -A\vec{k}$ in $\vec{B} = -B\vec{k}$.



Slika 5.4: Točkovno obremenjen nosilec.

Iz ravnovesja navorov s polom v točki A in B hitro dobimo, da je

$$A = \left(1 - \frac{a}{l}\right)F \quad \text{in} \quad B = \frac{a}{l}F. \quad (5.4)$$



Slika 5.5: Prerez točkovno obremenjenega nosilca, levo: prerez pred točkovno obremenitvijo; desno: po točkovni obremenitvi.

Sile podpor so s tem določene. Izberimo $x \in (0, l)$. Pri določitvi notranjih količin nosilca, ki je točkovno obremenjen, je zelo pomembno mesto prereza glede na prijemališče obremenitve, glej sliko 5.5. Naj bo $x \in (0, a)$. Temu prerezu pred točkovno obremenitvijo ustreza leva slika na 5.5. Takoj vidimo, da je ta odrezani del v ravnovesju, če je $V(x) = 0$ in $Q(x) = A$. Navor prečne sile s polom v levem krajišču je $xQ(x)$ v smeri v ravnino nosilca. Potem iz momentne enačbe sledi $M(x) = xQ(x)$. Tako smo dobili

$$V(x) = 0, \quad Q(x) = A = \left(1 - \frac{a}{l}\right)F, \quad M(x) = xA = x\left(1 - \frac{a}{l}\right)F \quad \text{za} \quad 0 \leq x < a. \quad (5.5)$$

Primer $a \leq x \leq l$ je skiciran na desni sliki na 5.5. Tu smo dopustili $x = a$ po dogovoru, da desni del nosilca vsbuje prerez. Sedaj na odrezani desni del nosilca deluje sila obremenitve \vec{F} . Ravnovesne enačbe za ta del so tako:

$$V(x) = 0, \quad -A + F + Q(x) = 0 \quad \text{in} \quad -aF - xQ(x) + M(x) = 0.$$

Tako dobimo

$$V(x) = 0, \quad Q(x) = A - F = -\frac{a}{l}F, \quad M(x) = aF + x(A - F) = a\left(1 - \frac{x}{l}\right)F \quad \text{za} \quad a \leq x \leq l. \quad (5.6)$$

Dobili smo potek notranjih količin za cel nosilec. Kaj opazimo?

- Osnova je po celi dolžini enaka nič. To je zato, ker obremenitev \vec{F} nima komponente v smeri osi nosilca.
- Prečna sila je odsekoma konstantna. Na intervalu od $0 \leq x < a$ ima vrednost leve podpore, na $a \leq x \leq l$ pa nasprotno vrednost desne podpore. V točki obremenitve ima skok velikosti obremenitve. Ta lastnost velja v splošnem za točkovne obremenitve. V vsaki točki točkovne obremenitve ima prečna sila skok v smeri in velikosti obremenitve. V točkah obremenitev je prečna sila zveza z desne.

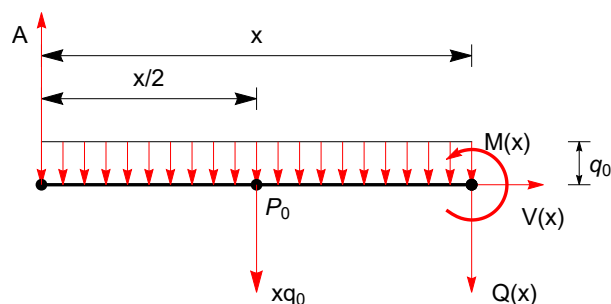
- Upogibni moment je enak nič v krajiščih nosilca. To je posledica podpor. Upogibni moment na levem krajišču nosilca je nasprotno enak momentu podpore, na desnem pa je enak momentu podpore. Če je podpora členkasta je moment enak nič in potemtakem je upogibni moment v členkastih podporah na koncu nosilca enak nič. To velja za vse vrste podpor. V primeru, če je nosilec prevesen, to pomeni, da ni podprt na krajišču nosilca, ampak nekje vmes, je upogibni moment na krajišču nosilca enak nič, razen v primeru, če na koncu deluje zunanji navor. V primeru točkovno podprtega nosilca upogibni moment narašča z x do $x = a$, nato pa pada. Če vstavimo $x = a$ v enačbi za moment (5.5) in (5.6) dobimo obakrat enako vrednost $M(a) = a(1 - a/l)F$. Upogibni moment točkovne obremenitve je torej zvezen. Upogibni moment je torej odsekoma linearen. Funkcija upogibnega momenta $M(x)$, je zvezna, ni pa odvedljiva v točkah obremenitve. Odsekoma linearen upogibni moment doseže ekstremalne vrednosti v točkah obremenitve.

Slika 5.6 prikazuje grafa prečne sile in upogibnega momenta za primer $a = l/4$.



Slika 5.6: Prečna sila in upogibni moment točkovne obremenitve pri $a = l/4$. Slika je brezdimenzijska.

Poglejmo še primer uporabe prerezne metode na linijsko obremenjenem nosilcu. Naj bo nosilec konstantno obremenjen tako kot kaže leva slika v sliki 5.1, naj velja $q(x) = q_0$. V primeru zvezne linijske obremenitve lahko prerez naredimo kjerkoli neodvisno od položajana na nosilcu. Tudi sedaj je prvi korak določitev sil podpor. Linearni linijski obremenitvi je ekvipolentna točkovna obremenitev, ki kaže navzdol, ima velikost $F = q_0 l$ in ima prijemališče pri $a = \frac{1}{2}l$. Potem je po formuli (5.4) $A = B = \frac{1}{2}F$. To sledi tudi iz simetrije naloge, podpori sta enako obremenjeni in uravnovešata obremenitev F .



Slika 5.7: Prerez linearno obremenjenega nosilca.

Izberimo $0 \leq x \leq l$. Na del nosilca od 0 do x deluje sila podpore A , linijska obremenitev osna in prečna sila $\vec{V}(x)$ in $\vec{Q}(x)$ ter upogibni moment $M(x)$, glej sliko 5.7. Ravnesne enačbe so

$$V(x) = 0, \quad -A + xq_0 + Q(x) = 0, \quad -\frac{1}{2}q_0x^2 - xQ(x) + M(x) = 0.$$

Rešitev je

$$V(x) = 0, \quad Q(x) = q_0\left(\frac{1}{2}l - x\right), \quad M(x) = \frac{1}{2}q_0x(l - x). \quad (5.7)$$

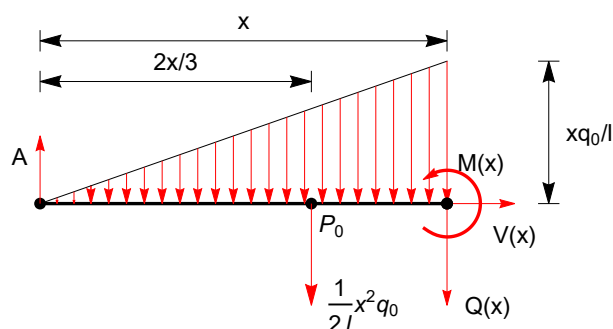


Slika 5.8: Prečna sila in upogibni moment za konstantno linijsko obremenitvijo. Slika je brezdimenzijska, abscisa je x/l , ordinata pa $1/q_0l$ oziroma $1/q_0l^2$.

Na sliki 5.8 je upodobljena rešitev (5.7). Rešitev ima povsem drugačen značaj kot pri točkovni obremenitvi. Sedaj sta tako prečna sila in upogibni moment zvezni funkciji. Na levem krajišču ima prečna sila vrednost velikosti leve podpore, na desnem pa vrednost nasprotno velikosti desne podpore. To se ujema s primerom točkovne obremenitve. Potek pa je drugačen. Sedaj prečna sila linearno pada od levega do desnega krajišča. Upogibni moment je kvadratna funkcija, ki je na krajiščih enaka nič. Upogibni moment doseže maksimalno vrednost na polovici, to je v točki, kjer je prečna sila enaka nič. To ni naključje, Videli bomo, da je vrednost prečne sile enaka nič v točkah, kjer ima upogibni moment linijske obremenitve ekstramalen.

Konstantni linijski obremenitvi je ekvipolentna točkovna obremenitev s prijemališčem na polovici nosilca. Obremenitvi sta ekvipolentni, kar pomeni, da imata v statiki enak učinek. Vendar ta enakovrednost ne velja za notranje količine. Potek prečne sile in upogibnega momenta je za točkovno obremenitvijo bistveno drugačen od ekvipolentne linijske obremenitve, primerjaj sliki 5.6 in 5.8. Notranje količine torej presegajo okvir modela togega telesa. To nas ne sme presenetiti, saj če se spomnemo, je enačba gibanja masnega središča togega telesa neodvisna od notranjih sil, izrek o vrtilni količini pa od notranjih momentov. Enak zaključek, da dve ekvipolentni obremenitvi nimata enakih notranjih količin velja tudi za paličje. Tam so sile palic notranje količine in so odvisne od obremenitev v vozliščih.

Poglejmo še primer, ko je nosilec linearno obremenjen. Naj velja $q(x) = q_0x$, glej desno sliko v sliki 5.6. Prvi korak je, kot že vemo, določitev sil podpor. Linearni linijski obremenitvi je ekvipolentna točkovna obremenitev, ki kaže navzdol, ima velikost $F = \frac{1}{2}q_0l$ in ima prijemališče pri $a = \frac{2}{3}l$. Potem je po formuli (5.4) $A = \frac{1}{3}F = \frac{1}{6}q_0l$ in $B = \frac{2}{3}F = \frac{1}{3}q_0l$.



Slika 5.9: Prerez linearno obremenjenega nosilca.

Izberimo $0 \leq x \leq l$. Na del nosilca od 0 do x deluje sila podpore A , linijska obremenitev osna

in prečna sila $\vec{V}(x)$ in $\vec{Q}(x)$ ter upogibni moment $\vec{M}(x)$, glej sliko 5.9. Ravnovesne enačbe so

$$V(x) = 0, \quad -A + \frac{1}{2l}q_0x^2 + Q(x) = 0, \quad -\frac{1}{3l}q_0x^3 - xQ(x) + M(x) = 0.$$

Rešitev je

$$V(x) = 0, \quad Q(x) = \frac{1}{6}q_0l(1 - 3(x/l)^2), \quad M(x) = \frac{1}{6}q_0lx(1 - (x/l)^2) \quad (5.8)$$

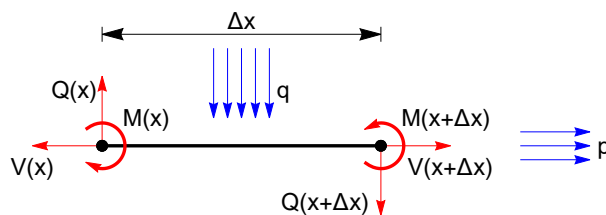
Rešitev je upodobljena na sliki 5.10. Sedaj je prečna sila kvadratna funkcija, upogibni moment pa kubična. Ta lastnost, da je pri polinomski linijski obremenitvi stopnje n prečna sila polinom stopnje $n + 1$, upogibni moment pa stopnje $n + 2$ velja vedno.



Slika 5.10: Prečna sila in upogibni moment za linearno linijsko obremenitvijo. Slika je brezdimenzijska, abscisa je x/l , ordinata pa $1/q_0l$ oziroma $1/q_0l^2$.

Določitev notranjih količin nosilca je linearna naloga. To pomeni, če je obremenitev nosilca vsota dveh obremenitev, so potem notranje količine enake vsoti notranjih količin posameznih obremenitev. Tako lahko iz obravnavanih primerov takoj sestavimo notranje količine za obremenitev sestavljeno iz točkastih in linijskih obremenitev.

5.4 Diferencialna metoda



Slika 5.11: Odsek nosilca med x in $x + \Delta x$.

Z diferencialno metodo bomo izpeljali diferencialne zveze med notranjimi količinami. Izberimo $x \in (0, l)$ in $\Delta x > 0$, tako da je $x + \Delta x \in (0, l)$ in navidezno prerežimo nosilec pri x in $x + \Delta x$, glej sliko 5.11. Privzemimo, da je na intervalu od x do $x + \Delta x$ linijska obremenitev $f = p\vec{i} + q\vec{k}$ zvezna in da ima prijemališče na osi nosilca. Sile in momenti na odrezan del nosilca so prikazane na sliki 5.11.

Ravnovesne enačbe za odrezani del nosilca med x in $x + \Delta x$ so

$$\begin{aligned} V(x + \Delta x) - V(x) + \int_x^{x+\Delta x} p(s) ds &= 0, \\ Q(x + \Delta x) - Q(x) + \int_x^{x+\Delta x} q(s) ds &= 0, \\ M(x + \Delta x) - M(x) - \int_x^{x+\Delta x} (s - x)q(s) ds - \Delta x Q(x + \Delta x) &= 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Prva enačba je ravnovesna enačba v vodoravni smeri. Tu smo upoštevali, da je osna sila desnega dela nosilca na odrezani nosilec v točki $x + \Delta x$ enaka $V(x + \Delta x)$, sila levega dela v x na odrezani del pa $-V(x)$. Gostota vodoravne komponente linijske sile je porazdeljena po dolžini od x do $x + \Delta x$. Njena rezultanta je vsota vseh teh prispevkov. Ker gre za zvezno porazdelitev, se ta vsota izraža z določenim integralom. Podobno velja za rezultanto v smeri osi k . Tretja enačba je ravnovesna enačba navora s polom v levem krajišču odrezanega nosilca. Poleg navorov na krajiščih, ki jih prispevata dela nosilca levo in desno od odrezanega dela nastopa še navor prečne sile na desnem krajišču in navor prečne linijske obremenitve. Ta navor je zapisan z integralom.

Sedaj delimo vse enačbe z Δx in poženimo Δx proti nič. Na ta način bomo enačbe lokalizirali in dobili iskane diferencialne zveze. Po definiciji je odvod limita diferenčnega kvocienta. Nadalje je po izreku o povprečni vrednosti

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} p(s) ds = p(x).$$

Tu se velja spomniti, da izrek o povprečni vrednosti velja, če je funkcija pod integralskim znakom zvezna. Tako dobimo iz prvih dveh enačb

$$\frac{dV}{dx}(x) = -p(x), \quad \text{in} \quad \frac{dQ}{dx}(x) = -q(x). \quad (5.10)$$

Oсна in prečna sila sta torej odvedljivi, njuna odvoda določata enačbi (5.10). Odvedljiva funkcija je tudi zvezna. Potem $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} Q(x + \Delta x) = Q(x)$. Iz tretje enačbe v (5.9) potem dobimo

$$\frac{dM}{dx}(x) = Q(x). \quad (5.11)$$

Tu smo upoštevali, da je limita povprečna vrednost integrala navora v (5.9) enaka nič. Enačbe (5.10) in (5.11) so diferencialne enačbe notranjih količin nosilca. Iz diferencialnega računa je znano, da ima funkcija $f(x)$ v točki x_0 lokalni maksimum/minimum, če je v tej točki odvod funkcije enak nič in je drugi odvod negativen/pozitiven. V našem primeru to pomeni, da je upogibni moment maksimalen/minimalen, če je v tej točki prečna sila enaka nič in je gostota linijske sile q v tej točki pozitivna/negativna. Tu smo upoštevali, da iz (5.10) in (5.11) sledi

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q(x).$$

Kako uporabimo diferencialno metodo, si oglejmo na primeru.

5.4.1 Linearna linijska obremenitev

Za primer uporabe diferencialne metode bomo rešili že po prerezni metodi rešeno nalogo linearne linijske obremenitve $q(x) = q_0 x/l$ na enostavno podprtemu nosilcu. Osna sila je enaka nič. Za določitev prečne sile rešimo enačbo

$$\frac{dQ}{dx} = -q(x) = -q_0 \frac{x}{l}.$$

Vprašajmo se, kaj moramo odvajati, da dobimo x . Odgovor je $\frac{1}{2}x^2$ oziroma $\frac{1}{2}x^2 + C_1$, saj je odvod konstante enak nič. Potem je rešitev zgornje enačbe

$$Q(x) = -\frac{q_0 x^2}{2l} + C_1.$$

Konstanto C_1 bi lahko določili iz vrednosti prečne sile na krajišču. Vendar to ne bomo storili. Določili jo bomo kasneje iz robnega pogoja na upogibni moment. Sedaj, ko je prečna sila izračunana, vstavimo to v enačbo (5.11). Tako dobimo

$$\frac{dM}{dx}(x) = -\frac{q_0 x^2}{2l} + C_1.$$

Odvod monoma x^n je nx^{n-1} . Potem je

$$M(x) = -\frac{q_0 x^3}{6l} + C_1 x + C_2.$$

Odvod izračunanega momenta potrди pravilnost izračuna. Na vrsti je določitev konstant C_1 in C_2 . Upoštevajmo, da sta podpori členkasti. Potem je $M(x=0) = M(x=l) = 0$. Iz enačbe $M(0) = 0$ sledi takoj $C_2 = 0$. Izračunajmo še C_1 . Velja

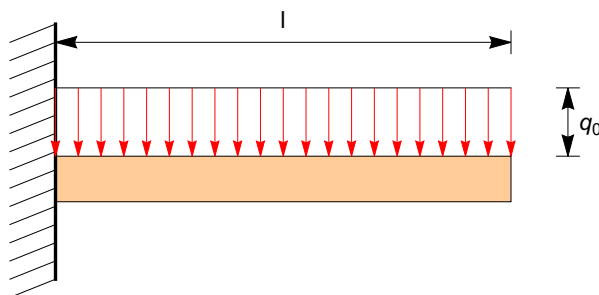
$$0 = M(l) = -\frac{q_0 l^2}{6} + C_1 l.$$

Potem je $C_1 = q_0 l/6$. Iskani notranji količini sta potem

$$Q(x) = \frac{q_0 l}{6} (1 - 3(x/l)^2) \quad \text{in} \quad M(x) = \frac{q_0 l}{6} x (1 - (x/l)^2).$$

Dobili smo enako rešitev kot pri prerezni metodi (5.8). Pot po diferencialni metodi je elegantnejša, je pa zato matematično zahtevnejša, saj je pri njej potrebno rešiti diferencialne enačbe. Poleg tega lahko prerezno metodo uporabimo vedno, diferencialno metodo pa samo, če je linijska obremenitev zvezna. V kratkem pa bomo prednosti obeh metod združili in tako dobili metodo, ki jo lahko vedno uporabimo. Še prej pa pogledjmo primer konzolno vpetega nosilca.

5.4.2 Konzolno vpeti nosilec



Slika 5.12: Enakomerno obremenjen konzolni nosilec.

Konzolno vpeti nosilec je enakomerno linijsko obremenjen $q(x) = q_0$, glej sliko 5.12. Zanima nas potek prečne sile in upogibnega momenta. Rešitev enačbe $\frac{dQ}{dx} = -q_0$ je $Q(x) = -q_0 x + C_1$. Potem je $\frac{dM}{dx} = -q_0 x + C_1$ in $M(x) = -\frac{1}{2}q_0 x^2 + C_1 x + C_2$. Na vrsti je določitev konstant C_1 in C_2 . Za določitev konstant moramo poznati vrednosti prečne sile ali upogibnega momenta na

krajiščih nosilca. Konzolni nosilec je prost na svojem desnem koncu. To pomeni, da sta na desnem krajišču prečna sila in upogibni moment oba enaka nič. Velja torej $Q(x=l) = 0$ in $M(x=l) = 0$. Tako imamo dve enačbi za dve neznan konstanti. Iz enačbe $Q(x=l) = 0$ takoj dobimo $C_1 = q_0 l$. Potem je $M(x) = -\frac{1}{2}q_0 x^2 + q_0 l x + C_2$ in ker je $M(x=l) = 0$, je $C_2 = -\frac{1}{2}q_0 l^2$. Tako smo dobili

$$Q(x) = q_0(l - x) \quad \text{in} \quad M(x) = -\frac{1}{2}q_0 l^2 (1 - x/l)^2. \quad (5.12)$$

Sedaj ko poznamo prečno silo in upogibni moment lahko tudi zapišemo sile in navor v konzolni podpori. Vodoravna komponenta sile konzolnega vpetja A_1 je očitno enaka nič, saj na nosilec ne deluje obremenitev v vodoravni smeri. Vertikalna komponenta A_2 je enaka prečni sili pri $x = 0$, torej $A_2 = q_0 l$. Iz ravnovesja momenta pri $x \rightarrow 0$ pa sledi, da je navor N podpore nasprotno enak upogibnemu momentu $M(x=0)$, saj mora biti njuna vsota enaka nič. Tako smo dobili $N = -\frac{1}{2}q_0 l^2$. Silo in navor konzolnega vpetja bi lahko izračunali seveda tudi direktno, z upoštevanjem ravnovesnih enačb za nosilec.

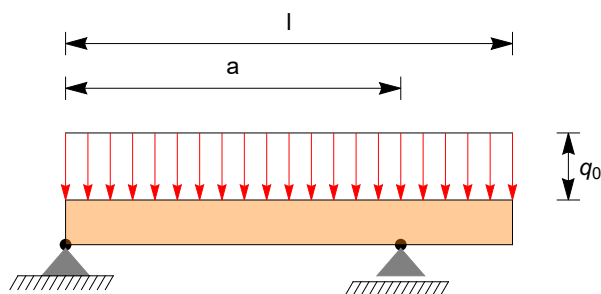
V rešitev (5.12) opazimo, da je upogibni moment vseskozi negativen. Po drugi strani pa je upogibni moment vseskozi pozitiven v (5.7) in (5.8). Zakaj? Odgovor je v upogibu, če nosilec ni tog, ga obremenitev upogne. Če je tendenca upogiba navzdol, je upogibni moment pozitiven, če je tendenca upogiba navzgor, je upogibni moment negativen. Pogostokrat lahko tendenco upogiba predvidimo iz obremenitve nosilca, tako da je to kontrola ali je izračunani upogibni moment v pravi smeri.

5.4.3 Robni pogoji

Konstante pri diferencialni metodi smo določili z robnimi pogoji na prečno silo ali upogibni moment. Velja naslednje:

- Na prostem koncu nosilca, torej če nosilec na koncu ni obremenjen, niti podprt, je tam upogibni moment enak nič, nič pa sta tudi osna in prečna sila.
- Če je desni konec nosilca pri $x = l$ obremenjen s silo v smeri pravokotno na nosilec, je prečna sila enaka sili obremenitve, če pa je obremenjen levi konec, je prečna sila enaka nasprotni sili obremenitve. To že poznamo iz naloge enostavno podprtega nosilca. Če je sila leve podpore $\vec{A} = -A\vec{k}$ in desne $\vec{B} = -B\vec{k}$, je $\vec{Q}(0) = -\vec{A} = A\vec{k}$ in $\vec{Q}(l) = \vec{B} = -B\vec{k}$. Enako velja tudi za osno silo in upogibni moment. Obremenitev nosilca na koncu z upogibnim momenti smo spoznali pri konzolnem nosilcu.

5.5 Prevesni nosilec



Slika 5.13: Enakomerno obremenjen prevesni nosilec.

Prevesni nosilec, glej sliko 5.13, je enakomerno obremenjen. Sedaj diferencialne metode ne moremo direktno uporabiti, saj je nosilec v desni podpori B točkovno podprt s silo podpore. Nalogo bomo rešili s kombinacijo obeh metod. Prvo določimo sile podpor. Enakomerna linijska obremenitev je ekvipolentna točkovni obremenitvi $F = q_0 l$ s prijemališčem na polovici dolžine nosilca $l/2$. Potem iz ravnovesja momenta s polom v desni podpori B sledi $(a - l/2)F = aA$ in

$$A = (1 - l/(2a))F = lq_0 - \frac{1}{2a}q_0 l^2.$$

Ravnovesna enačba s polom v A je $aB = lF/2$ in

$$B = \frac{1}{2a}q_0 l^2.$$

Linijska obremenitev na intervalu $(0, a)$ je enakomerna. Zato lahko na tem intervalu uporabimo enakost $\frac{dQ}{dx} = -q_0$. Potem je $Q(x) = -q_0 x + C_1$. Ker je $Q(0) = A$, je $C_1 = A$ in tako

$$Q(x) = lq_0 \left(1 - \frac{l}{2a}\right) - q_0 x \quad \text{za } 0 \leq x < a. \quad (5.13)$$

V $x = a$ deluje sila podpore B , zato ima prečna sila v tej točki skok velikosti podpore, $\vec{Q}(a) = \vec{Q}(a-) - \vec{B} = Q(a-)\vec{k} + B\vec{k}$. Tu smo z $Q(a-)$ zapisali levo limto $x \rightarrow a$ in uporabili formulo za obremenitev z leve strani. Potem je

$$Q(x = a) = Q(a-) + B = lq_0 \left(1 - \frac{l}{2a}\right) - q_0 a + \frac{1}{2a}q_0 l^2 = q_0(l - a).$$

Za $x \in (a, l)$ je nosilec ponovno samo linijsko obremenjen. Velja torej $\frac{dQ}{dx} = -q_0$. Potem je $Q(x) = -q_0 x + C_2$. Konstanto C_2 lahko določimo na dva načina, veljati mora $Q(a) = Q(a+)$ in $Q(l) = 0$. Prva enačba pravi, da je prečna sila v $x = a$ enaka desni limiti $\lim_{x \rightarrow a+} Q(x)$. Z drugimi besedami, prečna sila je zvezna z desne. Eno enakost bomo uporabili za izračun konstante, drugo pa za kontrolo. Zapišimo

$$Q(a) = Q(a+) \implies q_0(l - a) = -q_0 a + C_2 \implies C_2 = q_0 l$$

in tako

$$Q(x) = lq_0 \left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad \text{za } a \leq x \leq l. \quad (5.14)$$

Iz (5.14) vidimo, da je velja tudi $Q(x = l) = 0$ saj je desni konec nosilca prost.

Na vrsti je izračun upogibnega momenta. Tu uporabimo formulo $\frac{dM}{dx} = Q$. Tako dobimo

$$\begin{aligned} M &= lq_0 \left(1 - \frac{l}{2a}\right) x - \frac{1}{2}q_0 x^2 + C_3, \quad \text{za } 0 \leq x < a \\ M &= lq_0 \left(x - \frac{x^2}{2l}\right) + C_4, \quad \text{za } 0 \leq x < a. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Pri izračunu smo upoštevali že zapisano formulo, da je $\frac{d}{dx} \frac{1}{2}x^2 = x$ in $\frac{dx}{dx} = 1$. Konstanti C_3 in C_4 določimo iz robnih pogojev. Leva podpora je členkasta, zato $M(x = 0) = 0$, desno krajišče je prosto, $M(x = l) = 0$. Potem $C_3 = 0$ in $C_4 = -\frac{1}{2}q_0 l^2$. Upogibni moment je pri točkasti obremenitvi zvezen. Preverimo enakost $M(a-) = M(a+)$. Res, če vstavimo $x = a$ v (5.15), obakrat dobimo

$$M(a-) = M(a+) = -\frac{1}{2}q_0(l - a)^2.$$

Grafa prečne sile in upogibnega momenta sta prikazana na sliki 5.13.



Slika 5.14: Prečna sila in upogibni moment za prevesni nosilec s konstantno linijsko obremenitvijo. Slika je brezdimenzijska, $a/l = 3/4$, abscisa je x/l , ordinata pa $1/q_0l$ oziroma $1/q_0l^2$.

5.6 Vprašanja in naloge

5.6.1 Vprašanja

1. Izračunaj rezultanti konstantne in linearne obremenitve z integralom (5.1).
2. Za konstantno in linearno obremenitev preveri, da se izračunane vrednosti ujemajo z integralom (5.3).
3. Določi potek osne sile za točkovno obremenjen nosilec z obremenitvijo, ki ima neničelno komponento smeri nosilca.
4. Izračunaj maksimalno vredost upogibnega momenta za konstantno linijsko obremenitvijo in jo primerjaj z maksimalno vrednostjo upogibnega momenta ekvipolentne točkovne obremenitve.
5. Zapiši notranje količine enostavno podprtega nosilca, ki je obremenjen točkovno in z konstantno linijsko obremenitvijo.
6. Določi potek notranjih količin enakomerno obremenjenega konzolnega nosilca s prerezno metodo.

5.6.2 Naloge

1. Enostavno podprti nosilec dolžine l je vertikalno točkovno obremenjen v točkah a_i , $i = 1, \dots, n$ s silami \vec{F}_i .
 - (a) Določi potek prečne sile.
 - (b) Določi potek upogibnega momenta.
 - (c) Skiciraj poteka za primer $n = 3$, $l = 4$ m, $a_1 = 1$ m, $a_2 = 2$ m, $a_3 = 3$ m, $\vec{F}_i = F_i \vec{k}$, $F_1 = 1$ kN, $F_2 = 1/2$ kN, $F_3 = 1$ kN.

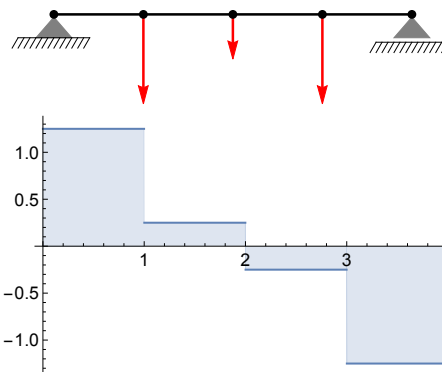
Rešitev: Nalogo rešimo v treh korakih. Prvo določimo sile podpor, nato potek prečne sile in na koncu še potek upogibnega momenta.

- (a) Podporo v levem krajišču označimo z A , v desnem z B . Določimo jih iz enačbe ravnovesja navorov. Velja $\sum_{i=1}^n a_i F_i = lB$ in $\sum_{i=1}^n (l - a_i) F_i = lA$. Tako dobimo:

$$A = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n (l - a_i) F_i,$$

$$B = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n a_i F_i.$$

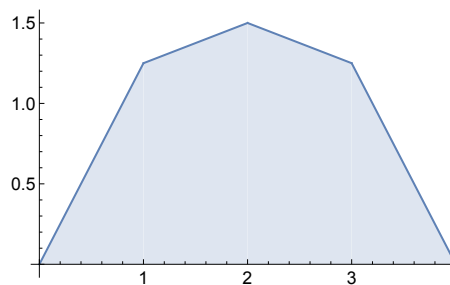
V konkretnem primeru je $A = B = 5/4$ kN.



Brezdimenzijski potek prečne sile.

- (b) Za enostavno podprti nosilec vemo, da je prečna sila Q v levem krajišču enaka sili podpore A , v desnem pa $-B$. Nadalje je prečna sila odseka konstantna s skoki v točkah obremenitve, ki so enaki obremenitvam.

Upogibni moment M je pri enostavno podprtem nosilcu v krajiščih enak nič, med točkami obremenitve pa poteka linearno. Iz enačbe $\frac{dM}{dt} = Q$ sledi, da je strmina enaka vrednosti prečne sile.



Brezdimenzijski potek upogibnega momenta.

V konkretnem primeru je maksimalen upogibni moment pri $x = 2$ m z vrednostjo

$$M_{max} = Q_1 a_1 + Q_2 (a_2 - a_1) = 3/2 \text{ kNm}.$$

2. Previsni nosilec dolžine l je podprt na levem krajišču in v oddaljenosti d od levega krajišča. Nosilec je točkovno obremenjen v točkah a_i , $i = 1, \dots, n$ s silami \vec{F}_i .

- (a) Določi potek prečne sile.
 (b) Določi potek upogibnega momenta.
 (c) Skiciraj poteka za primer $n = 3$, $l = 6$ m, $d = 4$ m, $a_1 = 1$ m, $a_2 = 2$ m, $a_3 = 6$ m, $\vec{F}_i = F_i \vec{k}$, $F_1 = 1$ kN, $F_2 = 1/2$ kN, $F_3 = 1$ kN.

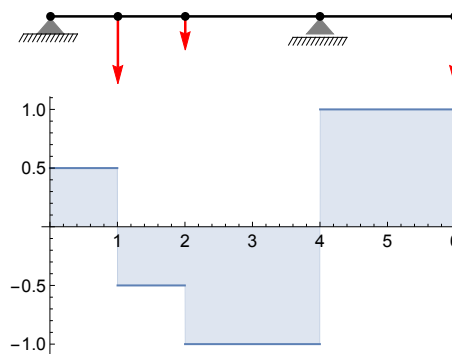
Rešitev: Nalogo rešimo v treh korakih. Prvo določimo sile podpor, nato potek prečne sile in na koncu še potek upogibnega momenta.

- (a) Podpore v levem krajišču označimo z A , v desnem z B . Določimo jih iz enačbe ravnovesja navorov. Velja $\sum_{i=1}^n a_i F_i = dB$ in $\sum_{i=1}^n (d - a_i) F_i = dA$. Tako dobimo:

$$A = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^n (d - a_i) F_i,$$

$$B = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^n a_i F_i.$$

V konkretnem primeru je $A = 1/2 \text{ kN}$, $B = 2 \text{ kN}$.



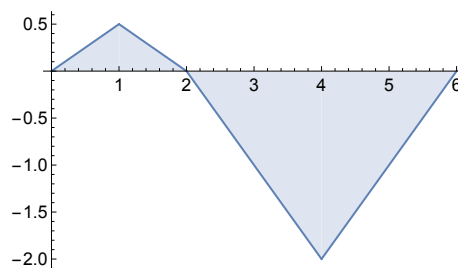
Brezdimenzijski potek prečne sile.

- (b) Za previsni nosilec vemo, da je prečna sila Q v levem krajišču enaka sili podpore A , nato pa ima v vsaki točki obremenitve skok, ki je enak obremenitvi. Tu moramo kot točkovno obremenitev upoštevati tudi desno podporo, kjer ima prečna sila skok podpore.

Upogibni moment M je na krajiščih enak nič, med točkami obremenitve pa poteka linearno. Iz enačbe $\frac{dM}{dt} = Q$ sledi, da je strmina enaka vrednosti prečne sile.

V konkretnem primeru je ekstremalni upogibni moment v desni podpori $x = 4 \text{ m}$ z vrednostjo

$$M_{max} = Q_1 a_1 + Q_2 (a_2 - a_1) + Q_3 (a_3 - a_2) = -4 \text{ kNm}.$$



Brezdimenzijski potek upogibnega momenta.

3. Enostavno podprti nosilec dolžine $l = 4 \text{ m}$, ki je obremenjen s konstantno linijsko obremenitev z gostoto $q_0 = 1/2 \text{ N/m}$ je točkovno obremenjen v točki $a_1 = 1 \text{ m}$ z vertikalno silo navzdol $F_1 = 1 \text{ kN}$.

- (a) Določi potek prečne sile in upogibnega momenta.
 (b) Izračunaj sile podpor.

Rešitev: Nalogo bomo reševali v brezdimenzijski obliki. Končne vrednosti bomo pomnožili z ustreznimi dimenzijami.

- (a) Nosilec razdelimo v dve polji $0 \leq x < 1$ in $1 < x \leq 4$. Prečno silo in upogibni moment na prvem polju označimo z Q_1 in M_1 , na drugem pa z Q_2 in M_2 . Na obeh poljih je linijska obremenitev zvezna, zato velja zveza $dQ/dx = -q$ na vsakem polju posebej. Potem

$$Q_1 = -\frac{1}{2}x + C_1, \quad Q_2 = -\frac{1}{2}x + C_2$$

in

$$M_1 = -\frac{1}{4}x^2 + C_1x + C_3,$$

$$M_2 = -\frac{1}{4}x^2 + C_2x + C_4.$$

Konstante C_1 , C_2 , C_3 in C_4 določimo iz pogojev, da ima prečna sila v točki obremenitve skok enak obremenitvi in pogojev, da sta krajišči tečaja, kjer je upogibni moment enak nič. Upoštevamo še dejstvo, da je upogibni moment zvezen v točki obremenitve. Tako dobimo

$$Q_1(1) - 1 = Q_2(1), \quad M_1(0) = 0,$$

$$M_2(4) = 0, \quad M_1(1) = M_2(1).$$

Iz enačb sledi

$$C_1 - 1 = C_2, \quad C_3 = 0, \quad 0 = -4 + 4C_2 + C_4, \quad -\frac{1}{4} + C_1 + C_3 = -4 + 4C_2 + C_4.$$

Rešitev je

$$C_1 = \frac{7}{4}, \quad C_2 = \frac{3}{4}, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = 1.$$

in tako

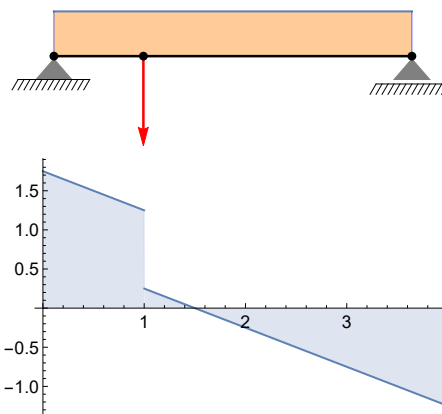
$$Q_1 = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{4}, \quad Q_2 = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}, \quad M_1 = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{7}{4}x, \quad M_2 = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + 1.$$

- (b) Določimo še sile podpor. Ker je nosilec enostavno podprt, je sila leve podpore enaka enaki prečni sili v levi podpori, sila desne podpore pa je nasprotno enaka prečni sili. Velja torej

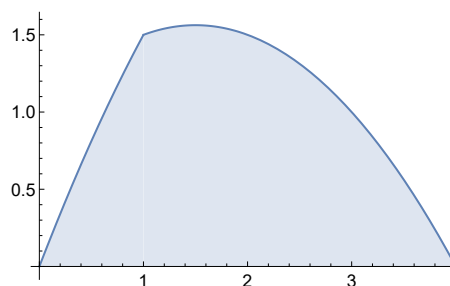
$$A = Q_1(0) = C_1 = \frac{7}{4} \text{ kN}, \quad B = -Q_2(l) = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4} \text{ kN}.$$

Upogibni moment je maksimalen v temenu parabole M_2 . Teme je v točki, ko je $Q_2(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4} = 0$, torej pri $x = 3/2$. Vrednost momenta v tej točki je

$$M_{\max} = \frac{25}{16} \text{ kNm}.$$



Brezdimenzijski potek prečne sile.



Brezdimenzijski potek upogibnega momenta.

4. Enostavno podprti nosilec dolžine $l = 1$ m je obremenjen na delu od $a = 1/2$ m do l s konstantno linijsko obremenitev z gostoto $q_0 = 1$ N/m, glej skico.

- (a) Izračunaj sile podpor.
 (b) Določi potek prečne sile in upogibnega momenta.

Rešitev: Nalogo bomo reševali v brezdimenzijski obliki za podatke l , a in q_0 .

- (a) Za izračun sli podpor smemo linijsko obremenitev zamenjati z njeno ekvipolentno točkovno silo, ki ima prijemališče v $l - a/2$, velikost aq_0 in smer navpično navzdol. Momentna enačba s polom v levem krajišču A je $(l - a/2)aq_0 = lB$. Potem je sila desne podpore $B = (1 - a/2l)aq_0$ v smeri navpično navzgor. Momentna enačba s polom v B je $a^2q_0/2 = lA$. Sila leve podpore je $A = a^2q_0/2l$.

- (b) Nosilec sedaj razdelimo v dve polji $0 \leq x < l-a$ in $l-a \leq x \leq l$. Prečno silo in upogibni moment na prvem polju označimo s Q_1 in M_1 , na drugem pa s Q_2 in M_2 . Na obeh poljih je linijska obremenitev zvezna, zato velja zveza $dQ/dx = -q$ na vsakem polju posebej. Potem

$$Q_1 = A = \frac{a^2q_0}{2l}, \quad Q_2 = -q_0x + C_1.$$

Tu smo upoštevali, da je prečna sila Q_1 konstantna in enaka sili podpore A . Konstanto C_1 določimo iz pogoja, da je $Q_2(l) = -B$. Tako dobimo enačbo

$$-q_0l + C_1 = -\left(1 - \frac{a}{2l}\right)aq_0.$$

Rešitev je

$$C_1 = -\left(1 - \frac{a}{2l} - \frac{l}{a}\right)aq_0.$$

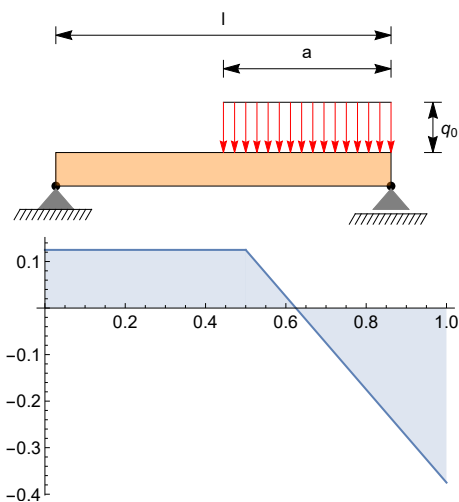
in tako

$$Q_2 = \left(-1 + \frac{a}{2l} + \frac{l}{a} - \frac{x}{a}\right)aq_0.$$

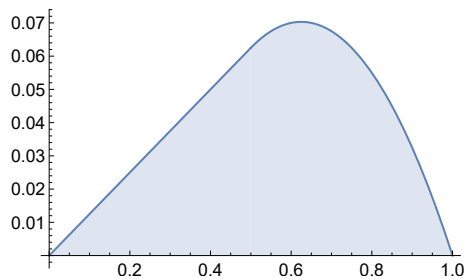
Če vsatvimo v Q_2 koordinato $x = l - a$, dobimo

$$Q_2(l - a) = \frac{a^2q_0}{2l}.$$

Vidimo, da je prečna sila zvezna. Določimo sedaj upogibni moment. Iz enačbe $\frac{dM}{dx} = Q$



Brezdimenzijski potek prečne sile.



Brezdimenzijski potek upogibnega momenta.

dobimo

$$M_1(x) = \frac{a^2 x q_0}{2l} + C_2$$

$$M_2(x) = \left(-1 + \frac{a}{2l} + \frac{l}{a}\right) a x q_0 - \frac{1}{2} x^2 q_0 + C_3.$$

Konstanti C_2 in C_3 določimo iz pogoja, da je $M_1(x=0) = 0$ in $M_2(x=l) = 0$. Druga možnost za določitev konstant je, da upoštevamo en robni pogoj in zveznost upogibnega momenta. Konstanta C_2 je očitno enaka nič. Iz pogoja $M_2(x=l) = 0$ sledi enačba

$$C_3 = \left(1 - \frac{a}{2l} - \frac{l}{a}\right) a l q_0 + \frac{1}{2} l^2 q_0 = -\frac{1}{2} (l-a)^2 q_0.$$

Potem je

$$M_2(x) = -\frac{1}{2} x^2 q_0 + \left(-1 + \frac{a}{2l} + \frac{l}{a}\right) a x q_0 - \frac{1}{2} (l-a)^2 q_0.$$

Preverimo še, da je $M_1(l-a) = M_2(l-a)$,

$$\begin{aligned} M_2(l-a) &= -\frac{1}{2} (l-a)^2 q_0 + \left(-1 + \frac{a}{2l} + \frac{l}{a}\right) (l-a) a q_0 - \frac{1}{2} (l-a)^2 q_0 \\ &= -(l-a)^2 q_0 + (l-a)^2 q_0 + \frac{a^2 (l-a) q_0}{2l} \\ &= \frac{a^2 (l-a) q_0}{2l} = M_1(l-a). \end{aligned}$$

Poglavje 6

Osna deformacija in napetost

6.1 Osna deformacija

S tem poglavjem bomo zapustili model togega telesa. Z modelom togega telesa smo uspeli rešiti marsikatero nalogo iz tehniške mehanike. Spoznali pa smo tudi njene meje, ko smo naleteli na statično nedoločljive naloge. V nadaljevanju obravnavano telo več ne bo togo. To pomeni, da se zaradi delovanja sil na telo razdalje med točkami telesa spremenijo. Pravimo, da se telo deformira. Vejo mehanike, ki dopušča deformacije teles in proučuje zvezo med deformacijo in delujočimi silami imenujemo *trdnost*.

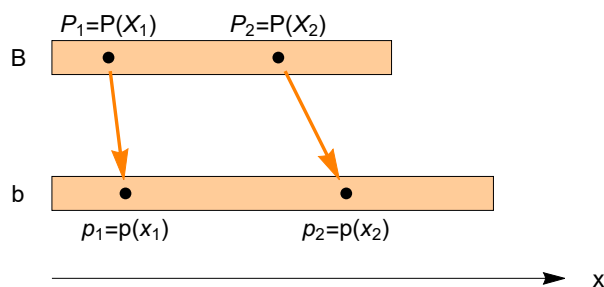
Najenostavnejša deformacija je osna oziroma enoosna deformacija, ki dopušča spremembe dolžin samo v eni smeri. Tipični primer za enoosno deformacijo je razteg ali skrčitev palice, ki ima konstantno ali spreminjajočo se debelino. V povezavi s tem primerom bomo zato splošno obravnavo enoosne deformacije slikovno praviloma prikazali kot deformacijo palice.

Osnovne pojme deformacije bomo vpeljali za splošno deformacijo in jih nato poenostavili na primer enoosne deformacije. Če želimo opisati deformacijo telesa, moramo telo poznati v vsaj dveh položajih, saj lahko le na ta način ugotovimo, da je prišlo do sprememb dolžin. Pri statiki deformabilnih teles se bomo omejili na dva položaja. Prvem bomo rekli *referenčni* oziroma *nedeformirani* položaj, drugemu pa *prostorski* oziroma *deformirani* položaj. Oba položaja se nanašata na isto telo. Da ju bomo ločili, bomo uporabljali za nedeformiran položaj velike črke, za deformiran pa male. Če je \mathcal{B} telo, bomo referenčni položaj označevali z B , prostorski pa z b . Točko referenčnega položaja s P , točko prostorskega s p . Koordinata referenčnega položaja je $\mathbf{X} = (X, Y, Z)$, prostorskega pa $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Deformacija je pravzaprav preslikava $p = p(P)$, ki referenčni položaj preslika v prostorski. Dve različni točki referenčnega položaja se preslikata v dve različni točki prostorskega položaja. To pomeni, da je deformacija injektivna preslikava. Ker je prostorski položaj slika referenčnega položaja, je deformacija tudi surjektivna. Deformacija je tako bijektivna preslikava.

Slika 6.1 prikazuje osno deformacijo palice \mathcal{B} . Zgornji položaj je referenčni položaj. Palica je v tem položaju ozančena z B . Označeni sta tudi dve točki P_1 in P_2 . Njuni referenčni koordinati sta \mathbf{X}_1 in \mathbf{X}_2 . Prostorski položaj deformirane palice \mathcal{B} je ozančen z b . Tu smo zaradi nazornosti položaj b narisali pod referenčnim položajem tako, da se B in b ne sekata. To lahko vedno storimo, saj bomo kmalu videli, da togi pomik nima vpliva na deformacijo. Pri deformaciji se točka P_1 s koordinato \mathbf{X}_1 preslika v točko p_1 s koordinato \mathbf{x}_1 . To preslikavo lahko zapišemo v koordinatno neodvisni obliki $p_1 = p(P_1)$, ali v koordinatnem zapisu $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(\mathbf{X}_1)$ oziroma $x_1 = x(X_1, Y_1, Z_1)$, $y_1 = y(X_1, Y_1, Z_1)$ in $z_1 = z(X_1, Y_1, Z_1)$.

Deformacijo pogostokrat opišemo s funkcijo pomika $\mathbf{U}(\mathbf{X}) = (u_x, u_y, u_z)$ tako, da velja

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{U}(\mathbf{X}).$$



Slika 6.1: Enoosna deformacija.

Funkcijo pomika smo zapisali z velikimi črkami, ker je ta funkcija definirana na referenčnem položaju. Pripadajoči nekoordinatni zapis je

$$p = P + \vec{U}(P)$$

oziroma

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{U}(\vec{R}),$$

kjer sta \vec{R} in \vec{r} krajevna vektorja do P in p . S togim pomikom lahko vedno dosežemo, da ima deformacijo negibno točko. To pomeni da obstaja točka P_0 , ki se pri deformaciji preslika samo vase, $p(P_0) = P_0$. Izhodišče koordinatnega sistema potem praviloma postavimo v to negibno točko.

Deformacij je enoosna, če obstaja tak koordinatni sistem, da se pri deformaciji spremeni samo ena koordinata v odvisnosti samo od te koordinate. Naj bo ta koordinata x . Potem je

$$x = x(X), \quad y = Y \quad \text{in} \quad z = Z.$$

Pripadajoča funkcija pomika pa je

$$U_1 = U_1(x_1), \quad U_2 = U_3 = 0. \quad (6.1)$$

Ker je samo ena komponenta neničelna, jo bomo pisali brez indeksa, $U = U_1$. Enoosno deformacijo bomo praviloma opisali s koordinatnim zapisom, saj smer deformacije na naravni način določa koordinatno os s katero deformacijo koordinatno opišemo. Koordinatna os je seveda v smeri deformacije.

6.1.1 Mere deformacije

Toga preslikava ohranja razdaljo med točkami, deformacija pa v splošnem ni toga, zato razdalja med dvema točkama v referenčnem položaju ni enaka razdalji med tema dvema točkama v prostorskem položaju. Sprememba razdalje določa mero deformacije. Spoznali bomo tri mere deformacij, *relativna sprememba dolžin*, *Cauchyjeva mera* in *logaritemska mera*.

Začnimo z relativno spremembo dolžin

$$\epsilon_1 = \epsilon_1(P_1, P_2) = \frac{|p_1 p_2| - |P_1 P_2|}{|P_1 P_2|} = \frac{|p_1 p_2|}{|P_1 P_2|} - 1. \quad (6.2)$$

Tu smo s $|P_1 P_2|$ zapisali razdaljo med točkama P_1 in P_2 in podobno s $|p_1 p_2|$ zapisali razdaljo med točkama p_1 in p_2 . Absolutna razlika dolžin ni dobra mera, saj je njuna razlika lahko pri mali deformaciji velika, če sta točki zelo oddaljeni. Če je deformacija toga, pravimo, da ni prava deformacija, ker ohranja dolžine, je $\epsilon_1(P_1, P_2) = 0$ za poljubni par točk P_1 in P_2 . To je lastnost, ki jo zahtevamo od vsake mere. Če je $\epsilon_1 > 0$ oziroma $\epsilon_1 < 0$ za vsak par točk P_1 in P_2 , je

deformacija razteg oziroma skrčitev. Če je $\epsilon_1(P_1, P_2) > 0 (< 0)$ za vsak P_2 v okolici P_1 , pravimo, da je deformacija lokalni razteg (skrčitev).

Naslednja mera deformacije je Cauchyjeva mera definirana z

$$\epsilon_2 = \epsilon_2(P_1, P_2) = \frac{|p_1 p_2|^2 - |P_1 P_2|^2}{|P_1 P_2|^2} = \left(\frac{|p_1 p_2|}{|P_1 P_2|} \right)^2 - 1. \quad (6.3)$$

Cauchyeva mera meri relativno spremembo kvadratov razdalj. Njena prednost je v tem, da jo lažje izračunamo, saj v njej z razliko od relativne spremembe ni potrebno koreniti. Tudi Cauchyjeva mera je prava mere deformacije, saj je $\epsilon_2(P_1, P_2) = 0$ za vsak par točk P_1 in P_2 natanko tedaj, ko je deformacija toga.

Logaritemska mera je dana z

$$\epsilon = \epsilon(P_1, P_2) = \log \frac{|p_1 p_2|}{|P_1 P_2|}. \quad (6.4)$$

Je prava mera, je pa težje izračunljiva, saj zahteva logaritmiranje. Isti deformaciji različne mere priredijo različno vrednost. Ujemajo se samo pri nepravi, torej togi deformaciji, kjer so vse tri enake nič. Vse mere deformacije so brezdimenzijske, torej nimajo enote in so samo števila. Pogostokrat deformacijo izrazimo v procentih. Tako naprimer deformaciji $\epsilon = 0.5$ pravimo 50% deformacija.

Za primer izračunajmo enoosno deformacijo tanke palice. Deformacija naj bo v smeri palice. Potem očitno deformacija preslika tanko palico v tanko palico. Pravimo, da je enoosna deformacija *enakomerna*, če je $|p_1 p_2| = k |P_1 P_2|$, $k > 0$ za poljubni par točk P_1, P_2 referenčnega položaja, ki se preslikata v p_1 in p_2 . Iz definicij mer deformacij sledi, da je

$$\epsilon_1 = k - 1, \quad \epsilon_2 = k^2 - 1, \quad \epsilon = \log k. \quad (6.5)$$

Enakomerno deformacijo ozke palice pogostokrat opišemo s spremembo celotne dolžine palice. Začetno dolžino označimo z l , končno pa z $l + \Delta l$. Potem je

$$\epsilon_1 = \frac{\Delta l}{l}, \quad \epsilon_2 = \left(\frac{l + \Delta l}{l} \right)^2 - 1 = \frac{2l\Delta l + (\Delta l)^2}{l^2}, \quad \epsilon = \log \left(1 + \frac{\Delta l}{l} \right). \quad (6.6)$$

Če je deformacija majhna, torej če je $|\epsilon_1|$ majhna količina, sledi iz (6.6), da je

$$\epsilon_2 \approx 2\epsilon_1 \quad \epsilon \approx \epsilon_1. \quad (6.7)$$

Druga enakost sledi iz lastnosti logaritma $\log(1 + x) \approx x$ za $|x| \ll 1$. Tu zapis $|x| \ll 1$ pomeni, da je $|x|$ bistveno manjši od 1.

Opišimo še enakomerno deformacijo s funkcijo pomika. Izberimo dve točki P_1 in P_2 v referenčnem položaju. Njuni koordinati označimo z X_1 in X_2 , kjer je X koordinata v smeri palce. Privzemimo, da je $X_2 > X_1$. Ker je palica tanka, je $|P_1 P_2| = X_2 - X_1$. Točki P_1 in P_2 se deformirata v p_1 in p_2 , ki jima pripadata koordinati x_1 in x_2 . Sedaj velja $|p_1 p_2| = x_2 - x_1$ ali $|p_1 p_2| = x_1 - x_2$. Privzemimo, da velja prva možnost. Druga možnost poleg deformacije še zasuka palico za kot π . Za koordinati x_i velja

$$x_i = X_i + U(X_i), \quad i = 1, 2.$$

Potem je

$$x_2 - x_1 = X_2 + U(X_2) - X_1 - U(X_1). \quad (6.8)$$

Upoštevajmo, da je enoosna deformacija enakomerna. Potem je $x_2 - x_1 = |p_1 p_2| = k |P_1 P_2| = k(X_2 - X_1)$. Iz enačbe (6.8) po krajšem računu sledi

$$u(X_2) - U(X_1) = (k - 1)(X_2 - X_1).$$

Za negibno točko deformacije je $X_1 = 0$ je $U(0) = 0$. Pišimo X namesto X_2 . Potem za enakomerno enoosno deformacijo velja

$$U(X) = (k - 1)X.$$

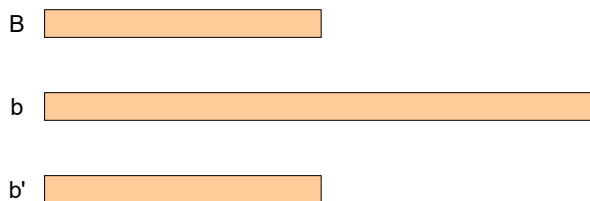
Enakomerna enoosna deformacija je za $k > 1$ *enakomerni razteg* in *enakomerna skrčitev* za $0 < k < 1$. Vrednost $k = 0$ ni dopustna, saj se pri tej vrednosti vsa palica skrči v eno točko.

6.1.2 Aditivnost deformacije

Z naslednjim primerom bomo pokazali pomembnost logaritemske mere. Zamislimo si dve deformaciji, prva deformacija preslika B v b , druga pa b v b' , oziroma prva točko P v p , druga pa točko p v p' . Z ϵ_1 označimo prvo mero deformacije, z ϵ'_1 pa drugo. Drugi deformaciji služi b za referenčni položaj, b' pa za prostorski. Označimo še z η_1 mero deformacije, ki deformira B neposredno v b' . Deformacija iz B v b' je vsota deformacije iz B v b in iz b v b' . Na b lahko gledamo kot na vmesni položaj. Pričakujemo, da velja

$$\eta_1 = \epsilon_1 + \epsilon'_1. \quad (6.9)$$

Pokažimo na primeru, da to v splošnem ni res.



Slika 6.2: Aditivnost mere.

Palico z referenčnim položajem B v prvi deformaciji raztegnemo enakomerno na dvojno dolžino. Njen prostorski položaj označimo z b , glej sliko 6.2. Nato palico enakomerno skrčimo na polovično razdaljo. Njen končni položaj označimo z b' . Očitno je $b = b'$ in zato je mera deformacije iz b v b' enaka nič. Poglejmo ali je nič tudi vsota mer deformacij. Koeficient raztega prve deformacije je $k = 2$, druge pa $k' = 1/2$. Potem je po (6.5)

$$\begin{aligned} \epsilon_1 + \epsilon'_1 &= (2 - 1) + (1/2 - 1) = 1/2, \\ \epsilon_2 + \epsilon'_2 &= (4 - 1) + (1/4 - 1) = 9/4, \\ \epsilon + \epsilon' &= \log(2) + \log(1/2) = \log 2 - \log 2 = 0. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Vidimo, da samo za logaritemsko mero velja (6.9). To velja splošno, logaritemska mera je aditivna, ostali dve pa nista.

6.1.3 Lokalizacija mere deformacije

Mero deformacije smo definirali s spremembo razdalj za poljubni par točk. Praviloma je vzrok deformacije lokalni, zato je predvsem pomembna deformacija para točk, ki sta si blizu. Izberimo točko $P = P_1$ in se omejimo samo na tiste točke P_2 , ki so infinitezimalno, torej poljubno, blizu točki P . Tej omejitvi pravimo *lokalizacija mere deformacije*. Po lokalizacije deformacije postane mera deformacije funkcija položaja P .

Če ima točka P koordinato \mathbf{X} , imajo infinitezimalno bližnje točke koordinate $\mathbf{X} + d\mathbf{X} = (X + dX, Y + dY, Z + dZ)$. Potem je $|PP_2| = |d\mathbf{X}|$. Točka P se pri enoosni deformaciji preslika v točko p , ki ima koordinate $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{U}(\mathbf{X})$ oziroma

$$\mathbf{x} = (x, y, z) = (X + U(X), Y, Z).$$

Tu smo upostevali, da za enoosno deformacijo velja (6.1). Točka P_2 s koordinato $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$ se preslika v točko p_2 , ki ima koordinato

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{X} + d\mathbf{X} + \mathbf{U}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}) = (X + U(X + dX) + dX, Y + dY, Z + dZ).$$

Potem je

$$\begin{aligned} |pp_2| &= |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}| = |\mathbf{U}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}) - \mathbf{U}(\mathbf{X}) + d\mathbf{X}| \\ &= |(dX + U(X + dX) - U(X), dY, dZ)|. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Upoštevajmo, da za infinitezimalni dX velja

$$U(X + dX) - U(X) = \frac{dU}{dX}(X)dX.$$

Potem iz (6.11) sledi

$$|pp_2| = \left| \left(\left(\frac{dU}{dX} + 1 \right) dX, dY, dZ \right) \right|. \quad (6.12)$$

Pri enoosni deformaciji nas predvsem zanima sprememba dolžin v smeri deformacije. Točki P in $P + dP$ sta v smeri deformacije, če je $dY = dZ = 0$. Iz (6.12) potem sledi

$$|pp_2| = \left| \left(\frac{dU}{dX} + 1 \right) dX \right| \quad \text{in} \quad |PP_2| = |dX|.$$

Po definiciji mere je tako

$$\epsilon_1 = \frac{|pp_1|}{|PP_1|} - 1 = \left| \frac{dU}{dX} + 1 \right| - 1 \quad (6.13)$$

in

$$\epsilon_2 = \left(\frac{|pp_1|}{|PP_1|} \right)^2 - 1 = \left(\left| \frac{dU}{dX} + 1 \right| \right)^2 - 1. \quad (6.14)$$

Pri velikih deformacijah izraza ne moremo poenostaviti. Privzemimo sedaj, da je deformacija majhna, točneje, da je

$$\left| \frac{dU}{dX} \right| \ll 1. \quad (6.15)$$

Potem iz (6.13) sledi, tu je dovolj predpostaviti $\left| \frac{dU}{dX} \right| < 1$, da je

$$\epsilon_1 = \frac{dU}{dX}. \quad (6.16)$$

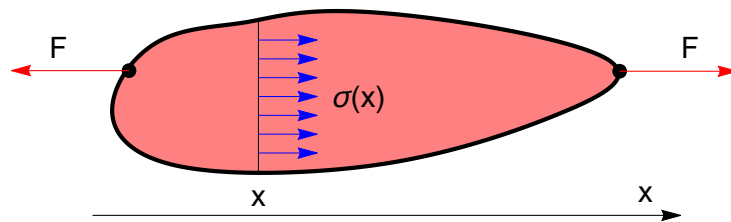
Nadalje iz (6.14) sledi

$$\epsilon_2 = \left(\frac{dU}{dX} \right)^2 + 2 \frac{dU}{dX} \approx 2 \frac{dU}{dX} = 2\epsilon_1. \quad (6.17)$$

Podobno lahko pokažemo, da je $\epsilon \approx \frac{dU}{dX} = \epsilon_1$. Zveza (6.7) torej ne velja samo za enakomerno deformacijo temveč za vsako majhno deformacijo. Lokalizirani meri deformacije za katero velja (6.15) pravimo *infinitezimalna deformacija*. Za infinitezimalno deformacijo je torej

$$\epsilon_2 = 2\epsilon_1, \quad \epsilon = \epsilon_1. \quad (6.18)$$

Iz (6.16) vidimo, da je infinitezimalna deformacija linearna funkcija pomika, dvakrat večji pomik ima dvakrat večjo deformacijo. Deformacija vsote dveh pomikov je enaka vsoti deformacij posameznik pomikov. Kako se mera deformacije izraža s pomikom v splošnem primeru, ko deformacija ni enoosna, bomo spoznali pri obravnavi prostorske deformacije.



Slika 6.3: Enoosna napetost.

6.2 Osna napetost

Vprašajmo se, kaj povzroči osno deformacijo. Odgovor je osna napetost. Začnimo s primerom na sliki 6.3. Telo vlečemo narazen, levo s silo $-\vec{F}$, desno s \vec{F} . Postavimo koordinatno os x v smeri sile \vec{F} . Bazni vektor v smeri osi x označimo z \vec{i} . Telo navidezno prerežemo pri koordinati x z ravnino, ki ima normalo v smeri sile \vec{F} . Smer sile je torej pravokotna na ravnino. Desni del telesa deluje na levi del telesa preko preseka $A(x)$ s površinsko silo. Dovolj daleč od prijemališč sil je dominantni del gostote površinske sile v smeri \vec{F} in je po preseku $A(x)$ konstanten. Označimo to gostoto površinske sile z $\sigma(x)\vec{i}$. Levi del telesa je v ravnovesju. Velja ravnovesna enačba

$$-\vec{F} + \sigma(x)A(x)\vec{i} = \vec{0}.$$

Tu smo z $A(x)$ zapisali površino preseka. Upoštevajmo, da je $\vec{F} = F\vec{i}$. Tako dobimo

$$\sigma(x) = F/A(x).$$

Gostoto sile σ imenujemo *napetost*. Če želimo poudariti, da jo dobimo iz enoosne obremenitve, ji pravimo tudi *enoosna napetost*. Normala na ravnino preseka je $\vec{n} = \vec{i}$ in kaže v smer tistega dela telesa, ki z ene strani preseka deluje na drugo stran preseka. Na sliki 6.3 kaže v desno, ker desni del deluje na levi del. Vektor napetosti je $\sigma\vec{n}$. Pravimo, da je napetost *natezna*, če je $\sigma > 0$ in da je *tlačna*, če je $\sigma < 0$. Na sliki 6.3 je napetost natezna. Tlačno napetost bi dobili, če bi na palico delovala sila nasprotna sili na sliki.

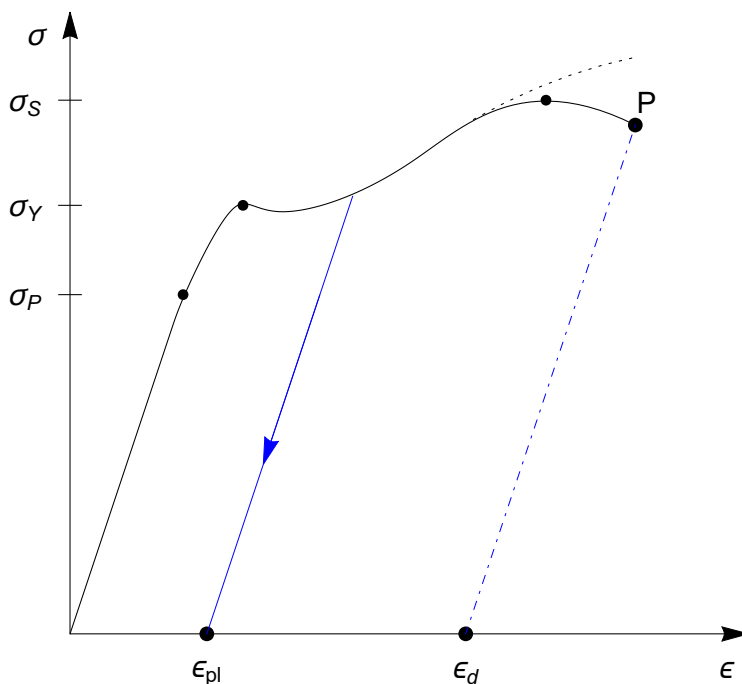
Enoosna napetost je najenostavnejše napetostno stanje v telesu. Pri neenoosnih obremenitvah gostota površinske sile ni enoosna. Kako je v tem primeru, bomo spoznali pri obravnavi napetostnega tenzorja.

Poglejmo še enoto napetosti. Po definiciji je enota napetosti $[\sigma] = \text{N/m}^2 = \text{Pa}$. Tu je Pa okrajšava za Pascal. Napetost en Newton na kvadratni meter je za tehniško mehaniko zelo majhna vrednost. Večinoma v tehniški mehaniki uporabljamo enoti MPa (mega Pascal) in GPa (giga Pascal), to je 10^6Pa in 10^9Pa .

6.3 Konstitutivna zveza med deformacijo in napetostjo

Enoosno napetost in deformacijo povezuje konstitutivni zakon, ki deformaciji priredi napetost. Vzemimo palico s konstantnim presekom A_0 in jo obremenimo levo, desno v njeni smeri s silo $-\vec{F}$ in \vec{F} . Obremenitev v palici povzroči enoosno napetostno stanje z napetostjo σ . Ker ima palica konstantni presek, je napetost $\sigma = F/A_0$ konstantna v območju, ki je dovolj daleč od pritrdišč, kjer prijemata sili $-\vec{F}$ in \vec{F} . Napetosti F/A_0 pravimo *inženirska napetost*. Označimo dolžino tega odseka z l . Pri natezni sili se palica raztegne, pri tlačni sili pa skrči. Deformirana dolžina odseka je $l + \Delta l$. Ker je napetost na območju konstantna, se območje enakomerno raztegne oziroma skrči. Deformacija je potem enaka $\epsilon_1 = \Delta l/l$. Tako smo dani obremenitvi priredili

dve količini, deformacijo in napetost. Spremembi obremenitve sledi sprememba deformacije. Tako vodenemu poskusu pravimo napetostno vodeni poskus. Poskus pa lahko vodimo tudi deformacijsko, ko predpišemo deformacijo in izmerimo napetost. V obeh primerih dobimo graf odvisnosti napetosti od deformacije, ki ga imenujemo *deformacijsko napetostni diagram*. Diagram ima deformacijo ϵ_1 na abscisni osi, na ordinatni osi pa napetost σ , glej sliko 6.4.



Slika 6.4: Tipični deformacijsko napetostni diagram za kovino.

Natančni potek diagrama je odvisen od materiala. Slika shematsko kaže deformacijsko napetostni diagram za kovine. Na ordinati so označane tri vrednosti napeosti, σ_P , σ_Y in σ_S . Prva oznaka σ_P označuje napetost do katere je med deformacijo ϵ_1 in napetostjo σ linearna zveza

$$\sigma = E\epsilon_1.$$

Tej linearni zvezi pravimo *Hookov zakon*, konstanti E pa *Youngov modul*. Ker je deformacija brezdimenzijska veličina, ima Youngov modul enoto Pascal. Območje na katerem velja Hookov zakon imenujemo *območje proporcionalnosti*. Vsi materiali, na videz še tako težko deformabilni, kot naprimer keramika, imajo območje proporcionalnosti. Hookov zakon velja za majhne deformacije, praačiloma samo na območju $|\epsilon_1| < 0.001$ in le v izjemnih primerih do $|\epsilon_1| < 0.01$. Večji je Youngov modul, težje ga deformiramo. Pravimo, da ima veliko materialno togost.

Območje proporcionalnosti leži v *območju elastičnosti*, to je območje v katerem je napetost manjša od σ_Y . Vrednosti σ_Y pravimo meja *tečenja*. Na območju elastičnosti izven območja proporcionalnosti med deformacijo in napetostjo ne velja linearna zveza. Napetost v odvisnosti od deformacije narašča počasneje kot v območju proporcionalnosti. Značilno za območje elastičnosti je, da pri obremenitvi in razbremenitvi velja enaka zveza med deformacijo in napetostjo. Torej, če palico raztegujemo s silo, katere velikost narašča od nič do $F \leq \sigma_Y A_0$ in nato silo zmanjšamo nazaj do nič, zveza med deformacijo in napetostjo sledi isti poti pri obremenitvi in razbremenitvi. Pri ponovni obremenitvi do σ_Y velja enaka zveza med deformacijo in napetostjo kot prej. Elastični režim torej ne pozna utrujanja, zgodovina obremenitev ne vpliva na odziv material v elastičnem območju.

Območje izven elastičnosti je *območje plastičnosti*. V območje plastičnosti stopimo preko meje tečenja. Pri prehodu v območje plastičnosti se na začetku napetost pogostokrat nekoliko zmanjša. Če želimo to potrditi s poskusom, moramo poskus voditi deformacijsko. Območje plastičnosti se konča s koncem krivulje v *porušitveni točki*. V porušitveni točki se palica strga. Oba konca palice se hipoma razbremenita. Pri razbremenitvi v območju plastičnosti napetost ne sledi isti krivulji kot pri obremenitvi. V razbremenjeno stanje $\sigma = 0$ se vrne po linearnem segmentu, ki ima enako strmino kot graf v območju proporcionalnosti, glej segment z modro puščico na sliki 6.4. Po vrnitvi v razbremenjeno stanje deformacija ni enaka nič. Njeni vrednosti ϵ_P pravimo *plastična deformacija*. Deformaciji, ki nastane ob porušitvi pravimo *duktilnost* in jo označimo z ϵ_d . Duktilnost je največja možna plastična deformacija materiala. Pri ponovni obremenitvi napetost ne sledi prvotni krivulji temveč sledi segmentu predhodne razbremenitve do območja plastičnosti, od tam naprej pa po predhodni zvezi med deformacijo in napetostjo. Do vrnitve v območje plastičnosti velja linearna zveza med deformacijo in napetostjo. To novo območje proporcionalnosti je lahko večje od prvotnega z mejo tečenja, ki je večja od predhodne. Temu večanju meje tečenja s cikli razbremenjevanja in ponovnega obremenjevanja pravimo *utrjevanje*. Z višanjem meje tečenja kovina pridobiva na trdnosti. V metalurgiji imenujemo ta postopek *kovanje*.

Slika 6.4 prikazuje deformacijsko napetostni diagram za kovino. Kovine imajo izrazito območje plastičnosti. To pomeni, da jih lahko plastično preoblikujemo. Nimajo pa vsi materiali plastičnega območja. Naprimer les ali guma sta pri normalnih pogojih brez plastičnega območja. Tudi deformacija stekla se konča z lomom brez predhodne opazne plastične deformacije.

Na sliki 6.4 je označena še napetost σ_S , ki ji pravimo natezna trdnost. To je največja napetost, ki jo prenese material. Če napetost preseže natezno trdnost pride do porušitve. Porušitev se začne z naglim tanjšanjem palice. V tem primeru se presek palice naglo zmanjša in napetost ni več enaka kvocientu sile obremenitve s prvotnim presekom palice A_0 temveč z dejanskim presekom A . Kovocientu F/A pravimo *prava napetost*. Ker je $A < A_0$ je prava napetost večja od napetosti $\sigma = F/A_0$. To je na sliki prikazano s črtkano krivuljo. Ta odstopi od polne krivulje nekoliko prej preden se napetost σ približa natezni trdnosti.

Slika 6.4 prikazuje natezni preizkus z grafom funkcije $\sigma = \sigma(\epsilon_1)$. Pri tlačnem preizkusu moramo paziti, da ne pride do uklona palice. Če namesto inženirske napetosti uporabimo pravo napetost in namesto relativne mere ϵ_1 logaritemsko mero ϵ , se praviloma izkaže, da je graf tlačnega preizkusa liha razširitev grafa nateznega preizkusa. Z drugimi besedami velja $\hat{\sigma} = -\hat{\sigma}(-\epsilon_1)$, kjer je $\hat{\sigma}$ prava napetost. Pravilo ima izjeme, določeni materiali, naprimer beton, zelo dobro prenašajo tlačno napetost in slabo natezno. Za takšne materiale je deformacijsko napetostna funkcija liha samo za majhne pomike. Ker beton slabo prenaša natezno napetost, je v gradbeništvu ojačan z železnimi palicami. Tej kombinaciji pravimo železobeton. Tlačno napetost prenaša beton, natezno pa železne palice. Same palice bi slabo prenašala tlačno napetost zaradi nevarnosti uklona.

Tabela 6.1: Tabela materialnih lastnosti.

material	E [GPa]	σ_Y [Mpa]	σ_S [MPa]	ϵ_d	α [$10^{-6}K^{-1}$]
Aluminij	69	40	200	0.5	23.1
Baker	124	60	400	0.55	17
Jeklo	200	500 - 1900	680 - 2400	0.02 - 0.3	11 - 13
Železo	200	50	200	0.3	11.8
Bron in medenina	103	70 - 640	230 - 890	0.01 - 0.7	19
Beton	30-50	20 - 30	-	-	12
Les	9-16	-	35 - 55	-	3.5
Les ⊥	0.6- 1.0	-	4 - 10	-	27
Kavčuk	0.01 - 0.1	-	30	5	-

V tabeli 6.1 so podane vrednosti Youngovega modula E , meje tečenja σ_Y , natezne trdnosti σ_S in duktilnosti ϵ_d za osnovne primere materialov. Določeni materiali imajo razpon vrednosti. Beton je

mešanica cementa in peska in je kompozit, zato so njene materialne lastnosti odvisne od razmerja njegovih sestavin. Prav tako imata bron in medenina razpon vrednosti saj sta zlitini. Razpon mej tečenja in trdnosti pri jeklu je zelo velik. Poznamo več vrst jekla, odvisno od njegovih sestavin in metalurškega postopka. Pomembna je tudi kristalografska struktura material. Tako ima diamant največjo vrednost Youngovega modula $E = 1000 \text{ GPa}$, grafit, ki ima enako kemijsko sestavo kot diamant, pa $E = 27 \text{ GPa}$. Nenazadnje, material pogostokrat ni v vse smeri enak, pravimo, da je *anizotropičen*. Lep primer je les, v smeri dolžine je Youngov modul precej večji kot v smeri pravokotni na letnice. Razlog je v celuloznih vlaknih, ki so v smeri rasti in dajejo lesu togost.

V nadaljevanju se bomo omejili izključno na tako majhne deformacije, da velja Hookov zakon. Obravnava plastičnosti in porušitve presega vsebino predmeta Osnove mehanike. Ker je deformacija majhna, lahko uporabimo aproksimacijo (6.18). Tako bomo v nadaljevanju namesto ϵ_1 pisali kar ϵ .

6.4 Primeri

6.4.1 Dopustna obremenitev palice

Določi dopustno natezno silo bakrene palice s površino preseka $A = 2 \text{ cm}^2$ tako, da se palica ne bo plastično definirala.

Označimo z F natezno silo. Pripadajoča osna napetost je $\sigma = F/A$. Pogoju, da se palica plastično ne deformira je $\sigma < \sigma_Y$. Tako dobimo pogoj

$$F = A\sigma < A\sigma_Y = 2 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \times 60 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 120 \times 10^2 \text{ N} = 12 \text{ kN}.$$

Ocenimo še maksimalno dopustno deformacijo. Iz Hookovega zakona sledi, da je v območju proporcionalnosti $\epsilon = \sigma/E$. Ker je rast napetosti v odvisnosti od deformacije v elastičnem območju počasnejša kot v območju proporcionalnosti, lahko maksimalno dopustno deformacijo samo približno ocenimo z

$$\epsilon < \sigma_Y/E = 60 \text{ MPa}/124 \text{ GPa} = 2.01 \times 10^{-3}.$$

6.4.2 Reševanje statično nedoločenih nalog

Nosilec obesimo na strop s štirimi enakimi žicami tako kot kaže leva slika slike 6.5. Elastični modul žic je E , presek pa A . Naša naloga je, da določimo sile žic.



Slika 6.5: Nosilec obešen na štiri žice. Levo nosilec, desno deformacija žic.

Naloga je statično nedoločena. Določiti moramo štiri neznane sile, na razpolago pa imamo samo tri ravnovesne enačbe. Dejansko imamo samo dve ravnovesni enačbi, saj je sistem sil na nosilec sistem vzporednih sil, zato je ravnovesna enačba sil v vodoravni smeri trivialna.

Sile žic označimo z F_1 , F_2 , F_3 in F_4 . Ravnovesni enačbi, vsota sil v navpični smeri in ravnovesje momentov s polom v levem krajišču sta

$$0 = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 - F_0,$$

$$0 = -\frac{d}{4}F_0 + \frac{d}{3}F_2 + \frac{2d}{3}F_3 + dF_3.$$

Dobili smo dve enačbi za štiri neznanke. Sile žic so osne sile dane s Hookovim zakonom $F_i = AE\Delta l_i/l$, kjer je l nedeformirana dolžina žice, Δl_i pa njen raztezek, glej sliko 6.5. Ko obesimo nosilec, se žice raztegnejo in ker je nosilec tog, pritrdišča žic na nosilec ostanejo na isti premici. Smerni koeficient premice je določen s parom dveh točk. Ker je za vse tri pare točk enak, sledi da je

$$\frac{\Delta l_2 - \Delta l_1}{d/3} = \frac{\Delta l_3 - \Delta l_2}{d/3} = \frac{\Delta l_4 - \Delta l_3}{d/3}.$$

oziroma

$$2\Delta l_2 = \Delta l_3 + \Delta l_1 \quad \text{in} \quad 2\Delta l_3 = \Delta l_2 + \Delta l_4$$

Vstavimo v ravnovesne enačbe še Hookov zakon. Tako dobimo sistem

$$F_0 = \frac{AE\Delta l_1}{l} + \frac{AE\Delta l_2}{l} + \frac{AE\Delta l_3}{l} + \frac{AE\Delta l_4}{l},$$

$$\frac{d}{4}F_0 = \frac{AEd\Delta l_2}{3l} + \frac{2AEd\Delta l_3}{3l} + \frac{AEd\Delta l_4}{l},$$

$$2\Delta l_2 = \Delta l_1 + \Delta l_3,$$

$$2\Delta l_3 = \Delta l_2 + \Delta l_4.$$

Sistem preuredimo v

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4 = \frac{lF_0}{AE},$$

$$\Delta l_2 + 2\Delta l_3 + 3\Delta l_4 = \frac{3lF_0}{4AE},$$

$$\Delta l_1 - 2\Delta l_2 + \Delta l_3 = 0,$$

$$\Delta l_2 - 2\Delta l_3 + \Delta l_4 = 0.$$

Od prve enačbe odštejemo tretjo, in nato seštejemo drugo in četrto. Tako dobimo sistem

$$\frac{F_0 l}{AE} = 3\Delta l_2 + \Delta l_4, \quad \frac{3F_0 l}{4AE} = 2\Delta l_2 + 4\Delta l_4.$$

Rešitev je

$$\Delta l_2 = \frac{13F_0 l}{40AE}, \quad \Delta l_4 = \frac{F_0 l}{40AE}.$$

Potem izračunamo še

$$\Delta l_1 = \frac{19F_0 l}{40AE}, \quad \Delta l_3 = \frac{7F_0 l}{40AE}.$$

Sile žic so tako

$$F_1 = \frac{19F_0}{40}, \quad F_2 = \frac{13F_0}{40}, \quad F_3 = \frac{7F_0}{40}, \quad F_4 = \frac{F_0}{40}.$$

6.5 Temperaturna deformacija in napetost

6.5.1 Deformacija

Če palico segrejemo, se podaljša, če jo ohladimo se skrči. Deformaciji, ki jo povzroči sprememba temperature pravimo *temperaturna deformacija*. Če je palica prosta, sprememba temperature ne

povzroči napetosti v palici. Nasprotno, v vpeti palici sprememba temperature povzroči napetost. Ta napetost je enaka napetosti, ki temperaturno deformirano palico spravi na dolžino vpetja. Zveza med temperaturno deformacijo in spremembo temperature je

$$\epsilon = \alpha \Delta T,$$

kjer je α koeficient termalnega (temperaturnega) raztezka, ΔT pa je razlika temperature med referenčnim in prostorskim položajem. Enota termalnega raztezka je $1/K$, kjer je K stopinja Kelvina. Vrednosti koeficienta za izbrane materiale so podane v tabeli 6.1. Vrednosti α so majhne, zato so dane kot mnogokratniki števila 10^{-6} . V tabeli lahko opazimo, da imata beton in železo približno enak koeficient termalnega raztezka. To je pomembno za železobetonsaj bi v nasprotnem primeru sprememba temperature povzročila termalno (toplotno) napetost v železobetonu.

6.5.2 Temperaturna napetost

Pojav termalne napetosti si pogledjmo na primeru. Elastična palica je vpeti med dve togi steni. Palico segrejemo za ΔT . Sprememba temperature želi palico podaljšati, vendar je ne more, ker to togi steni ne dopuščata. Steni delujeta na palico s silo, ki povzroči v palici enoosno napetostno stanje σ , ki je po Hookovem zakonu enaka $\sigma = E\epsilon_E$. Palica je tako podvržen dvema deformacijama, toplotni ϵ_T in elastični ϵ_E . Ker je palica vpeti med togi steni, se ne deformira. Potemtakem je skupna deformacija $\epsilon_T + \epsilon_E$ enak nič in tako

$$\epsilon_E = -\epsilon_T = -\alpha \Delta T.$$

Termalna napetost je potem enaka

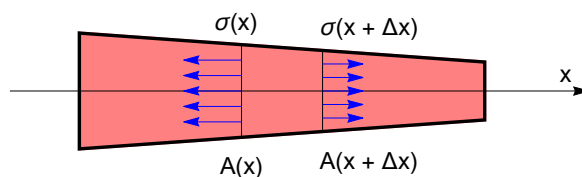
$$\sigma = -\alpha E \Delta T.$$

Napetost je tlačna in je za bakreno palico pri $\Delta T = 10K$ enaka

$$\sigma = 124 \text{ GPa} \times 17 \text{ K}^{-1} 10^{-6} \times 10K = 21 \text{ MPa}.$$

6.6 Ravnovesna enačba

Izpeljali bomo ravnovesno enačbo za enoosno napetost $\sigma(x)$. Naj bo napetost v palici na sliki 6.6 enoosna. Ta napetost je posledica volumenske osne sile, ki deluje v smeri palice. Os palice označimo z x , enotski vektor v smeri palice pa z \vec{i} . Dolžinsko gostoto osne sile označimo s $p(x)$. Na vsak del palice z dolžino Δx tako deluje sila $d\vec{F} = p\Delta x\vec{i}$. Enota $p(x)$ je $[\text{N/m}]$. Dolžinska gostota sile teže v smeri osi x je $g\rho(x)A(x)$, kjer je ρ masna gostota.



Slika 6.6: Navidezni prerez med x in $x + \Delta x$.

Palico navidezno prerežemo pri x in $x + \Delta x$. Odrezani del je v ravnovesju, zato veljajo ravnovesne enačbe. Na odrezani del deluje z desne površinska sila $\sigma(x + \Delta x)A(x + \Delta x)$ v smeri osi x , z leve pa v nasprotni smeri $\sigma(x)A(x)$. Ravnovesna enačba v smeri osi x je tako

$$\sigma(x + \Delta x)A(x + \Delta x) - \sigma(x)A(x) + \int_x^{x+\Delta x} p(s) ds = 0 \quad (6.19)$$

Tu smo upošteval, da je volumenska sila razporejena po celem volumnu. Enačbo delimo z Δx

$$\frac{\sigma(x + \Delta x)A(x + \Delta x) - \sigma(x)A(x)}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} p(s) ds = 0$$

in poženimo Δx proti 0. Kaj sledi, že dobro vemo

$$\frac{d}{dx} A\sigma + p(x) = 0. \quad (6.20)$$

To je ravnovesna enačba za sile v smeri osi x . Ravnovesni enačbi v ostali dve smeri sta trivialni, saj v teh smereh ni obremenitev. Pri tihi predpostavki, da je os x os simetrije tako, da imajo vse rezultante obremenitve v smeri osi x prijemališča na osi x je tudi momentna enačba trivialna $\vec{0} = \vec{0}$.

Pri znani obremenitvi $p(x)$ in preseku $A(x)$ enačba (6.20) določa potek napetosti vzdolž osi x . Določimo še osno deformacijo palice. Po Hookovem zakonu je $\sigma = E\epsilon$. Izrazimo deformacijo s pomikom $\epsilon = \frac{du}{dx}$. Praviloma bi morali zapisati $\epsilon = \frac{dU}{dX}$, saj je pomik določen na referenčnem položaju. Vendar vemo, da je pomik majhen, zato lahko v okviru infinitezimalne teorije na pomik gledamo kot na funkcijo prostorskega položaja in tako izrazimo pomik z $u = u(x)$. Tako iz (6.20) dobimo enačbo

$$\frac{d}{dx} \left(AE \frac{du}{dx} \right) + p(x) = 0. \quad (6.21)$$

Produkt AE imenujemo osna togost. Njena enota je [N]. Pri znani obremenitvi $p(x)$ in preseku $A(x)$ enačba (6.21) določa pomik u . Enačba velja za majhne pomike, prvič, ker smo deformacijo izrazili z relativno spremembo dolžin in drugič, ker Hookov zakon velja samo za majhne pomike. Enačba je diferencialna enačba druge stopnje. Rešitev je enolično določena z robnim pogojem, ki določa pomik ali njegov odvod na robu. Na koncu, kjer je palica pritrjena, je pomik enak nič. Na prostem koncu pa je napetost enaka nič. Potem iz Hookovega zakona sledi, da je na prostem koncu odvod pomika po x enak nič, $du/dx = 0$.

6.6.1 Primeri

Razteg zaradi lastne teže

Homogeno palico dolžine l s konstantnim presekom A_0 in Youngovim modulom E obesimo na strop, da palca prosto visi. Zanima nas razteg palice zaradi lastne teže. Razteg palice bo majhen, zato jo lahko določimo s pomočjo (6.21).

Postavimo koordinatno os x v smeri delovanja sile teže. Na stropu pri $x = 0$ je palica pritrjena, zato je $u(x = 0) = 0$. Drugi konec palice prosto visi, zato je $\frac{du}{dx}(x = l) = 0$. Tu smo z l' zapisali raztegnjeno dolžino palice. Ker pa je deformacija majhna, smemo uporabiti pogoj $du/dx(x = l) = 0$.

Dolžinska gostota sile teže je $p = \rho_0 g A_0$, kjer je ρ_0 masna gostota. Iz (6.21) tako dobimo enačbo

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -\frac{\rho_0 g}{E}. \quad (6.22)$$

Potem je

$$\frac{du}{dx} = -\frac{\rho_0 g}{E} x + C_1 \quad (6.23)$$

in

$$u = -\frac{\rho_0 g}{2E} x^2 + C_1 x + C_2. \quad (6.24)$$

Iz robnega pogoja $u(x=0) = 0$ takoj sledi $C_2 = 0$. Uporabimo še pogoj $du/dx(x=l) = 0$ na prostem koncu. Iz (6.23) potem sledi

$$C_1 = \frac{\rho_0 g}{E} l.$$

Rešitev je tako

$$u = \frac{\rho_0 g}{E} (l - x/2) x. \quad (6.25)$$

Pomik na koncu je

$$u(x=l) = \frac{\rho_0 g l^2}{2E} = \frac{mgl}{2A_0 E}, \quad (6.26)$$

kjer je $m = \rho_0 A_0 l$ masa palice. Palica se torej podaljša za $\Delta l = \frac{mgl}{2A_0 E}$. Poglejmo konkretni primer za aluminijasto palico dolžine 1 m. Potem je $E = 69 \text{ GPa}$ in $\rho_0 = 2.7 \text{ g/cm}^3$. Iz (6.26) potem sledi, da je

$$\Delta l = \frac{2.7 \times 10^{-3} \times 9.8 \times \text{kgm}^5}{10^{-6} \times 2 \times 69 \times 10^9 \times \text{m}^3 \text{s}^2 \text{N}} = 1.9 \times 10^{-7} \text{ m}.$$

Razteg zaradi lastne palce je res majhen.

Iz (6.26) sledi, da se palica zaradi lastne teže raztegne za polovico manj. Res, če palico na koncu obremenimo s silo teže $F = mgh$, nastopi v palici osna napetost $\sigma = mg/A_0$. Po Hookovem zakonu $\epsilon = \sigma/E$ je potem

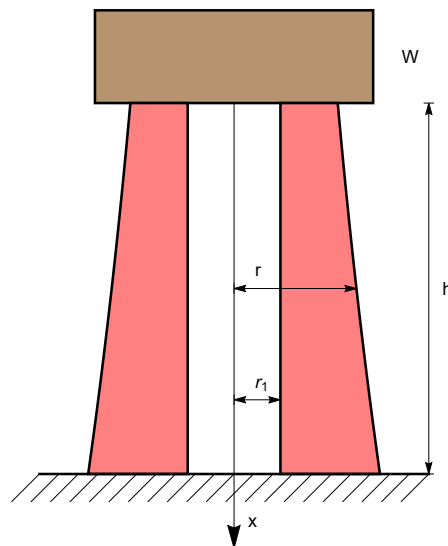
$$\Delta l = l\epsilon = \frac{mgl}{A_0 E},$$

kar je za faktor 2 več kot (6.26).

Problem stolpa

Slika kaže presek rotacijsko simetričnega stolpa. Stolp ima votlino s polmerom r_1 . Na vrhu stolpa je vodni rezervar s težo W . Določiti moramo tako debelino stene stolpa, da bo osna napetost v steni stolpa konstantna. Pri tem moramo upoštevati težo stene. Ker stena pri tleh nosi tudi težo stolpa, mora biti stena pri tleh debelejša.

Postavimo os x navpično navzdol. Z debelino sten se spreminja ploščina preseka $A(x)$. Stolp je tlačno obremenjen, zato je napetost negativna. Velja torej $\sigma(x) = -\sigma_0$, kjer je σ_0 pozitivna konstantna enaka dopustni tlačni napetosti. Na stene stolpa deluje lastna teža. Njena dolžinska gostota je $p(x) = \rho_0 g A(x)$. Tu je ρ_0 masna gostota materiala iz katerega so narejene stene.



Slika 2: Presek vodnega stolpa.

Zapišimo enačbo (6.20)

$$\frac{d}{dx} A\sigma = -p = -\rho_0 g A$$

in upoštevajmo, da je $\sigma(x) = -\sigma_0$. Tako dobimo

$$\frac{dA}{dx} = \frac{\rho_0 g}{\sigma_0} A.$$

Dobljena enačba je diferencialna enačba za neznanu površino $A(x)$. Odvod $A(x)$ je sorazmeren vrednosti $A(x)$. Pri obravnavi trenja vrvi na kolutu smo spoznali, da se rešitev take enačbe izraža z eksponentno funkcijo. V našem primeru je rešitev

$$A(x) = C e^{\rho_0 g x / \sigma_0}.$$

Označimo površino preseka pri $x = 0$ z A_0 . Potem je $C = A_0$ in

$$A(x) = A_0 e^{\rho_0 g x / \sigma_0}.$$

Površina preseka $A(x)$ je enaka $\pi(r^2(x) - r_1^2)$, kjer je r_1 notranji in $r(x)$ zunanji polmer stene. Tako je

$$r^2(x) = r_1^2 + \frac{W}{\sigma_0} e^{\rho_0 g x / \sigma_0}.$$

Tu smo upoštevali, da je $\sigma_0 = W/A_0$. Debelina stene narašča eksponentno z višino stolpa. To predstavlja pri visokih stolpih resen problem, zato gradnja visokih konstrukcij ni poceni. Rast debeline je odvisna od kvocienta ρ_0/σ_0 . Konstanto σ_0 določa pogoj, da je kompresijska napetost manjša od kompresijske trdnosti oziroma meje tečenja. Če pogledamo tabelo 6.2 za tri materiale, les, jeklo in beton, vidimo, kako dober konstrukcijski material je les. Ni drag in ima majhen kvocient ρ_0/σ_0 . Seveda pa je pri izbiri materiala pomembno upoštevati tudi stroške vzdrževanja.

Tabela 6.2: Tabela kvocienta ρ_0/σ_0 .

material	$\rho_0[\text{g}/\text{cm}^3]$	$\sigma_0[\text{Mpa}]$	$\rho_0/\sigma_0 \times 10^{-6}[\text{s}^2/\text{m}^2]$
Beton	1.5	50	30
Jeklo	7.8	500	15.6
] Les	0.5	45	11.1

6.7 Vprašanja in naloge

6.7.1 Vprašanja

1. Mera deformacije palice dolžine l je $\epsilon_1 = 0.5$. Zapiši dolžino deformirane palice
2. Poišči svoj primer, ki pokaže da meri ϵ_1 in ϵ_2 nista aditivni.
3. Dolžina deformirane palice je $l + \Delta l$, kjer je l prvotna dolžina palice. Določi deformirano dolžino dvakrat daljše palice, ki ima enako mero deformacije.
4. Palico s krožnim presekom s polmerom r raztegujemo s silo F . S kakšno silo moramo raztegniti palico s polmerom $2r$, da se bosta palici enako raztegnili.
5. Palico dolžine l raztegnemo s silo F . Za koliko bi se raztegnila dvakrat daljša palica?
6. Za koliko moramo segreti palico, da se bo raztegnila za isti dolžino kot polovico krajša palica.

6.7.2 Naloge

1. Odsekan stožec z višino h in polmerom a spodnje ter polmerom b zgornje ploskve je osno obremenjen v smeri osi stožca. Določi potek osne napetosti.

Rešitev: Postavimo koordinatni sistem z osjo x v smeri stožca z izhodiščem na spodnji osnovni ploskvi. Presek stožca z ravnino z normalo v smeri osi x je krog. Polmer kroga r se z x linearno spreminja od a pri $x = 0$ do b pri $x = h$. Potem je r funkcija spremenljivke x dana z

$$r(x) = a + \frac{(b-a)x}{h}.$$

Površina preseka je $A(x) = \pi r^2$. Označimo z $\sigma(x)$ napetost na preseku x . Posebej označimo $\sigma_0 = \sigma(x=0)$ in $A_0 = A(x=0)$. Ker je odsekan stožec v ravnovesju, velja

$$A_0\sigma_0 = A(x)\sigma(x)$$

za vsak $x \in [0, h]$. Potemtakem je

$$\sigma(x) = \frac{A_0}{A(x)}\sigma_0 = \frac{a^2}{r(x)^2}\sigma_0 = \frac{\sigma_0}{\left(1 + \left(\frac{b}{a} - 1\right)\frac{x}{h}\right)^2}.$$

V posebnem primeru $x = h$ je

$$\sigma(x=h) = \frac{a^2}{b^2}\sigma_0.$$

2. Železobetonski stebel s prečnim presekom na sliki ima volumensko razmerje beton : železo 6 : 1. Prilagodljive razmerje Youngovih modulov je 1 : 9. Steber je osno obremenjen s silo F . Določi v kakšnem razmerju je obremenitev betona in železa.

Rešitev: Označimo z A_1 in E_1 presek in Youngov modul betona ter z A_2 in E_2 presek in Youngov modul železa. Osno silo stebra F zapišimo kot vsoto $F = F_1 + F_2$, kjer sta F_1 in F_2 osni sili betona oziroma železa. Potem je

$$F_1 = A_1\sigma_1 = A_1E_1\epsilon_1$$

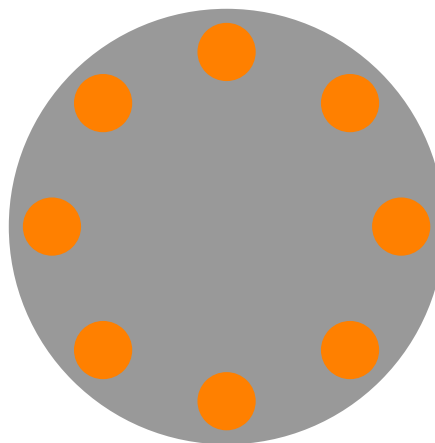
in

$$F_2 = A_2\sigma_2 = A_2E_2\epsilon_2.$$

Potem je

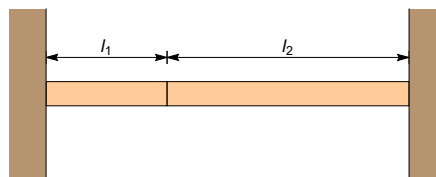
$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{A_1E_1}{A_2E_2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Tu smo upoštevali, da je $A_1/A_2 = 6$ in $E_1/E_2 = 1/9$. Betonski del stebra nosi 2/3 obremenitve.



Prečni presek železobetonskega stebra.

3. Med dve togi steni je vstavljena kompozitna palica. Levi del palice z dolžino l_1 ima Youngov modul E_1 in koeficient termalnega raztezka α_1 , desni dolžine l_2 pa E_2 in α_2 . Palico segrejemo za ΔT .



Kompozitna palica.

- (a) Izračunaj termalno naletost v palici.
 (b) Izračunaj deformaciji palic.
 (c) Za koliko se sprementa dolžini l_1 in l_2 .

Rešitev:

- (a) Označimo z ϵ_1 in ϵ_2 deformaciji levega in desnega dela palice. Ker je palica vpeta med dve togi steni, je $\epsilon_1 + \epsilon_2 = 0$. Deformacija ϵ_i , $i = 1, 2$ je vsota termalne ϵ_i^T in elastične deformacije ϵ_i^E . Velja torej $\epsilon_i = \epsilon_i^T + \epsilon_i^E$. Potemtakem je

$$\epsilon_1^T + \epsilon_1^E + \epsilon_2^T + \epsilon_2^E = 0.$$

Uporabimo sedaj konstitutivni zvezi

$$\epsilon_i^T = \alpha_i \Delta T \quad \text{in} \quad \epsilon_i^E = \frac{\sigma_i}{E_i}.$$

Nadalje je $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ saj imata oba dela palice enak presek. Z upoštevanjem konstitutivne zveze dobimo

$$(\alpha_1 + \alpha_2)\Delta T + \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right)\sigma = 0.$$

Termalna napetost je tako

$$\sigma = -\frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}(\alpha_1 + \alpha_2)\Delta T.$$

- (b) Deformacija levega dela palice je

$$\epsilon_1 = \epsilon_1^T + \epsilon_1^E = \alpha_1 \Delta T + \frac{\sigma}{E_1} = \left(\alpha_1 - \frac{E_2}{E_1 + E_2}(\alpha_1 + \alpha_2)\right) \Delta T.$$

Podobno dobimo

$$\epsilon_2 = \left(\alpha_2 - \frac{E_1}{E_1 + E_2}(\alpha_1 + \alpha_2)\right) \Delta T.$$

- (c) Sprememba dolžine palice je $\Delta l_i = \epsilon_i l_i$. Potem je z upoštevanjem zgornjih formul

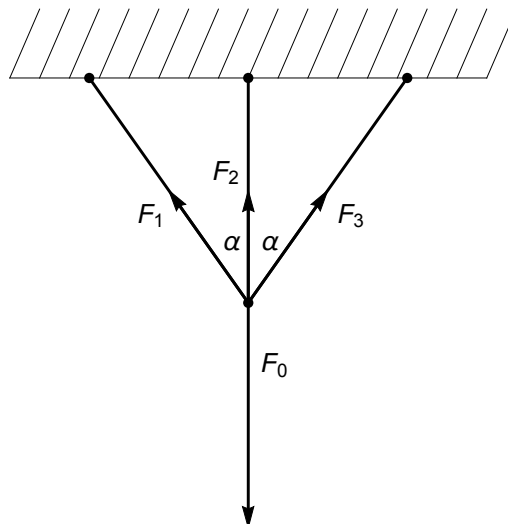
$$\Delta l_1 = \frac{\alpha_1 E_1 - \alpha_2 E_2}{E_1 + E_2} l_1 \Delta T$$

in

$$\Delta l_2 = \frac{\alpha_2 E_2 - \alpha_1 E_1}{E_1 + E_2} l_2 \Delta T.$$

Če je $\alpha_1 E_1 = \alpha_2 E_2$ se dolžini delov palic ne spremenita, če pa ne velja enakost, se en del palice podaljša na račun druge, ki se skrajša.

4. Paličje na sliki je sestavljeno iz treh elastičnih palic. Vse tri imajo enak presek A in Youngov modul E . Kot α je $\pi/4$, srednja palica pa ima dolžino 1 m. Palice so pritrjene členkasto na stropu in so v spodnjem členu obremenjene s silo $F_0 = 15$ kN. Določi sile v palicah in izračunaj pomik spodnjega členka.



Rešitev: Sistem treh neznanih sil ima skupno prijemališče, zato je naloga statično nedoločena. Za določitev sil palic moramo upoštevati osne deformacije palic. Zaradi simetrije je $F_1 = F_3$. Ravnovesna enačba sil v navpični smeri je

$$2F_1 \cos \alpha + F_2 = F_0.$$

Po Hookovem zakonu je

$$F_1 = AE \frac{\Delta l_1}{l_1}, \quad F_2 = AE \frac{\Delta l_2}{l_2},$$

kjer sta l_1 in l_2 dolžini leve in sredinske palice, Δl_1 in Δl_2 pa njuna osna pomika. Pri obtežitvi se paličje raztegne v navpični smeri. Po deformaciji velja

$$(l_1 + \Delta l_1)^2 = d^2 + (l_2 + \Delta l_2)^2.$$

Tu je d razdalja med pritrdiščema palic na stropu. Ker je $l_1^2 = d^2 + l_2^2$, sledi da je

$$2l_1 \Delta l_1 + (\Delta l_1)^2 = 2l_2 \Delta l_2 + (\Delta l_2)^2.$$

Pri predpostavki majhnih deformacij pri kateri velja Hookov zakon smemo zanemariti člena $(\Delta l_1)^2$ in $(\Delta l_2)^2$. Tako dobimo

$$l_1 \Delta l_1 = l_2 \Delta l_2.$$

oziroma $\Delta l_1 = \Delta l_2 l_2 / l_1$. Ravnovesna enačbe se potem glasi

$$F_0 = \frac{2AE \Delta l_2 l_2 \cos \alpha}{l_1^2} + \frac{AE \Delta l_2}{l_2} = \frac{2AE \Delta l_2 l_2^2}{l_1^3} + \frac{AE \Delta l_2}{l_2}.$$

V zadnji enakosti smo upoštevali, da je $\cos \alpha = l_2 / l_1$. Rešitev enačbe je

$$\Delta l_2 = \frac{F_0 l_1^3 l_2}{AE (l_1^3 + 2l_2^3)}.$$

Sili sta potem

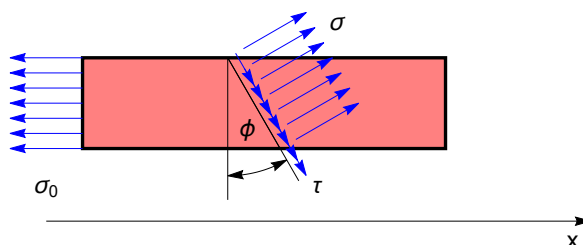
$$F_1 = \frac{F_0 l_1 l_2^2}{l_1^3 + 2l_2^3} = \frac{F_0 \cos^2(\alpha)}{2 \cos^3(\alpha) + 1} = 15(1 - 1/\sqrt{2}) \text{ kN},$$

$$F_2 = \frac{F_0 l_1^3}{l_1^3 + 2l_2^3} = \frac{F_0}{2 \cos^3(\alpha) + 1} = 30(1 - 1/\sqrt{2}) \text{ kN}.$$

Poglavje 7

Napetostni tenzor

7.1 Poševni presek palice



Slika 7.1: Poševni navidezni prerez.

Do sedaj smo palico vedno navidezno prerezali z ravnino, ki je bila pravokotna na os palice. Presekajmo jo sedaj postrani pod kotom ϕ , glej sliko 7.1. Kot vedno postavimo koordinatno os x v smeri osi palice. Normalo na ravnino preseka označimo z \vec{n} . Hitro vidimo, da je $\vec{n} = \cos \phi \vec{i} + \sin \phi \vec{j}$, kjer os \vec{j} kaže navzgor. Zapišimo še vektor v smeri preseka $\vec{m} = \sin \phi \vec{i} - \cos \phi \vec{j}$. Vektor \vec{m} ima komponento v smeri navzdol.

Odrežani del je v ravnovesju. Na njega delujejo površinske sile. Na levi deluje površinska sila z gostoto σ v levo, na poševnem preseku pa ima površinska sila dve komponenti. Komponento v smeri normale označimo z σ , komponento v smeri \vec{m} pa s τ . Komponento v normalni smeri imenujemo *normalna napetost*, komponento v smeri ravnine pa *strižna napetost*. Označimo še površini preseka. Na levi z A , na desni pa z A_* . Ker je presek na desni pod kotom ϕ je $A_* = A / \cos \phi$. Ravnovesna enčba se tako glasi

$$-\sigma_0 A \vec{i} + \sigma A_* \vec{n} + \tau A_* \vec{m}.$$

Oo krajšem računu dobimo komponentni zapis v smeri baze \vec{i} in \vec{j}

$$\begin{aligned} -\sigma_0 + \sigma + \tau \tan \phi &= 0 \\ \sigma A \sin \phi - \tau \cos \phi &= 0. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Potem je $\tau = \tan \phi \sigma$. Vstavimo to v prvo enačbo v (7.1). Tako dobimo

$$\sigma_0 = (1 + \tan^2 \phi) \sigma = \frac{\sigma}{\cos^2 \phi}.$$

Potem je

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_0 \cos^2 \phi = \frac{1}{2} \sigma_0 (1 + \cos 2\phi) \\ \tau &= \sigma_0 \sin \phi \cos \phi = \frac{1}{2} \sigma_0 \sin 2\phi\end{aligned}\quad (7.2)$$

Izračunali smo normalno in štrižno napetost. Vektorju

$$\vec{t} = \sigma \vec{n} + \tau \vec{m}$$

pravimo *vektor napetosti*. Vidimo, da je vektor napetosti gostota površinske sile na preseku. Zapišimo sedaj vektor napetosti v bazi \vec{i} in \vec{j} . V ta namen upoštevamo definicijo vektorjev \vec{n} in \vec{m} . Po krajšem računu sledi

$$\vec{t} = \sigma_0 \cos^2 \phi (\cos \phi \vec{i} + \sin \phi \vec{j}) + \sigma_0 \sin \phi \cos \phi (\sin \phi \vec{i} - \cos \phi \vec{j}) = \sigma_0 \cos \phi \vec{i}. \quad (7.3)$$

7.2 Tenzor napetosti

Formula (7.3) določa vektor napetosti za enosno napetostno stanje. Enosno napetostno stanje je posebne vrste napetostnega stanja. V splošnem napetostno stanje v deformabilnem telesu ni enosno. Napetostno stanje telesa določa *napetostni tenzor*. Napetostni tenzor je linearna preslikava, ki ravnini navideznega preseka telesa priredi vektor napetosti \vec{t} , ki je gostota površinske sile na tem peseku. Integral gostote površinske sile po preseku potem določa silo s katero deluje end del telesa preko preseka na drugi del telesa. Naj bo p točka telesa \mathcal{B} v prostorskem položaju b in Σ ravnina preseka skozi točko p . Označim z \vec{n} normalo na to ravnino preseka. Ne pozabimo, da je normala enotski vektor, velja torej $|\vec{n}| = 1$. Normala kaže v smer tistega dela telesa, ki deluje na drugi del telesa, na nasprotni strani normale, glej sliko 7.2, kjer del telesa b_2 deluje na b_1 z gostoto površinske sile \vec{t} . Napetostni tenzor $\underline{t} = \underline{t}(p)$ v točki p je tako linearna preslikava

$$\underline{t}(p) : \vec{n} \mapsto \vec{t}(p) = \underline{t}(p) \vec{n}. \quad (7.4)$$

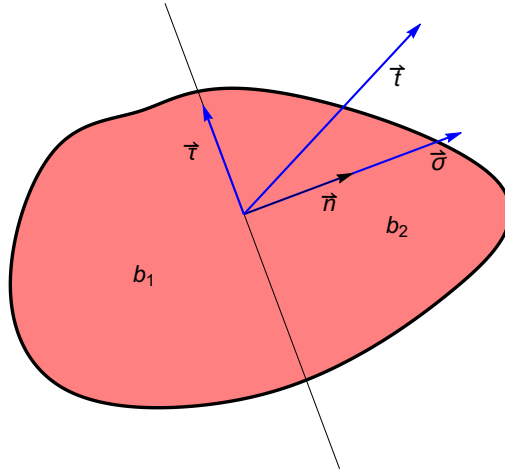
Beseda tenzor je v bistvu sinonim za linearno preslikavo. Tenzorje bomo označevali z dvakrat podčrtanim simbolom. Vektor napetosti je odvisen od položaja in smeri preseka. Odvisnost od točke sledi od odvisnosti napetostnega tenzorja od od točke, odvisnost od normale pa sledi iz predpisa $\vec{t} = \underline{t} \vec{n}$. Napetostni tenzor je tenzorska funkcija definirana na prostorskem položaju. V mehaniki kontinuuma mu pravimo tudi *Cauchyjev napetostni tenzor*. Če je napetostni tenzor neodvisen od položaja, pravimo, da je napetostno stanje *homogeno*. Enosno napetostno stanje palice s konstantnim presekom je primer homogenega napetostnega stanja.

V kartezičnem koordinatnem sistemu napetostnemu tenzorju pripada matrika dimenzije 3×3

$$\underline{t} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_2 & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_3 \end{bmatrix}.$$

Tu smo uporabili dve pisavi. V prvi smo poljubni element matrike zapisali v obliki t_{ij} , v drugi pa smo diagonalne in izvendiagonalne označili drugače. Pomen oznak bom kmalu razkrili. Vektorju $\vec{t} = t_1 \vec{i} + t_2 \vec{j} + t_3 \vec{k}$ priredimo stolpec $[t_1, t_2, t_3]^T$. Tu oznaka veliki T pomeni transponiranje, ki vrstico postavi v stolpec. Podobno vektorju \vec{n} priredimo stolpec $[n_1, n_2, n_3]^T$. V matričnem zapisu se tako enakost $\vec{t} = \underline{t} \vec{n}$ glasi

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \quad (7.5)$$



Slika 7.2: Navidezni prerez telesa b .

Komponente vektorja napetosti dobimo z matričnim produktom matrike s stolpcem. Pogostokrat zaradi enostavnosti pisave vektor identificiramo z njegovim stolpcem komponent. Tako bomo naprimer uporabljali zapis

$$\vec{t} = t_1\vec{i} + t_2\vec{j} + t_3\vec{k} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix},$$

ki matematično ni povsem korekten, saj vektor ni trojica števil.

Sedaj bomo pokazali, da enoosni napetosti v smeri osi \vec{i} pripada napetostni tenzor \underline{t}

$$\underline{t} = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.6)$$

Res, za $\vec{n} = \cos \phi \vec{i} + \sin \phi \vec{j}$ izračunajmo

$$\begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_0 \cos \phi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pripadajoča napetost je torej $\vec{t} = \sigma_0 \cos \phi \vec{i}$. Dobljeni rezultat se ujema z (7.3). Enoosni napetosti res pripada napetostni tenzor (7.6).

Pojma normalna in strižna napetost smo že definirali za primer enoosne napetosti. Njuno definicijo bomo sedaj razširili na poljubno napetostno stanje. *Normalna napetost* t_n je projekcija vektorja napetosti na normalno smer,

$$t_n = \vec{t} \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \underline{t} \vec{n}.$$

Vektorju $\vec{t}_n = t_n \vec{n}$ pravimo *vektor normalne napetosti*. *Vektor strižne napetosti* je $\vec{t}_s = \vec{t} - \vec{t}_n$. Njegovi velikosti pravimo *strižna napetost*. Kvadrat strižne napetosti je

$$t_s^2 = \vec{t}_s \cdot \vec{t}_s = (\vec{t} - t_n \vec{n}) \cdot (\vec{t} - t_n \vec{n}) = |\vec{t}|^2 - t_n^2. \quad (7.7)$$

Primer strižna napetost je na steno prilepljen obešalnik. Na stiku obešalnika in stene deluje strižna napetost v nasprotni smeri kot je obešalnik obremenjen. Če obešalnik preobremenimo, se odlepi

in zdrsne. Vzrok loma je pogostokrat v tem, da strižna napetost v smeri zdrsa preseže dopustno napetost.

Raziščimo sedaj pomen komponent napetostnega tenzorja v danem koordinatnem sistemu. Ravnina preseka v izbrani točki p s koordinatami (x_0, y_0, z_0) naj bo ravnina yz . Normala ravnine je potem v smeri osi x . Del telesa $x > x_0$ deluje na del telesa $x < x_0$ z gostoto površinske sile

$$\vec{t} = \underline{t}(x_0, y_0, z_0)\vec{v} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ t_{31} \end{bmatrix}.$$

Normalna napetost je

$$t_n = \vec{t} \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ t_{31} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = t_{11}.$$

Vektor strižne napetosti je potem

$$\vec{t}_s = \vec{t} - t_n \vec{n} = \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ t_{31} \end{bmatrix} - t_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t_{21} \\ t_{31} \end{bmatrix}.$$

Diagonalni element t_{11} je torej normalna napetost, ki jo pogostokrat označimo z σ_1 , izvendiagonalni elementi pa so komponente strižne napetosti, zato jih radi označimo tudi z τ_{21} in τ_{31} . Podobno velja za ostale diagonalne in izvendiagonalne elemente.

7.3 Simetričnost tenzorja napetosti

Tenzor je a simetričen, če velja enakost

$$\vec{a} \cdot \underline{a}\vec{b} = \vec{b} \cdot \underline{a}\vec{a}$$

za poljubna vektorja \vec{a} in \vec{b} . Hiro lahko ugotovimo, da je tenzor simetričen natanko tedaj, ko tenzorju v matričnem zapisu pripada simetrična matrika.

Pokažimo, da je tenzor napetosti simetričen. Kot bomo videli, to sledi iz ravnovesne enačbe za navor. V telesu \mathcal{B} , ki je v ravnovesju pod vplivom volumenske sile \vec{G}_0 izberimo poljubno točko p . V dovolj majhni okolici točke p lahko predpostavimo, da je napetostno stanje homogeno. V to majhno okolico postavimo dovolj majhno kocko z dolžino stranice Δa . V središče kocke postavimo izhodišče koordinatnega sistema, katerega os usmerimo v smeri stranic kocke. Če je kocka dovolj majhna, je volumenska sila na kocko konstantna in je ekvipolentna točkovni sili $\vec{g}_0(\Delta a)^3$ s prijemališčem v središču kocke. Tu smo z \vec{g}_0 zapisali gostoto volumenske sile \vec{G}_0 . Na vsako ploskev kocke deluje vektor napetosti, ki je sistem vzporednih sil. Ker obravnavamo ravnovesje, lahko temu sistemu sil priredimo ekvipolentno rezultanto, točkovno silo s prijemališčem v središču te ploskve. Tako dobimo naslednji sistem sil

$$\mathcal{F} = \cup_{k=0}^6 \{(P_k \vec{f}_k)\},$$

kjer je $P_0 = (0, 0, 0)$ koordinatno izhodišče, $\vec{f}_0 = \vec{g}_0(\Delta a)^3$,

$$\begin{aligned} P_1 &= \left(\frac{1}{2}\Delta a, 0, 0\right), & P_2 &= \left(-\frac{1}{2}\Delta a, 0, 0\right), \\ P_3 &= \left(0, \frac{1}{2}\Delta a, 0\right), & P_4 &= \left(0, -\frac{1}{2}\Delta a, 0\right), \\ P_5 &= \left(0, 0, \frac{1}{2}\Delta a\right), & P_6 &= \left(0, 0, -\frac{1}{2}\Delta a\right) \end{aligned} \quad (7.8)$$

in

$$\begin{aligned} \vec{f}_1 &= (\Delta a)^2 \underline{t} \vec{i}, & \vec{f}_2 &= -(\Delta a)^2 \underline{t} \vec{i}, \\ \vec{f}_3 &= (\Delta a)^2 \underline{t} \vec{j}, & \vec{f}_4 &= -(\Delta a)^2 \underline{t} \vec{j}, \\ \vec{f}_5 &= (\Delta a)^2 \underline{t} \vec{k}, & \vec{f}_6 &= -(\Delta a)^2 \underline{t} \vec{k}. \end{aligned}$$

Tu je \underline{t} vrednost tenzorja napetosti v središču kocke. Pri izračunu sil \vec{f}_i , $i = 1, \dots, 6$ smo upoštevali, da so normale na ploskve kocke v smeri koordinatnih osi in da so nasprotno usmerjene na nasprotnih straneh. Vidimo, da velja

$$\vec{f}_2 = -\vec{f}_1, \quad \vec{f}_4 = -\vec{f}_3, \quad \vec{f}_6 = -\vec{f}_5. \quad (7.9)$$

Izračunajmo sedaj navor sistema sil \mathcal{F} glede na pol v središču kocke

$$\vec{N}(\mathcal{F}, P_0) = \left(\vec{i} \times \vec{f}_1 + \vec{j} \times \vec{f}_3 + \vec{k} \times \vec{f}_5 \right) \Delta a = \left(\vec{i} \times \underline{t} \vec{i} + \vec{j} \times \underline{t} \vec{j} + \vec{k} \times \underline{t} \vec{k} \right) (\Delta a)^3. \quad (7.10)$$

Tu smo upoštevali (7.8) in (7.9). Tensor napetosti na baznem vektorju je stolpec matrike napetostnega tenzorja v tej bazi. Iz ravnovesne enačbe $\vec{N}(\mathcal{F}, P_0) = \vec{0}$ in (7.10) potem sledi

$$\vec{0} = \vec{i} \times \left(t_{11} \vec{i} + t_{21} \vec{j} + t_{31} \vec{k} \right) + \vec{j} \times \left(t_{12} \vec{i} + t_{22} \vec{j} + t_{32} \vec{k} \right) + \vec{k} \times \left(t_{13} \vec{i} + t_{23} \vec{j} + t_{33} \vec{k} \right) \quad (7.11)$$

in tako

$$\vec{0} = t_{21} \vec{k} - t_{31} \vec{j} - t_{12} \vec{k} + t_{32} \vec{i} + t_{13} \vec{j} - t_{23} \vec{i} = (t_{32} - t_{23}) \vec{i} + (t_{13} - t_{31}) \vec{j} + (t_{21} - t_{12}) \vec{k}.$$

Od tod sledi $t_{21} = t_{12}$, $t_{31} = t_{13}$ in $t_{32} = t_{23}$ in matrika napetostnega tenzorja je res simetrična.

Tako smo dokazali, da je tensor napetosti simetričen. Velja torej

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{12} & t_{22} & t_{23} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \sigma_2 & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Pomembna lastnost simetričnih tenzorjev, ki je ne bomo dokazali, je, da za simetrični tenzor obstaja tak koordinatni sistem, da v tem koordinatnem sistemu tenzorju pripada diagonalna matrika. Obstaja torej tak koordinatni sistem, da je

$$\underline{t} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}.$$

Takemu koordinatnemu sistemu pravimo *lastni koordinatni sistem*, diagonalnim elementom *lastne vrednosti*, baznim vektorjem v smereh koordinatnih osi pa *lastni vektorji*. Potem je

$$\underline{t} \vec{i} = \sigma_1 \vec{i}, \quad \underline{t} \vec{j} = \sigma_2 \vec{j}, \quad \underline{t} \vec{k} = \sigma_3 \vec{k}.$$

Vidimo, da strižna napetost na ravninah, ki imajo normale v smeri lastnih vektorjev napetosti enaka nič. To je pomembna lastnost. Tu se porodi sorodno vprašanje, ali obstaja smer, v kateri je normalna napetost enaka nič. Odgovor je, da obstaja natanko tedaj, ko je vsota diagonalnih elementov napetostnega tenzorja enaka nič. Vsoti diagonalnih elementov matrike pravimo *sled matrike*. Velja, da je sled matrike neodvisna od koordinatnega sistema v katerem priredimo tenzorju matriko, zato rečemo sledi matrike kar *sled tenzorja*. Sled tenzorja \underline{t} označimo s $sl \underline{t}$. Vidimo, da je sled napetostnega tenzorja enaka vsoti lastnih vrednosti napetostnega tenzorja.

7.4 Osnovna napetostna stanja

Sedaj si bomo ogledali osnovna napetostna stanja.

1. Enoosno napetostno stanje. To napetostno stanje že poznamo. V koordinatnem sistemu, ki ima os x v smeri osi napetosti napetostnemu tenzorju pripada matrika (7.6). Matrika je diagonalna. Pripadajoče lastni vrednosti sta σ_0 , in 0, lastni vektorji pa so bazni vektorji koordinatnega sistema. Vektor napetosti na ravnino z normalo $\vec{n} = n_1\vec{i} + n_2\vec{j} + n_3\vec{k}$ je

$$\vec{t} = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_0 n_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \sigma_0 n_1 \vec{i}.$$

Normalna napetost je $t_n = \vec{t} \cdot \vec{n} = \sigma_0 n_1^2$. Vektor normalne napetosti je $\vec{t}_n = \sigma_0 n_1^2 \vec{n}$. Po formuli (7.7) je strižna napetost

$$t_s = \sqrt{|\vec{t}|^2 - t_n^2} = |\sigma_0 n_1| \sqrt{1 - n_1^2} = |\sigma_0 n_1| \sqrt{n_2^2 + n_3^2}.$$

Strižna napetost je enaka nič samo pri $n_1 = 0$, torej na koordinatni ravnini yz , ki ima normalo v smeri osi x . Strižna napetost je maksimalna, ko doseže maksimum funkcija $f(n_1) = n_1 \sqrt{1 - n_1^2}$ na intervalu $n_1 \in [-1, 1]$. Ekstrem nastopi, ko je $f'(n_1) = 0$. Izračunajmo

$$f'(n_1) = \sqrt{1 - n_1^2} - \frac{2n_1^2}{2\sqrt{1 - n_1^2}} = \frac{1 - 2n_1^2}{\sqrt{1 - n_1^2}}.$$

Ekstrem nastopi pri $n_1 = \pm 1/\sqrt{2}$. Ekstremna strižna napetost je potem

$$\max |t_s| = |\sigma_0/\sqrt{2}| \sqrt{1 - 1/2} = \frac{1}{2} |\sigma_0|.$$

Če je enoosna napetost natezna, $\sigma_0 > 0$, je maksimalna strižna napetost enaka $\frac{1}{2}\sigma_0$. Dosežena je na ravnini z normalo, ki oklepa z osjo x kot $\pi/4$. Kot smo že omenili, lom pogostokrat nastopi na ravnini vzdolž katere je strižna napetost maksimalna. In to dejansko opazimo, lom palce je pogostokrat žagasto nazobčan z avninami loma, ki oklepajo kot $\pi/4$ s smerjo natega.

2. *Hirostatično napetostno stanje*. Pripadajoči napetosotni je diagonalen

$$\underline{\underline{t}} = -p \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -p \underline{\underline{i}}$$

Tu smo z $\underline{\underline{i}}$ označili identiteto oziroma enotsko matriko. Tenzorju, ki je mnogokratnik identitete pravimo tudi *sfrerični* oziroma *krogelni tenzor*. Številu p pravimo tlak. V zapisu smo izbrali negativni predznak, ker to ustreza hidrostatičnemu tlaku tekočine. Pomembna lastnost enotskega tenzorja $\underline{\underline{i}}$ je, da tenzorju v vseh koordinatnih sistemih pripada ista matrika, enotska matrika. Lastna vrednosti je $-p$, lastni vektor pa je poljubni vektor, saj je

$$\underline{\underline{t}} \vec{u} = -p \underline{\underline{i}} \vec{u} = -p \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = -p \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = -p \vec{u}$$

Vektor napetosti je $\vec{t} = \underline{\underline{t}} \vec{n} = -p \underline{\underline{i}} \vec{n} = -p \vec{n}$. Enkost potrjuje, da je $-p$ lastna vrednost, lastni vektor pa je poljubni vektor. Normalna napetost je $t_n = \vec{t} \cdot \vec{n} = -p$, strižna napetost pa je enaka nič. Napetostni tenzor, ki ima to lastnost, da je strižna napetost enaka nič v poljubni smeri, je natanko hidrostatični napetostni tenzor.

3. *Strižno napetostno stanje.* Napetostno stanje je strižno, če je sled napetostnega tenzorja enaka nič, če velja torej $\underline{\underline{t}} = 0$. Primer strižnega napetostnega tenzorja je

$$\underline{\underline{t}} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vektor napetosti na ravnino z normalo \vec{n} je

$$\vec{t} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma n_1 \\ -\sigma n_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \sigma(n_1\vec{i} - n_2\vec{j}).$$

Normalna napetost je $t_n = \vec{t} \cdot \vec{n} = \sigma(n_1^2 - n_2^2)$. Vidimo, da je normalna napetost enaka nič, če je $|n_1| = |n_2|$. Če je normalna napetost enaka nič, je vektor napetosti enak vektorju strižne napetosti. Potem je

$$|t_s| = |\vec{t}| = |\sigma| \sqrt{n_1^2 + n_2^2} = |\sigma| \sqrt{1 - n_3^2}.$$

Maksimalna strižna napetost nastopi pri $n_3 = 0$. Potem je njena maksimalna vrednost $|\sigma|$. Ekstremalna vrednost strižne napetosti tako nastopi v ravnini, ki ima normalo v smeri

$$\vec{n} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}.$$

To so ravnine pravokotne na ravnino xy in v smeri diagonal $y = \pm x$.

4. *Ravninsko napetostno stanje.* Napetostno stanje je ravninsko, če obstaja tako koordinatni sistem, da je

$$\underline{\underline{t}} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & 0 \\ t_{12} & t_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau_{12} & 0 \\ \tau_{12} & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ravninsko napetostno stanje nastopi pri obremenitvah, ki so ravninske. V nadaljevanju se bomo večinoma omejili na ravninsko napetostno stanje.

7.5 Ravnoesna enačba

Ravnoesno enačbo za enososno napetostno stanje že poznamo. Sedaj nas zanima ravnoesna enačba za poljubno napetostno stanje. Naj bo $\underline{\underline{t}}$ napetostno stanje, ki ga v telesu \mathcal{B} povzroči volumenska sila \vec{G} . Njeno gostoto označimo z \vec{g} . Volumenska sila deluje na prostorskem, torej deformiranem položaju b . Če vzamemo majhen volumen ΔV v okolici poljubne točke $p \in b$, potem deluje volumenska sila na ta volumen s silo $\vec{g}\Delta V$.

Za majhen volumen izberimo kocko z volumnom Δx s središčem v poljubno izbrani točki $p \in b$. V točko p postavimo izhodišče koordinatnega sistema. Osi koordinatnega sistema usmerimo v smeri kocke. Kocka je v ravnoesju. Videli smo že, da simetričnost napetostnega tenzorja sledi iz momentne ravnoesne enačbe. Poglejmo sedaj, kaj sledi iz ravnoesja sil.

Na kocko deluje volumenska sila $\vec{g}(\Delta x)^3$ in površinske sile na mejnih ploskvah kocke. Gostota površinske sile na ploskev $x = \frac{1}{2}\Delta x$ je $\vec{t}_1 = \underline{\underline{t}}(\frac{1}{2}\Delta x, y_x, z_x)\vec{i}$. Na nasprotni ploskvi $x = -\frac{1}{2}\Delta x$ pa je gostota $\vec{t}_3 = \underline{\underline{t}}(-\frac{1}{2}\Delta x, y_x, z_x)(-\vec{i})$. Tu smo z y_x, z_x zapisali y in z koordinati točk na ploskvah $x = \pm\frac{1}{2}\Delta x$. Na obeh presekih $x = \pm\frac{1}{2}\Delta x$ imata gostoti enaki y in z koordinati. Skupni prispevek ploskev $x = \pm\frac{1}{2}\Delta x$ je potem

$$\underline{\underline{t}}(\frac{1}{2}\Delta x, y_x, z_x)\vec{i} + \underline{\underline{t}}(-\frac{1}{2}\Delta x, y_x, z_x)(-\vec{i}) = \begin{bmatrix} t_{11}(\Delta x/2, y_x, z_x) - t_{11}(-\Delta x/2, y_x, z_x) \\ t_{21}(\Delta x/2, y_x, z_x) - t_{21}(-\Delta x/2, y_x, z_x) \\ t_{31}(\Delta x/2, y_x, z_x) - t_{31}(-\Delta x/2, y_x, z_x) \end{bmatrix}. \quad (7.12)$$

V zapisu (7.12) nismo upoštevali simetrije napetostnega tenzorja. Razliko $t_{k1}(\Delta x/2, y_x, z_x) - t_{k1}(-\Delta x/2, y_x, z_x)$, $k = 1, 2, 3$ v (7.12) lahko zapišemo v obliki

$$t_{k1}(\Delta x/2, y_x, z_x) - t_{k1}(-\Delta x/2, y_x, z_x) = \frac{\partial t_{k1}}{\partial x}(x_k, y_x, z_x)\Delta x, \quad x \in (-\frac{1}{2}\Delta x, \frac{1}{2}\Delta x). \quad (7.13)$$

Tu smo na znanje vzeli dobro znano enakost iz diferencialnega računa

$$f(b) - f(a) = (b - a)\frac{df}{dx}(x), \quad a < x < b, \quad (7.14)$$

ki velja za zvezno odvedljivo funkcijo $f(x)$. V (7.13) smo uporabili (7.14) za funkcije t_{k1} , ki so funkcije spremenljivk x, y in z . Odvod funkcije več spremenljivk označujemo s simbolom $\frac{\partial}{\partial x}$ namesto z $\frac{d}{dx}$. Odvodu $\frac{\partial}{\partial x}$ pravimo parcialni odvod po x . Za parcialni odvod veljajo enake lastnosti kot za navadni odvod. Za dovolj majhno kocko je

$$t_{k1}(\Delta x/2, y_x, z_x) - t_{k1}(-\Delta x/2, y_x, z_x) = \frac{\partial t_{k1}}{\partial x}(p)\Delta x + O((\Delta x)^2), \quad (7.15)$$

kjer je p središče kocke, $O((\Delta x)^2)$ pa je simbol, ki pove, da je napaka aproksimacije velikostnega reda $(\Delta x)^2$. Vsota površinske sile na mejnih ploskvah kocke $x = \pm\Delta x/2$ je integral njene gostote. Iz (7.12) in (7.15) sledi, da je k -ta komponenta te vsote enaka

$$\int_A (t_{k1}(\Delta x/2, y, z) - t_{k1}(-\Delta x/2, y, z)) dA = \frac{\partial t_{k1}}{\partial x}(p)(\Delta x)^3 + O((\Delta x)^4). \quad (7.16)$$

Tu smo z A zapisali integracijsko območje $A = [-\frac{1}{2}\Delta x, \frac{1}{2}\Delta x] \times [-\frac{1}{2}\Delta x, \frac{1}{2}\Delta x]$ po katerem integriramo spremenljivki y in z . Integral smo izračunali s pomočjo (7.16), kjer smo upoštevali, da je površinski integral konstante enak konstanti pomnoženi s ploščino integracijskega območja. V našem primeru $|A_1| = (\Delta x)^2$.

Upoštovati moramo še prispevek napetosti na ploskvah $y = \pm\Delta x/2$ in $z = \pm\Delta x/2$. Na povsem enak način dobimo

$$\int_A (t_{k2}(x, \Delta x/2, z) - t_{k2}(x, -\Delta x/2, z)) dA = \frac{\partial t_{k2}}{\partial y}(p)(\Delta x)^3 + O((\Delta x)^4). \quad (7.17)$$

in

$$\int_A (t_{k3}(x, y, \Delta x/2) - t_{k3}(x, y, -\Delta x/2)) dA = \frac{\partial t_{k3}}{\partial z}(p)(\Delta x)^3 + O((\Delta x)^4). \quad (7.18)$$

K -ta komponenta ravnovesja sil na kocko se tako glasi

$$g_k(\Delta x)^3 + \frac{\partial t_{k1}}{\partial x}(\Delta x)^3 + \frac{\partial t_{k2}}{\partial y}(\Delta x)^3 + \frac{\partial t_{k3}}{\partial z}(\Delta x)^3 + O((\Delta x)^4) = 0. \quad (7.19)$$

Enačbo delimo z $(\Delta x)^3$ in nato poženemo Δx proti nič. Potem je

$$g_k + \frac{\partial t_{k1}}{\partial x} + \frac{\partial t_{k2}}{\partial y} + \frac{\partial t_{k3}}{\partial z} = 0 \quad (7.20)$$

oziroma v vektorskem zapisu

$$\vec{g} + \text{div } \underline{t} = \vec{0}. \quad (7.21)$$

Enakost velja za poljubno točko telesa. Tu smo z $\text{div } \underline{t}$ zapisali *divergenco tenzorja*

$$\text{div } \underline{t} = \begin{bmatrix} \frac{\partial t_{11}}{\partial x} + \frac{\partial t_{12}}{\partial y} + \frac{\partial t_{13}}{\partial z} \\ \frac{\partial t_{12}}{\partial x} + \frac{\partial t_{22}}{\partial y} + \frac{\partial t_{23}}{\partial z} \\ \frac{\partial t_{13}}{\partial x} + \frac{\partial t_{23}}{\partial y} + \frac{\partial t_{33}}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (7.22)$$

Pri prepisu (7.21) v (7.22) smo upoštevali simetrijo napetostnega tenzorja, $t_{ij} = t_{ji}$.

Enačba (7.21) oziroma njen komponentni zapis (7.20) je ravnovesna enačba. Pravimo ji *Cauchyjeva momentna enačba* ali na kratko kar *momentna enačba*. Telo pod vplivom volumenske sile je v ravnovesju natanko tedaj, ko je tenzor napetosti simetričen in velja momentna enačba v vsaki točki telesa. Iz momentne enačbe vidimo, da je homogeno ravnovesno napetostno stanje možno samo brez prisotnosti volumenskih sil. Netrivialna volumenska sila ne dopušča homogenega ravnovesnega stanja. Primer netrivialne volumenske sile smo videli pri deformaciji palice zaradi lastne teže. V tem primeru je bila volumenska sila konstantna, napetost pa je bila v primeru palice s konstantnim presekom linearna funkcija osne koordinate. Za enoosno napetostno stanje, kjer je $t_{11} = \sigma(x)$, vse ostale komponente napetostnega tenzorja pa so enake nič, se momentna enačba poenostavi v

$$\vec{g} + \frac{d\sigma}{dx}\vec{v} = 0. \quad (7.23)$$

Potem je $\vec{g} = g_1\vec{v}$ in (7.23) se poenostavi v ravnovesno enačbo za enoosno napetost

$$\frac{d}{dx}A\sigma + p = 0,$$

kjer je A konstantni presek in $p = g_1A$ dolžinska gostota osne sile. Vidimo torej, da je enoosno napetostno stanje možno samo pri palici s konstantnim presekom. Če se presek palice spreminja, je enoosno napetostno stanje aproksimacija, ki je lahko dobra za počasno spreminjanje preseka.

7.6 Komponentni zapis tenzorja napetosti

Matrični zapis tenzorja napetosti je odvisen od koordinatnega sistema. Naj v danem koordinatnem sistemu z baznimi vektorji \vec{e}_i , $i = 1, 2, 3$ pripada tenzorju \underline{t} matrika

$$\underline{t} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{31} & t_{33} \end{bmatrix}. \quad (7.24)$$

Tu v zapisu namenoma nismo upoštevali simetrije tenzorja. Potem je

$$\underline{t}\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{31} & t_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ t_{31} \end{bmatrix} = t_{11}\vec{e}_1 + t_{21}\vec{e}_2 + t_{31}\vec{e}_3$$

in

$$\vec{e}_i \cdot \underline{t}\vec{e}_1 = t_{i1}. \quad (7.25)$$

V zadnji enakosti smo upoštevali, da so vektorji \vec{e}_i med seboj paroma ortonormirani. Podobno lahko pokažemo, da je

$$\vec{e}_i \cdot \underline{t}\vec{e}_2 = t_{i2} \quad \text{in} \quad \vec{e}_i \cdot \underline{t}\vec{e}_3 = t_{i3}. \quad (7.26)$$

Če združimo (7.25) in (7.26) sledi

$$\vec{e}_i \cdot \underline{t}\vec{e}_j = t_{ij}. \quad (7.27)$$

Izpeljali smo formulo, ki tenzorju \underline{t} priredi komponente v bazi \vec{e}_i , $i = 1, 2, 3$.

Poglejmo primer. V dani kartezični bazi \vec{e}_i , $i = 1, 2, 3$ naj ima tenzor napetosti \underline{t} matrični zapis

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}. \quad (7.28)$$

Zanima nas matrični zapis tega tenzorja napetosti v novi bazi z baznimi vektorji

$$\vec{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_2, \quad \vec{e}'_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_2, \quad \vec{e}'_3 = \vec{e}_3.$$

Vektor \vec{e}'_1 oklepa z \vec{e}_1 kot $\pi/4$ in prav tako tudi vektor \vec{e}'_2 z vektorjem \vec{e}_2 . Koordinatni sistem z bazo \vec{e}'_i , $i = 1, 2, 3$ je tako glede na koordinatni sistem \vec{e}_i zavrten okrog osi \vec{e}_3 za kot $\pi/4$. Priredimo sedaj tenzorju \underline{t} matrični zapis v novi bazi. Označimo to matriko s \mathbf{t}' . Po formuli (7.27) je

$$t'_{ij} = \vec{e}'_i \cdot \underline{t} \vec{e}'_j.$$

Potem je

$$t'_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ -\sigma_1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Nadalje je

$$t'_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sigma_1 \\ -\sigma_1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

in

$$t'_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sigma_1 \\ -\sigma_1 \\ 0 \end{bmatrix} = -\sigma_1.$$

Hitro lahko tudi izračunamo, da je

$$t'_{13} = t'_{23} = 0 \quad \text{in} \quad t'_{33} = \sigma_2.$$

V novi bazi tako napetostemu tenzorju pripada matrika

$$\mathbf{t}' = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_1 & 0 \\ -\sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}. \quad (7.29)$$

Istemu napetostnemu tenzorju pripadata v dveh različnih bazah dve različni matriki. Elementi matrike \mathbf{t} in \mathbf{t}' so med seboj različni. Matriki pa imata nekaj skupnega, obe matriki imata enako sled, torej vsoto diagonalnih elementov, in determinanto. Sled je σ_2 , determinanta pa $-\sigma_1^2\sigma_2$. To ni naključje, je pravilo. Vsi matrični zapisi tenzorja imajo enako sled in determinanto. Sled in determinanta sta tako lastnost tenzorja. Pravimo, da sta *tenzorski invarianti*.

7.7 Ravninska napetost

Poglejmo si podrobneje odvisnost matričnega zapisa od izbire baze za ravninski primer. V tem primeru lahko vse izbire koordinatnih sistemov izrazimo z enim parametrom, ki je enak kotu zavrtitve.

Naj bo torej \underline{t} ravninski tenzor napetosti. To pomeni, da obstaja tak koordinatni sistem z bazo \vec{i}, \vec{j} in \vec{k} , da je pripadajoča matrika oblike

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & 0 \\ t_{12} & t_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{12} & t_{22} \end{bmatrix}. \quad (7.30)$$

Kot vidimo, se lahko pri matričnem zapisu ravninskega napetostnega stanja omejimo na matrike velikosti 2×2 . Izberimo sedaj novo bazo

$$\vec{i}' = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j} \quad \text{in} \quad \vec{j}' = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}.$$

Novo bazo smo dobili iz prvotne baze tako, da smo bazna vektorja \vec{i} in \vec{j} zasukali za kot φ okrog osi \vec{k} . V novi bazi pripada tenzorju \underline{t} matrika z elementi t'_{ij} . Po formuli (7.27) je v novi bazi

$$\begin{aligned} t'_{11} &= \vec{i}' \cdot \underline{t} \vec{i}' = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{12} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_{11} \cos \varphi + t_{12} \sin \varphi \\ t_{12} \cos \varphi + t_{22} \sin \varphi \end{bmatrix} \\ &= t_{11} \cos^2 \varphi + 2t_{12} \cos \varphi \sin \varphi + t_{22} \sin^2 \varphi. \end{aligned}$$

Upoštevajmo, da je $\cos^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi)$ in $\sin^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi)$ v zgornjem izračunu. Potem je

$$t'_{11} = \frac{1}{2}(t_{11} + t_{22}) + \frac{1}{2}(t_{11} - t_{22}) \cos 2\varphi + t_{12} \sin 2\varphi. \quad (7.31)$$

Podobno izračunamo

$$\begin{aligned} t'_{22} &= \vec{j}' \cdot \underline{t} \vec{j}' = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{12} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -t_{11} \sin \varphi + t_{12} \cos \varphi \\ -t_{12} \sin \varphi + t_{22} \cos \varphi \end{bmatrix} \\ &= t_{11} \sin^2 \varphi - 2t_{12} \cos \varphi \sin \varphi + t_{22} \cos^2 \varphi \\ &= \frac{1}{2}(t_{11} + t_{22}) - \frac{1}{2}(t_{11} - t_{22}) \cos 2\varphi - t_{12} \sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (7.32)$$

Izvendiagonalni element pa je

$$\begin{aligned} t'_{12} &= \vec{i}' \cdot \underline{t} \vec{j}' = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{12} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -t_{11} \sin \varphi + t_{12} \cos \varphi \\ -t_{12} \sin \varphi + t_{22} \cos \varphi \end{bmatrix} \\ &= -t_{11} \cos \varphi \sin \varphi + t_{12}(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + t_{22} \cos \varphi \sin \varphi \\ &= -\frac{1}{2}(t_{11} - t_{22}) \sin 2\varphi + t_{12} \cos 2\varphi. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Pripadajoči matrični zapis v bazi \vec{i}', \vec{j}' je tako

$$\begin{aligned} \mathbf{t}' &= \begin{bmatrix} t'_{11} & t'_{12} \\ t'_{12} & t'_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(t_{11} + t_{22}) + \frac{1}{2}(t_{11} - t_{22}) \cos 2\varphi + t_{12} \sin 2\varphi & -\frac{1}{2}(t_{11} - t_{22}) \sin 2\varphi + t_{12} \cos 2\varphi \\ -\frac{1}{2}(t_{11} - t_{22}) \sin 2\varphi + t_{12} \cos 2\varphi & \frac{1}{2}(t_{11} + t_{22}) - \frac{1}{2}(t_{11} - t_{22}) \cos 2\varphi - t_{12} \sin 2\varphi \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Hitro vidimo, da je

$$\text{sl } \mathbf{t}' = t'_{11} + t'_{22} = t_{11} + t_{22} = \text{sl } \mathbf{t}.$$

Po nekoliko daljšem računu pa

$$\begin{aligned} \det \mathbf{t}' &= t'_{11} t'_{22} - t_{12}^2 \\ &= \frac{1}{4}(t_{11} + t_{22})^2 - \frac{1}{4}(t_{11} - t_{22})^2 \cos^2 2\varphi - \frac{1}{4}(t_{11} - t_{22})^2 \sin^2 2\varphi - t_{12}^2 \\ &= t_{11} t_{22} - t_{12}^2 = \det \mathbf{t}. \end{aligned}$$

7.8 Ekstremalne lastnosti ravninskega napetostnega tenzorja

Za dano napetostno stanje, je napetost na preseku odvisna od normale preseka. Zanima nas, za kateri presek je normalna napetost ekstremalna in za kateri presek je ekstremalna strižna napetost.

Pri odgovoru na te vprašanji se bomo zaradi enostavnosti omejili na ravninsko napetostno stanje. Prostorski primer zahteva nekoliko več matematičnega predznanja. Omenimo, da ekstremalni normalni napetosti pravimo tudi *glavna napetost*, njuni smeri pa *glavna smer*. Na enak način kot za napetostni tenzor lahko obravnavamo ekstremalne lastnosti poljubnega simetričnega tenzorja. Kasneje bomo spoznali deformacijski tenzor \underline{e} . Definirali bomo normalno deformacijo $\vec{n} \cdot \underline{e} \vec{n}$ in tudi strižno deformacijo. Vse kaj velja normalno in strižno napetost bo potem veljalo tudi za normalno in strižno deformacijo.

Za odgovor za ravninski primer imamo že vse pripravljeno. Spomnimo se, da je t_{11} normalna napetost na ravnino z normalo \vec{i} . Potem je t'_{11} normalna napetost na ravnino z normalo $\vec{i}' = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}$. Označimo $t_n = t'_{11}$ in $\vec{n} = \vec{i}'$. Po formuli (7.31) je potem

$$t_n = \frac{1}{2}(t_{11} + t_{22}) + \frac{1}{2}(t_{11} - t_{22}) \cos 2\varphi + t_{12} \sin 2\varphi. \quad (7.35)$$

Normalna napetost t_n je odvisna od kota φ . Očitno je normalna napetost v smeri φ enaka kot normalna napetost v smeri $\varphi + \pi$. To sledi neposredno iz (7.35) in periodičnosti funkcije $\cos 2\varphi$ in $\sin 2\varphi$ ali pa kar direktno iz definicije normalne napetosti, saj je $t_n = \vec{n} \cdot \underline{t} \vec{n} = -\vec{n} \cdot \underline{t} (-\vec{n}) = t_{-n}$.

Določiti moramo pri katerem kotu je normalna napetost ekstremalna in kakšna je ta vrednost. V ta namen prepisimo (7.35) v

$$t_n = \frac{1}{2}(t_{11} + t_{22}) + A \cos 2\varphi + B \sin 2\varphi,$$

kjer je

$$A = \frac{1}{2}(t_{11} - t_{22}) \quad \text{in} \quad B = t_{12}.$$

Očitno o ekstremu odloča izraz $A \cos 2\varphi + B \sin 2\varphi$. Zapišimo ga v obliki

$$A \cos 2\varphi + B \sin 2\varphi = C \cos(2\varphi - \delta) = C \cos 2\varphi \cos \delta + C \sin 2\varphi \sin \delta.$$

Ta enakost velja za vsak φ natanko takrat, ko je

$$A = C \cos \delta \quad \text{in} \quad B = C \sin \delta. \quad (7.36)$$

Konstanti A in B sta dani. Določiti moramo C in δ . Konstanti C pravimo amplituda, δ pa je fazni zamik. Hitro vidimo, da je

$$A^2 + B^2 = C^2 \quad \text{in} \quad \frac{B}{A} = \tan \delta.$$

Potem je

$$C = \pm \sqrt{A^2 + B^2} \quad \text{in} \quad \delta = \arctan \frac{B}{A} \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Iz (7.36) vidimo, da lahko vzamemo pri korenu pozitivni predznak, saj lahko negativni predznak pri C -ju v (7.36) dobimo, če faznemu zamiku prištejemo π , saj to ne spremeni δ spremeni pa predznaka v (7.36). Naj bo torej $C > 0$. Potem po krajšem premisleku ugotovimo, da je

$$\delta = \arctan \frac{B}{A} + \begin{cases} 0 & A \geq 0 \\ \pi & A < 0 \end{cases} = \arctan \frac{2t_{12}}{t_{11} - t_{22}} + \begin{cases} 0 & t_{11} \geq t_{22} \\ \pi & t_{11} < t_{22} \end{cases} \quad (7.37)$$

Vstavimo ugotovljeno v (7.35). Tako je

$$t_n = \frac{1}{2}(t_{11} + t_{22}) + \sqrt{\frac{1}{4}(t_{11} - t_{22})^2 + t_{12}^2} \cos(2\varphi - \delta), \quad (7.38)$$

kjer je δ dan z (7.37). Ekstremna vrednost normalne napetosti nastopi, ko je kosinus enak ± 1 . Označimo s σ_{\max} maksimalno normalno napetost in s σ_{\min} minimalno normalno napetost. Potem po krajšem računu sledi

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= \frac{1}{2} \left(t_{11} + t_{22} + \sqrt{(t_{11} - t_{22})^2 + 4t_{12}^2} \right), \\ \sigma_{\min} &= \frac{1}{2} \left(t_{11} + t_{22} - \sqrt{(t_{11} - t_{22})^2 + 4t_{12}^2} \right).\end{aligned}\quad (7.39)$$

Dobljeno formulo lahko zapišemo v invariantni obliki. Izračunajmo

$$(t_{11} - t_{22})^2 + 4t_{12}^2 = t_{11}^2 - 2t_{11}t_{22} + t_{22}^2 + 4t_{12}^2 = t_{11}^2 + 2t_{11}t_{22} + t_{22}^2 - 4(t_{11}t_{22} - t_{12}^2) = (\text{sl } \underline{t})^2 - 4 \det \underline{t}.$$

Potem je

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= \frac{1}{2} \left(\text{sl } \underline{t} + \sqrt{(\text{sl } \underline{t})^2 - 4 \det \underline{t}} \right), \\ \sigma_{\min} &= \frac{1}{2} \left(\text{sl } \underline{t} - \sqrt{(\text{sl } \underline{t})^2 - 4 \det \underline{t}} \right).\end{aligned}\quad (7.40)$$

Ker sta sled in determinanta neodvisni od koordinatnega sistema, vidimo iz (7.40), da so ekstremalne vrednosti normalne napetosti oziroma glavne vrednosti neodvisne od koordinatnega sistema v katerem smo tenzorju napetosti priredili matrični zapis.

Določiti moramo še smeri normale oziroma kot φ v katerih nastopi ekstremalna normalna napetost. Z razliko od glavnih vrednosti so te smeri odvisne od koordinatnega sistema. Iz (7.38) sledi, da nastopi ekstrem, ko je $2\varphi - \delta = 0$ ali $2\varphi - \delta = \pi$. Ekstremalni oziroma glavni smeri sta tako

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \arctan \frac{2t_{12}}{t_{11} - t_{22}} \quad \text{in} \quad \varphi_2 = \frac{1}{2} \arctan \frac{2t_{12}}{t_{11} - t_{22}} + \frac{\pi}{2}.\quad (7.41)$$

Tu smo upoštevali, da je smer $\varphi + \pi$ enakovredna smeri φ . Vidimo, da glavni smeri oklepata pravi kot. Določiti moramo še katera smer je maksimalna in katera minimalna. Smer $\varphi = \frac{1}{2}\delta$ je smer maksimuma, smer $\varphi = \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\pi$ pa minimalna smer. Potem iz (7.37) sledi, da je maksimalna smer

$$\varphi_{\max} = \frac{1}{2} \arctan \frac{2t_{12}}{t_{11} - t_{22}} + \begin{cases} 0 & t_{11} \geq t_{22} \\ \pi/2 & t_{11} < t_{22} \end{cases},\quad (7.42)$$

minimalna pa je

$$\varphi_{\min} = \varphi_{\max} + \frac{\pi}{2}.\quad (7.43)$$

Strižna napetost na ravnino z normalo $\vec{n} = \vec{v}'$ je $t_s = t'_{12}$. Po formuli (7.33) je

$$t_s = -\frac{1}{2}(t_{11} - t_{22}) \sin 2\varphi + t_{12} \cos 2\varphi.\quad (7.44)$$

Pokažimo sedaj, da je strižna napetost enaka nič v koordinatnem sistemu z osmi v smeri glavnih osi. Prepišimo (7.44) v

$$t_s = \sin 2\varphi \left(-\frac{1}{2}(t_{11} - t_{22}) + t_{12} \tan 2\varphi \right).$$

Potem z upoštevanjem (7.41) sledi, da je $t_s = 0$ za $\varphi \in \{\varphi_{\min}, \varphi_{\max}\}$.

Poiščimo sedaj maksimalno strižno napetost. Iz (7.44) očitno sledi, da je ekstremalna vrednost strižne napetosti τ_{\max} enaka

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{(t_{11} - t_{22})^2 + 4t_{12}^2}.$$

Upoštevajmo (7.39). Potem je

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}). \quad (7.45)$$

To je pomembna formula. Maksimalna strižna napetost je večja, če je $\sigma_{\min} < 0$. Ta primer ustreza strižni deformaciji. Lom pri strižni deformaciji je tako bolj verjeten kot pri enoosni deformaciji.

Določiti moramo še smer. V ta namen zapišimo $\varphi = \theta - \pi/4$. Potem je

$$\cos 2\varphi = \cos(2\theta - \frac{1}{2}\pi) = \sin 2\theta$$

in

$$\sin 2\varphi = \sin(2\theta - \frac{1}{2}\pi) = -\cos 2\theta.$$

Če izrazimo strižno napetost kot funkcijo θ , potem iz (7.44) sledi

$$t_s = \frac{1}{2}(t_{11} - t_{22}) \cos 2\theta + t_{12} \sin 2\theta.$$

Vidimo, da ima t_s kot funkcija θ do konstantnega člena enako obliko kot t_n kot funkcija φ . Potemtakem, sta ekstremalni smeri strižne napetosti

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \arctan \frac{2t_{12}}{t_{11} - t_{22}} \quad \text{in} \quad \theta_2 = \frac{1}{2} \arctan \frac{2t_{12}}{t_{11} - t_{22}} + \frac{\pi}{2}$$

in ker je $\varphi = \theta - \pi/4$, smer ekstremalne strižne napetosti oklepa kot $\pi/4$ s smerema ekstremalne normalne napetosti. Pri enoosni deformaciji je tako strižna deformacija maksimalna na ravninah, ki so pod kotom $\pi/4$ glede na os obremenitve. To pojasni, zakaj je lom pogostokrat žagast.

Za boljši pregled zapišimo po točkah, kaj smo ugotovili

- Maksimalna normalna napetost je

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{2} \left(t_{11} + t_{22} + \sqrt{(t_{11} - t_{22})^2 + 4t_{12}^2} \right)$$

in nastopi v smeri $\vec{n} = \cos \varphi_{\max} \vec{i} + \sin \varphi_{\max} \vec{j}$, kjer je

$$\varphi_{\max} = \frac{1}{2} \arctan \frac{2t_{12}}{t_{11} - t_{22}} + \begin{cases} 0 & t_{11} \geq t_{22} \\ \pi/2 & t_{11} < t_{22}. \end{cases}$$

Tu so t_{ij} komponente napetostnega tenzorja \underline{t} v bazi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

- Minimalna normalna napetost je

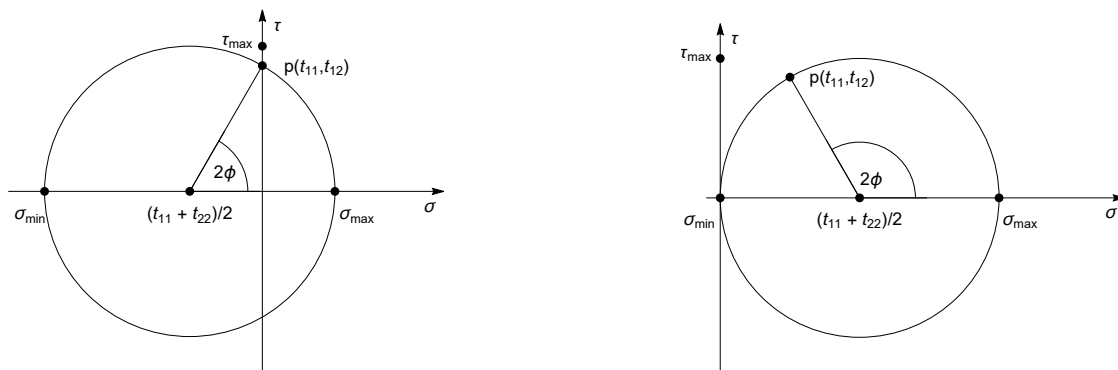
$$\sigma_{\min} = \frac{1}{2} \left(t_{11} + t_{22} - \sqrt{(t_{11} - t_{22})^2 + 4t_{12}^2} \right).$$

Minimalna normalna napetost nastopi v smeri $\varphi_{\min} = \varphi_{\max} + \frac{1}{2}\pi$.

- Maksimalna strižna napetost je

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}).$$

Smer maksimalne strižne napetosti oklepa kot $\pi/4$ s smerema ekstremalnih normalnih napetosti.



Slika 7.3: Mohrova krožnica. Levo $t_{11} > t_{22}$, desno $t_{11} < t_{22}$.

7.8.1 Morhova krožnica

Problem ekstremalnih lastnosti simetričnega tenzorja ima naslednjo geometrijsko ponazoritev. Z upoštevanjem (7.35) in (7.44) po krajšem računu sledi

$$\left(t_n - \frac{1}{2}(t_{11} + t_{22})\right)^2 + t_s^2 = \frac{1}{4}(t_{11} - t_{22})^2 + t_{12}^2 = \rho^2, \quad (7.46)$$

kjer smo z ρ označili

$$\rho = \sqrt{\frac{1}{4}(t_{11} - t_{22})^2 + t_{12}^2}. \quad (7.47)$$

Enačba (7.46) je enačba krožnice v ravnini $t_n t_s$ s središčem v $\frac{1}{2}(t_{11} + t_{22})$ in polmerom ρ , glej sliki 7.3. Krožnica seka os t_n pri $\frac{1}{2}(t_{11} + t_{22}) \pm \rho$. Po definiciji polmera ρ sledi iz (7.39), da sta presečišči natanko σ_{\min} in σ_{\max} .

Za dani napetostni tenzor \underline{t} so vse možne vrednosti normalne $\sigma = t_n$ in strižne napetosti $\tau = t_s$ na Mohrovi krožnici. Na slikah 7.3 je označena točka $\mathbf{t} = (t_{11}, t_{12})$. To je par normalna in strižna napetost v smeri normale \vec{i} . Tej smeri ustreza kot $\varphi = 0$. Potem je kot med abscisno osjo σ in smerjo iz središča krožnice do točke \mathbf{t} enak kotu 2φ . Iz slike 7.3, primer $t_{11} > t_{22}$ potem sledi

$$\tan 2\varphi = \frac{t_{12}}{t_{11} - \frac{1}{2}(t_{11} + t_{22})} = \frac{2t_{12}}{t_{11} - t_{22}},$$

kar se ujema (7.42). Prav tako se ujema desna slika za primer $t_{11} < t_{22}$. S slike tudi vidimo, da je maksimalna strižna napetost enaka polmeru krožnice. To se ujema z enakostjo $\rho = \tau_{\max}$.

S pomočjo Mohrove krožnice lahko torej v celoti okarakteriziramo ekstremalne lastnosti ravninskega napetostnega tenzorja. Poglejmo kako najhitreje narišemo Mohrovo krožnico.

- Prvo narišemo koordinatni osi σ in τ in nato središče krožnice na osi σ s koordinato $\sigma = \frac{1}{2}(t_{11} + t_{22})$.
- Nato izračunamo polmer po formuli (7.47) in narišemo krožnico. Presečišči določata σ_{\max} in σ_{\min} .
- Na krožnici označimo še točko $\mathbf{t} = (t_{11}, t_{12})$. Kot med osjo σ in smerjo iz središča krožnice do točke \mathbf{t} je enak kotu 2φ . Ploovica tega kota določa smer maksimalne normalne napetosti.

Mohrove krožnice osnovnih napetostnih stanj

Določili bomo Mohrove krožnice za enosno, hidrostatično in strižno napetostno stanje. Za enosno napetostno stanje obstaja tak koordinatni sistem, da je pripadajoča matrika napetostnega tenzorja enaka

$$\begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Središče krožnice na osi σ je v $\frac{1}{2}\sigma_0$, polmer pa je $\rho = \frac{1}{2}|\sigma_0|$. Če je $\sigma_0 > 0$, je $\sigma_{\max} = \sigma_0$, $\sigma_{\min} = 0$ in $\tau_{\max} = \frac{1}{2}\sigma_0$. Maksimalna smer normalne napetosti je kar smer enosne napetosti \vec{i} . Za $\sigma_0 < 0$ je $\sigma_{\max} = 0$, $\sigma_{\min} = \sigma_0$ in $\tau_{\max} = -\frac{1}{2}\sigma_0$. Maksimalna smer normalne napetosti je sedaj smer \vec{j} .

Za hidrostatično napetostno stanje je $\underline{t} = -p\vec{i}$ je središče krožnice na osi σ v $-p$. Polmer krožnice je enak nič. Krožnica je degenerirana krožnica in je enaka točki $(-p, 0)$. Velja $\sigma_{\min} = \sigma_{\max} = -p$ in $\tau_{\max} = 0$.

Strižno napetostno stanje je podano z matriko

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{bmatrix}.$$

Središče Mohrove krožnice je v izhodišču koordinatnega sistema $\sigma\tau$. Polmer krožnice je $|\sigma_0|$. Potem je $\sigma_{\max} = |\sigma_0|$, $\sigma_{\min} = -|\sigma_0|$ in $\tau_{\max} = |\sigma_0|$. Za $\sigma_0 > 0$ je $\varphi_{\max} = 0$, za $\sigma_0 < 0$ je $\varphi_{\max} = \frac{1}{2}\pi$. Smer maksimalne strižne napetosti oklepa kot $\pi/4$ s smerjo \vec{i} .

7.9 Vprašanja in naloge

7.9.1 Vprašanja

1. Izračunaj kvocient σ_0/ρ_0 še za nekatere ostale materiale.
2. Zapiši strižne komponente vektorja napetosti na ravnini z normalo v smeri osi \vec{k} .
3. Naj bodo komponente tenzorja napetosti t_{ij} linearne funkcije koordinate x . Določi volumensko silo, da bo telo s tem napetostnim tenzorjem v ravnovesju.
4. Izračunaj komponente napetostnega tenzorja v novi bazi $\vec{i}' = \vec{j}$, $\vec{j}' = -\vec{i}$, $\vec{k}' = \vec{k}$.
5. Določi ekstremalne smeri normalne napetosti v primeru $t_{11} = t_{22}$ in $t_{12} = 0$.
6. Nariši Mohrove krožnice za enosno, hidrostatično in strižno napetostno stanje.

7.9.2 Naloge

1. Na preseku osnega elementa pod kotom $\pi/4$ je normalna napetost enaka $\sigma = 120$ MPa. Določi osno silo in strižno napetost. Osni element ima površino $A = 4$ cm².

Rešitev: V osnem elementu je enosno napetostno stanje. Pripadajoči tenzor napetosti je

$$\underline{t} = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

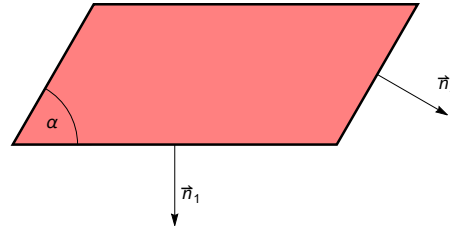
Normala na presek je $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$. Potem je normalna napetost enaka

$$\sigma = t_n = \vec{n} \cdot \underline{t} \vec{n} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} t_{11} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} t_{11}.$$

Ker je normalna napetost $\sigma = 120 \text{ MPa}$, je $t_{11} = 2\sigma = 240 \text{ MPa}$. Osna sila je $F = \sigma A$. Potem je

$$F = 240 \text{ MPa} \times 4 \text{ cm}^2 = 960 \times 10^6 \times 10^{-4} \text{ N} = 96\,000 \text{ N} = 96 \text{ kN}.$$

2. Na rombu z vmesnim kotom α in stranico v smeri osi x je na spodnji vodoravni stranici napetost enaka $\vec{t}_1 = \tau \vec{j}$ na desni poševni stranici pa je napetost enaka $\vec{t}_2 = \frac{\tau}{2}(\vec{i} + \vec{j})$. Določi pogoj na kot α , ki dopušča dane napetosti.



Rešitev: Normala na spodnjo vodoravno stranico je $\vec{n}_1 = -\vec{j}$, normala na desno poševno stranico pa je

Romb s predpisanimi napetostima.

$$\vec{n}_2 = \cos\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right)\vec{i} - \sin\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right)\vec{j} = \sin\alpha\vec{i} - \cos\alpha\vec{j}.$$

Iščemo ravninski napetostni tenzor

$$\underline{t} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{12} & t_{22} \end{bmatrix}$$

tako, da je

$$\vec{t}_1 = \underline{t} \vec{n}_1 \quad \text{in} \quad \vec{t}_2 = \underline{t} \vec{n}_2$$

oziroma

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{12} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t_{12} \\ t_{22} \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \frac{\tau}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{12} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} \sin\alpha - t_{12} \cos\alpha \\ t_{12} \sin\alpha - t_{22} \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Dobili smo sistem enačb za komponente t_{ij} . Enačbe so štiri, neznanke pa samo tri, t_{11} , t_{12} in t_{22} . Da bo sistem rešljiv, mora veljati določen pogoj na α . Poiščimo ga. Iz prvega para enačb dobimo takoj $t_{12} = 0$ in $t_{22} = \tau$. Vstavimo to v drugi par enačb. Dobimo enačbi

$$\frac{\tau}{2} = t_{11} \sin\alpha \quad \text{in} \quad \frac{\tau}{2} = -\tau \cos\alpha.$$

Vidimo, da mora veljati $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$. Iskani kot je tako $2\pi/3$ in $t_{11} = \frac{\tau}{\sqrt{3}}$.

3. Z meritvami smo dobili napetosti $\underline{t} \vec{i} = (10\vec{i} + 3\vec{j}) \text{ MPa}$, $|\underline{t} \vec{j}| = \sqrt{34} \text{ MPa}$ in $\underline{t} \vec{k} = \vec{0}$.
- Določi napetostni tenzor.
 - Skiciraj napetosti na kvadratu s stranicami v smereh koordinatnih osi x in y .
 - Določi ekstremalni normalni napetosti in njuni smeri.
 - Skiciraj Mohrovo krožnico.
 - Skiciraj napetosti na kvadratu s stranicami v smereh diagonal prvega in drugega kvadranta.
 - Določi normalno in strižno napetost v ravnini, ki ima normalo v smeri vektorja $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Rešitev:

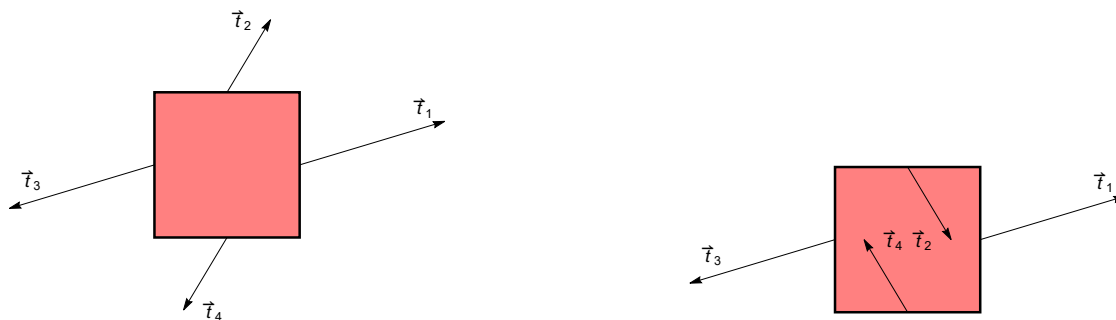
- (a) Iz pogoja $\underline{t}\underline{k} = \vec{0}$ sledi, da je napetostno stanje ravninsko, $t_{13} = t_{23} = t_{33} = 0$. Iz enačbe $\underline{t}\underline{i} = (10\underline{i} + 3\underline{j})\text{MPa}$ takoj sledi, da je $t_{11} = 10\text{MPa}$ in $t_{12} = 3\text{MPa}$. Upoštevajmo še pogoj $|\underline{t}\underline{j}| = \sqrt{34}\text{MPa}$. Izračunajmo

$$\sqrt{34}\text{MPa} = |\underline{t}\underline{j}| = \sqrt{t_{12}^2 + t_{22}^2} = \sqrt{9\text{MPa}^2 + t_{22}^2}.$$

Potem je $t_{22} = \pm 5\text{MPa}$. Napetostni tenzor

$$\underline{t} = \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 3 & \pm 5 \end{bmatrix} \text{MPa}.$$

- (b) Vektor napetosti na nasprotni stranici je nasproten vektorju napetosti na stranici, $\underline{t}(-\underline{i}) = -\underline{t}\underline{i}$ in $\underline{t}(-\underline{j}) = -\underline{t}\underline{j}$. Skica napetosti je na sliki 7.4.



Slika 7.4: Skica napetosti na stranicah kvadrata. Levo $t_{22} > 5\text{MPa}$, desno $t_{22} > -5\text{MPa}$.

- (c) V nadaljevanju se bomo omejili na primer $t_{22} = 5\text{MPa}$. Ekstremalni napetosti izračunamo po formuli

$$\sigma_{\text{ext}} = \frac{1}{2} \left(t_{11} + t_{22} \pm \sqrt{(t_{11} - t_{22})^2 + 4t_{12}^2} \right).$$

Po krajšem računu dobimo

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{1}{2} (15 + \sqrt{61}) \text{MPa} \quad \text{in} \quad \sigma_{\text{min}} = \frac{1}{2} (15 - \sqrt{61}) \text{MPa}.$$

Smer maksimalne normalne napetosti dobimo po formuli

$$\varphi_{\text{max}} = \frac{1}{2} \arctan \frac{2t_{12}}{t_{11} - t_{22}} + \begin{cases} 0 & t_{11} \geq t_{22} \\ \pi/2 & t_{11} < t_{22} \end{cases}.$$

V našem primeru je

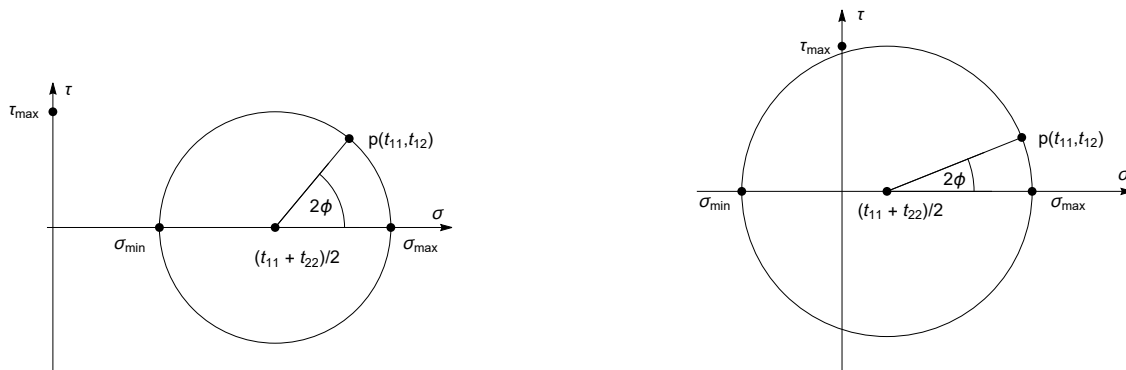
$$\varphi_{\text{max}} = \frac{1}{2} \arctan \frac{6}{5} \approx 25.1^\circ.$$

- (d) Mohrovi krožnici za oba primera sta na sliki 7.5.
 (e) Normala na diagonalo prvega kvadranta koordinatnega sistema xy je $\vec{n} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{j}$. Vektor napetosti je

$$\vec{t} = \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{MPa} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \end{bmatrix} \text{MPa}.$$

Normalna napetost je potem $t_n = \vec{t} \cdot \vec{n} = 9/2$, strižna pa

$$t_s = \sqrt{\vec{t} \cdot \vec{t} - t_n^2} = \frac{5}{2} \text{MPa}.$$



Slika 7.5: Mohrovi krožnici. Levo $t_{22} > 5$ MPa, desno $t_{22} > -5$ MPa.

Normala na diagonalo drugega in četrtega kvadranta je $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$. Potem je $\vec{t} = \frac{13}{\sqrt{2}}\vec{i} - 4\sqrt{2}\vec{j}$, $t_n = 21/2$ MPa in $t_s = 5/2$ MPa.

(f) Normala v smeri vektorja $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ je $\frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$. Potem podobno kot prej izračunamo $\vec{t} = (\frac{13}{\sqrt{3}}\vec{i} + \frac{8}{\sqrt{3}}\vec{j})$ MPa, $t_n = 7$ MPa in $t_s = \sqrt{86/3}$ MPa.

4. Naj za ravninsko napetostno stanje velja, da je $\underline{t} = 0$. Pokaži, da obstaja KS v katerem sta diagonalni komponenti napetostnega tenzorja enaki nič.

Rešitev: Izberimo poljubni koordinatni sistem in priredimo tenzorju matriko z elementi t_{ij} . Ker je sled tenzorja neodvisna od koordinatnega sistema, je $t_{11} + t_{22} = 0$. Iščemo nov koordinatni sistem v katerem ima \underline{t} matriko z elementi t'_{ij} za katero je $t'_{11} = t'_{22} = 0$. Po formulah s predavanj je

$$t'_{11} = \frac{1}{2}(t_{11} - t_{22}) \cos 2\varphi + t_{12} \sin 2\varphi \quad \text{in} \quad t'_{22} = -\frac{1}{2}(t_{11} - t_{22}) \cos 2\varphi - t_{12} \sin 2\varphi.$$

Iz $t_{11} + t_{22} = 0$ sledi, da je $t_{22} = -t_{11}$. Potem je

$$t'_{11} = t_{11} \cos 2\varphi + t_{12} \sin 2\varphi \quad \text{in} \quad t'_{22} = -t_{11} \cos 2\varphi - t_{12} \sin 2\varphi.$$

Vidimo, da je dovolj poiskati kot φ pri katerem je $t'_{11} = 0$. Iskani kot je rešitev enačbe

$$\cot 2\varphi = -\frac{t_{12}}{t_{11}}.$$

Iskani koordinatni sistem je sistem zavrten za kot φ , ki je rešitev zgornje enačbe.

Poglavje 8

Deformacijski tenzor

8.1 Prostorska deformacija

Pojem deformacije smo že spoznali na primeru enoosne deformacije. Tam smo uvedli pojem mera deformacije, ki ni omejen samo na enoosno deformacijo. Če na kratko ponovimo, spoznali smo tri mere deformacije, relativno spremembo dolžine, relativno spremembo kvadrata dolžine in logaritemsko mero. Mero smo nato lokalizirali z obravnavo sprememb dolžin samo na infinitezimalno bližnje točke. Na koncu smo nato mero še linealizirali. Te korake bomo sedaj ponovili za prostorsko deformacijo.

Naj bo P s koordinatami (X, Y, Z) poljubna točka v referenčnem položaju. V izbranem koordinatnem sistemu lahko točko P predstavimo s krajevnim vektorjem \vec{R} . Pri deformaciji se P preslika v točko p v prostorskem položaju b . Točko p predstavimo s krajevnim vektorjem \vec{r} . Vektorja \vec{R} in \vec{r} povezuje vektor pomika \vec{U} tako, da je

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{U}.$$

Različnim točkam pripada različen vektor pomika. To pomeni, da je vektor pomika funkcija referenčnega položaja P oziroma njegovih koordinat,

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{U}(\vec{R}).$$

Infinitezimalno bližnja točka P' , ki ji pripada krajevni vektor $\vec{R}' = \vec{R} + d\vec{R}$ se deformira v točko p' , ki ji pripada krajevni vektor

$$\vec{r}' = \vec{R} + d\vec{R} + \vec{U}(\vec{R} + d\vec{R}).$$

Potem je

$$\vec{R}' - \vec{R} = d\vec{R} \quad \text{in} \quad \vec{r}' - \vec{r} = d\vec{R} + \vec{U}(\vec{R} + d\vec{R}) - \vec{U}(\vec{R}). \quad (8.1)$$

Naša naloga je, da izraz $d\vec{U} = \vec{U}(\vec{R} + d\vec{R}) - \vec{U}(\vec{R})$ zapišemo kot funkcijo diferenciala $d\vec{R}$. Zapišimo \vec{U} , \vec{R} in $d\vec{R}$ po komponentah. Potem je k -ta komponenta diferenciala $d\vec{U}$ enaka

$$\begin{aligned} dU_k &= U_k(X + dX, Y + dY, Z + dZ) - U_k(X, Y, Z) \\ &= U_k(X + dX, Y + dY, Z + dZ) - U_k(X, Y + dY, Z + dZ) \\ &\quad + U_k(X, Y + dY, Z + dZ) - U_k(X, Y, Z + dZ) \\ &\quad + U_k(X, Y, Z + dZ) - U_k(X, Y, Z). \end{aligned}$$

Potem je po definiciji parcialnega odvoda po X , Y in Z

$$dU_k = \frac{\partial U_k}{\partial X}(X, Y + dY, Z + dZ)dX + \frac{\partial U_k}{\partial Y}(X, Y, Z + dZ)dY + \frac{\partial U_k}{\partial Z}(X, Y, Z)dZ,$$

kjer so $X_1 \in (X, X + dX)$, $Y_1 \in (Y, Y + dY)$ in $Z_1 \in (Z, Z + dZ)$. Do prvega reda $|d\vec{R}|$ natanko je potem

$$dU_k = \frac{\partial U_k}{\partial X}(X, Y, Z)dX + \frac{\partial U_k}{\partial Y}(X, Y, Z)dY + \frac{\partial U_k}{\partial Z}(X, Y, Z)dZ.$$

Enalost velja za $k = 1, 2, 3$. Velja torej

$$\begin{bmatrix} dU_1 \\ dU_2 \\ dU_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial U_1/\partial X & \partial U_1/\partial Y & \partial U_1/\partial Z \\ \partial U_2/\partial X & \partial U_2/\partial Y & \partial U_2/\partial Z \\ \partial U_3/\partial X & \partial U_3/\partial Y & \partial U_3/\partial Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{bmatrix} \quad (8.2)$$

oziroma v kompaktnem zapisu

$$d\vec{U} = \text{Grad } \vec{U} d\vec{R},$$

kjer je $\text{Grad } \vec{U}$ gradient pomika, ki je v koordinatnem zapisu (8.2) dan z matriko parcialnih odvodov. Velja torej

$$\text{Grad } \vec{U} = \begin{bmatrix} \partial U_1/\partial X & \partial U_1/\partial Y & \partial U_1/\partial Z \\ \partial U_2/\partial X & \partial U_2/\partial Y & \partial U_2/\partial Z \\ \partial U_3/\partial X & \partial U_3/\partial Y & \partial U_3/\partial Z \end{bmatrix}. \quad (8.3)$$

Zapis matrike je odvisen od izbire koordinatnega sistema. Tu smo zaradi enostavnosti pisave $\text{Grad } \vec{U}$ v (8.3) izenačili z njegovim matričnim zapisom. Gradient ima veliko črko G, ker smo paricalne odvode izračunali glede na referenčne koordinate, ki jih označujemo z velikimim črkami.

Upoštevajmo (8.2) v (8.1). Tako dobimo

$$d\vec{r} = \vec{r}' - \vec{r} = d\vec{R} + \text{Grad } \vec{U} d\vec{R} = (\underline{\underline{i}} + \text{Grad } \vec{U}) d\vec{R} = \underline{\underline{F}} d\vec{R}. \quad (8.4)$$

Tu smo z $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{i}} + \text{Grad } \vec{U}$ označili *gradient deformacije*. Gradient deformacije je izračunan v točki P .

Relativna mera deformacije je

$$\epsilon_1 = \frac{|d\vec{r}|}{|d\vec{R}|} - 1 = \frac{|\underline{\underline{F}} d\vec{R}|}{|d\vec{R}|} - 1.$$

Izraza naprej ne moremo poenostaviti, zato vzemimo raje Cuchyjevo mero deformacije

$$\epsilon_2 = \frac{|d\vec{r}|^2 - |d\vec{R}|^2}{|d\vec{R}|^2}.$$

Izračunajmo posebej

$$|d\vec{r}|^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = \underline{\underline{F}} d\vec{R} \cdot \underline{\underline{F}} d\vec{R} = d\vec{R} \cdot \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} d\vec{R}.$$

V zadnji enakosti smo upoštevali definicijo transponiranja $\underline{\underline{F}} \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \underline{\underline{F}}^T \vec{b}$, ki velja za poljubna vektorja \vec{a} in \vec{b} . Upoštevajmo, da je $|d\vec{R}|^2 = d\vec{R} \cdot d\vec{R}$. Potem je

$$\epsilon_2 = \frac{d\vec{R} \cdot (\underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{i}}) d\vec{R}}{d\vec{R} \cdot d\vec{R}} = 2\vec{e} \cdot \underline{\underline{E}} \vec{e}, \quad (8.5)$$

kjer je

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{i}})$$

deformacijski tenzor in $\vec{e} = d\vec{R}/|d\vec{R}|$. Vektor \underline{e} je enotski vektor. Formula (8.5) tako določa deformacijo, relativno spremembo kvadratov dolžin, v smeri enotskega vektorja \vec{e} . Vidimo, da deformacija lokalno določena z deformacijskim tenzorjem \underline{E} . Deformacijski tenzor je brezdimenzijski. Za majhne deformacije vemo, da je $\epsilon_2 = 2\epsilon_1$. Potem je za majhne deformacije

$$\epsilon_1 \approx \vec{e} \cdot \underline{E} \vec{e}. \quad (8.6)$$

Izraz (8.6) je kvadratna forma, ki določa relativno spremembo dolžin v smeri enotskega vektorja \vec{e} . S tem ko poznamo deformacijski tenzor, poznamo relativno spremembo dolžin v poljubni smeri.

Deformacijski tenzor je simetričen, velja $\underline{E}^T = \underline{E}$ oziroma

$$\underline{E} \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \underline{E} \vec{b}$$

za poljubna vektorja \vec{a} in \vec{b} . Res, identiteta \underline{E} je očitno simetrična, simetričen pa je tudi produkt $\underline{E}^T \underline{E}$, saj je

$$\underline{E}^T \underline{E} \vec{a} \cdot \vec{b} = \underline{E} \vec{a} \cdot \underline{E} \vec{b} = \vec{a} \cdot \underline{E}^T \underline{E} \vec{b}.$$

8.2 Pomen komponent deformacijskega tenzorja

Podobno kot smo napetostnemu tenzorju priredili matrični zapis, priredimo matrični zapis tudi deformacijskemu tenzorju. Seveda je ta zapis odvisen od izbire koordinatnega sistema. Naj bo \vec{e}_i , $i = 1, 2, 3$ kartezična baza. Potem v tej bazi pripada deformacijskemu tenzorju \underline{E} matrika z elementi $E_{ij} = \vec{e}_i \cdot \underline{E} \vec{e}_j$. Iz (8.6) sledi, da so pri majhnih deformacijah diagonalni elementi $E_{ii} = \vec{e}_i \cdot \underline{E} \vec{e}_i$ deformacijskega tenzorja enaki relativnim spremembam dolžin v koordinatnih smereh.

Poiščimo še pomen izvendiagonalnih elementov. V referenčnem položaju v izbrani točki $P \in B$ vzemimo dva diferenciala $d\vec{R}_1$ in $d\vec{R}_2$. Tema dvema vektorjema v prostorskem položaju po (8.4) pripadata vektorja $d\vec{r}_1 = \underline{F} d\vec{R}_1$ in $d\vec{r}_2 = \underline{F} d\vec{R}_2$. Kosinus kota med vektorjema $d\vec{r}_1$ in $d\vec{r}_2$ je

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2}{|d\vec{r}_1| |d\vec{r}_2|} = \frac{\underline{F} d\vec{R}_1 \cdot \underline{F} d\vec{R}_2}{\left| \underline{F} d\vec{R}_1 \right| \left| \underline{F} d\vec{R}_2 \right|} \\ &= \frac{d\vec{R}_1 \cdot \underline{F}^T \underline{F} d\vec{R}_2}{\sqrt{d\vec{R}_1 \cdot \underline{F}^T \underline{F} d\vec{R}_1} \sqrt{d\vec{R}_2 \cdot \underline{F}^T \underline{F} d\vec{R}_2}} \\ &= \frac{d\vec{R}_1 \cdot (2\underline{E} + \underline{I}) d\vec{R}_2}{\sqrt{d\vec{R}_1 \cdot (2\underline{E} + \underline{I}) d\vec{R}_1} \sqrt{d\vec{R}_2 \cdot (2\underline{E} + \underline{I}) d\vec{R}_2}}. \end{aligned}$$

Naj bo $d\vec{R}_1 = |d\vec{R}_1| \vec{e}_1$ in $d\vec{R}_2 = |d\vec{R}_2| \vec{e}_2$. Potem sta vektorja $d\vec{R}_1$ in $d\vec{R}_2$ med seboj pravokotna in zgornji rezultat se poenostavi v

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{2 |d\vec{R}_1| |d\vec{R}_2| \vec{e}_1 \cdot \underline{E} \vec{e}_2}{\sqrt{|d\vec{R}_1|^2 (2E_{11} + 1)} \sqrt{|d\vec{R}_2|^2 (2E_{22} + 1)}} \\ &= \frac{2E_{12}}{\sqrt{(2E_{11} + 1)} \sqrt{(2E_{22} + 1)}}. \end{aligned}$$

Za majhne deformacije je sprememba dolžin majhna, zato sta člena E_{11} in E_{22} v primerjavi z 1 majhna in ju lahko v zgornji formuli zanemarimo. Tako dobimo

$$E_{12} \approx \frac{1}{2} \cos \varphi.$$

Upoštevajmo še, da sta v referenčnem položaju smeri pravokotni. Kot med φ med $d\vec{r}_1$ in $d\vec{r}_2$ potem izrazimo kot spremembo kota $\varphi = \frac{1}{2}\pi - \Delta\varphi$. Tako je

$$E_{12} \approx \frac{1}{2} \cos\left(\frac{1}{2}\pi - \Delta\varphi\right) = \frac{1}{2} \sin \Delta\varphi \approx \frac{1}{2} \Delta\varphi.$$

V zadnji enakosti smo uporabili aproksimacijo $\sin \Delta\varphi \approx \Delta\varphi$, ki velja za majhne kote $\Delta\varphi$. Podobni sklep velja tudi za ostale pare koordinatnih smeri. Izvendiagonalni elementi so torej enaki polovični spremembi kota med koordinatnimi smermi. Element E_{ij} je pozitiven, če je kot med deformiranima smerema \vec{e}_i in \vec{e}_j oster. Če je $E_{ij} = 0$ smeri ostaneta pravokotni, za $E_{ij} < 0$ pa je kot topi. Spremembi kota pravimo tudi *strižna deformacija*.

Komponentam deformacijskega tenzorja smo tako v primeru majhnih deformacij našli geometriški pomen. Diagonalnim elementom pravimo tudi osne deformacije, izvendiagonalnim pa strižne deformacije. V skladu s tem pomenom komponente deformacijskega tenzorja označujemo tudi na sledeči način

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \gamma_{12}/2 & \gamma_{13}/2 \\ \gamma_{12}/2 & \epsilon_{22} & \gamma_{23}/2 \\ \gamma_{13}/2 & \gamma_{23}/2 & \epsilon_{33} \end{bmatrix}.$$

Komponente γ_{ij} sedaj pomenijo spremembo kotov med koordinatnimi osmi.

Sled deformacijskega tenzorja je vsota njegovih diagonalnih elementov, sl $\underline{E} = E_{11} + E_{22} + E_{33}$. Sedaj bomo pokazali, da je za majhne deformacije sl \underline{E} enaka relativni spremembi volumna. Zamislimo si v referenčnem položaju majhen paralelepiped napet na vektorje $d\vec{R}_i$, $i = 1, 2, 3$. Volumen tega paralelepipeda je $\Delta V = \left| d\vec{R}_1 \cdot (d\vec{R}_2 \times d\vec{R}_3) \right| = \left| (d\vec{R}_1, d\vec{R}_2, d\vec{R}_3) \right|$. Tu je $(d\vec{R}_1, d\vec{R}_2, d\vec{R}_3)$ mešani produkt vektorjev $d\vec{R}_i$. Vektor $d\vec{R}_i$ se preslika v $d\vec{r}_i = \underline{F} d\vec{R}_i$. Volumen deformiranega paralelepipeda napetega na vektorje $d\vec{r}_i$, $i = 1, 2, 3$ je

$$\Delta v = |d\vec{r}_1 \cdot (d\vec{r}_2 \times d\vec{r}_3)| = \left| \underline{F} d\vec{R}_1 \cdot (\underline{F} d\vec{R}_2 \times \underline{F} d\vec{R}_3) \right| = \left| (\underline{F} d\vec{R}_1, \underline{F} d\vec{R}_2, \underline{F} d\vec{R}_3) \right|. \quad (8.7)$$

Mešani produkt treh vektorjev je enak determinanti matrike, ki ima za stolpce komponente teh treh vektorjev. Potem je

$$(\underline{F} d\vec{R}_1, \underline{F} d\vec{R}_2, \underline{F} d\vec{R}_3) = \det \left[\underline{F} d\vec{R}_1, \underline{F} d\vec{R}_2, \underline{F} d\vec{R}_3 \right],$$

kjer smo z oglatim oklepajem označili matriko s stolpci $\underline{F} d\vec{R}_i$, $i = 1, 2, 3$. Po pravilu množenja matrike z matriko je i -ti stolpec produkta dveh matrik enak produktu prve matrike z i -tim stolpcem druge matrike. Tako je

$$\left[\underline{F} d\vec{R}_1, \underline{F} d\vec{R}_2, \underline{F} d\vec{R}_3 \right] = \underline{F} \left[d\vec{R}_1, d\vec{R}_2, d\vec{R}_3 \right].$$

Sedaj upoštevamo, da je determinanta produkta dveh matrik enaka produktu njunih determinant. Potem je

$$\left| (\underline{F} d\vec{R}_1, \underline{F} d\vec{R}_2, \underline{F} d\vec{R}_3) \right| = \left| \det \underline{F} \det \left[d\vec{R}_1, d\vec{R}_2, d\vec{R}_3 \right] \right| = |\det \underline{F}| \Delta V.$$

Upoštevajmo ta izračun v (8.7). Tako dobimo

$$\Delta v = |\det \underline{F}| \Delta V = \left| \det(\underline{i} + \text{Grad } \vec{U}) \right| \Delta V. \quad (8.8)$$

Formula (8.8) velja za poljubno deformacijo. Omejimo se sedaj na majhne deformacije. Prvo zapišimo

$$\det(\underline{i} + \text{Grad } \vec{U}) = \begin{vmatrix} 1 + \partial U_1 / \partial X & \partial U_1 / \partial Y & \partial U_1 / \partial Z \\ \partial U_2 / \partial X & 1 + \partial U_2 / \partial Y & \partial U_2 / \partial Z \\ \partial U_3 / \partial X & \partial U_3 / \partial Y & 1 + \partial U_3 / \partial Z \end{vmatrix}$$

Determinanto izračunamo kot vsoto produktov z ustreznim predznakom tako, da iz vsake vrstice in stolpca vzamemo po en element. Potem je za majhne deformacije

$$\det(\underline{\underline{i}} + \text{Grad } \vec{U}) \approx 1 + \partial U_1 / \partial X + \partial U_2 / \partial Y + \partial U_3 / \partial Z,$$

kjer smo zanemarili člene, ki so enaki produktu dveh ali treh členov s parcialnimi odvodi komponent U_i po X, Y ali Z . Upoštevajmo to v (8.8)

$$\Delta v \approx |1 + \partial U_1 / \partial X + \partial U_2 / \partial Y + \partial U_3 / \partial Z| \Delta V = |1 + \text{sl } \underline{\underline{E}}| \Delta V = (1 + \text{sl } \underline{\underline{E}}) \Delta V.$$

V zadnji enakosti smo upoštevali, da je deformacija majhna in je zato $1 + \text{sl } \underline{\underline{E}} > 0$. Potem je za majhne deformacije relativna sprememba volumna enaka

$$\frac{\Delta v - \Delta V}{\Delta V} = \text{sl } \underline{\underline{E}}.$$

8.3 Infinitesimalen deformacijski tenzor

Deformacijski tenzor je dan z izrazom $\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{i}})$, kjer je $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{i}} + \text{Grad } \vec{U}$. Potem je

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \left((\underline{\underline{i}} + \text{Grad } \vec{U})^T (\underline{\underline{i}} + \text{Grad } \vec{U}) - \underline{\underline{i}} \right) = \frac{1}{2} \left(\text{Grad } \vec{U} + (\text{Grad } \vec{U})^T + (\text{Grad } \vec{U})^T \text{Grad } \vec{U} \right).$$

Vidimo, da je $\underline{\underline{E}}$ nelinearno odvisen od pomika \vec{U} . Pri velikih deformacijah moramo upoštevati nelinearni člen $(\text{Grad } \vec{U})^T \text{Grad } \vec{U}$. Pri majhnih deformacijah pa lahko ta nelinearni člen zanemarimo. Tenzorju brez tega člena pravimo *infinitesimalni deformacijski tenzor*

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2} \left(\text{Grad } \vec{U} + (\text{Grad } \vec{U})^T \right).$$

Marični zapis infinitesimalnega deformacijskega tenzorja je

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial X} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial Y} + \frac{\partial U_2}{\partial X} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial Z} + \frac{\partial U_3}{\partial X} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial Y} + \frac{\partial U_2}{\partial X} \right) & \frac{\partial U_2}{\partial Y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_2}{\partial Z} + \frac{\partial U_3}{\partial Y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial Z} + \frac{\partial U_3}{\partial X} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_2}{\partial Z} + \frac{\partial U_3}{\partial Y} \right) & \frac{\partial U_3}{\partial Y} \end{bmatrix}.$$

Razložiti moramo še, kaj sploh je majhna deformacija. Pogoji, da je deformacija majhna ni enak pogoju, da je pomik majhen. Pomik je lahko velik, deformacija pa je še vedno lahko majhna. Nenazadnje, če je pomik togi, je deformacija enaka nič ne glede kako velik je togi pomik. Prav tako majhen pomik, ko govorimo o majhnem pomiku mislimo na to, da je kvocient velikosti pomika z dimenzijo telesa majhen, ne zagotavlja majhne deformacije. Spomnimo se samo na funkcijo $\sin nx$. Očitno je vedno $|\sin nx| \leq 1$, njen odvod pa je lahko zelo velik za velik n . Majhna deformacija je torej deformacija za katero je gradient pomika $\text{Grad } \vec{U}$ majhen. To pomeni, da so v komponentnem zapisu parcialni odvodi komponent pomika majhni. Če primerjamo deformacijski tenzor in infinitesimalni deformacijski tenzor je

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{\epsilon}} + \frac{1}{2} (\text{Grad } \vec{U})^T \text{Grad } \vec{U}.$$

Pri majhnih deformacijah sta oba tenzorja majha. Razlika je v tem, da smo pri infinitesimalnem deformacijskem tenzorju zanemarili produkt dveh majhnih količin, to je člen $(\text{Grad } \vec{U})^T \text{Grad } \vec{U}$. Člene, ki so enaki produktu dveh majhnih količin imenujemo majhne količine drugega reda. Podobno imenujemo majhne količine višjih redov. Iz znanega deformacijskega tenzorja infinitesimalni deformacijski tenzor dobimo tako, da zanemarimo vse majhne količine drugega ali višjega reda.

Vektor pomika \vec{U} smo definirali na referenčnem položaju. Definicijo $\vec{U}(P)$ lahko prenesemo na prostorski položaj. Naj točki p prostorskega položaja pripada referenčni položaj P . Definirajmo $\vec{u}(p) = \vec{U}(P)$ oziroma $\vec{u}(\vec{r}) = \vec{U}(\vec{R})$, kjer sta \vec{R} in \vec{r} krajevna vektorja do P in p . Upoštevajmo, da je $\vec{r} = \vec{R} + \vec{U}(\vec{R})$. Potem je

$$\left| \vec{U}(\vec{r}) - \vec{U}(\vec{R}) \right| = \left| \vec{U}(\vec{R} + \vec{U}) - \vec{U}(\vec{R}) \right| = O((\text{Grad } \vec{U})\vec{U}).$$

Tu smo s simbolom veliki O označili velikostni red argumenta simbola O . Če je deformacija majhna, se $\vec{U}(\vec{r})$ in $\vec{U}(\vec{R}) = \vec{u}(\vec{r})$ malo razlikujeta. Potemtakem je pri majhnih deformacijah funkcija pomika na prostorskem položaju kar enaka funkciji pomika na referenčnem položaju. Velja torej

$$\vec{u}(\vec{r}) = \vec{U}(\vec{r}).$$

V nadaljevanju se bomo omejili na majhne deformacije in bomo tam, kjer ne bo nevarnosti za zmedo infinitezimalni deformacijski tenzor na kratko imenovali kar deformacijski tenzor. Pomen komponent infinitezimalnega deformacijskega tenzorja je enak pomenu komponent deformacijskega tenzorja. Relativna sprememba dolžin v smeri enotskega vektorja \vec{e} je tako enaka

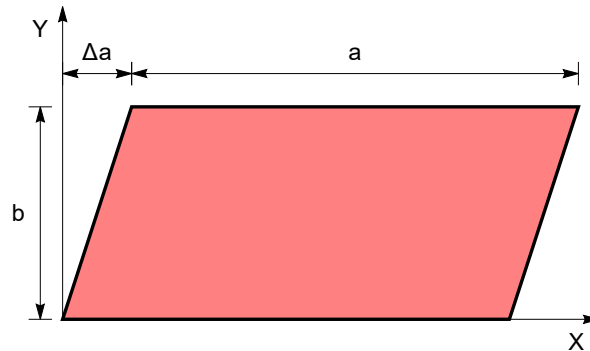
$$\epsilon_1 = \vec{e} \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \vec{e}. \quad (8.9)$$

Za matriko infinitezimalnega deformacijskega tenzorja bomo tudi uporabljali zapis

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \gamma_{12}/2 & \gamma_{13}/2 \\ \gamma_{12}/2 & \epsilon_{22} & \gamma_{23}/2 \\ \gamma_{13}/2 & \gamma_{23}/2 & \epsilon_{33} \end{bmatrix}.$$

8.4 Primer

Pravokotnik dimenzija $a \times b$ se deformira v romboid tako kot kaže slika 8.1. Privzeli bomo, da je deformacija majhna, da je $\Delta a/b$ majhna količina. Na sliki zaradi boljše predstave deformacija ni majhna. Naša naloga je poiskati deformacijski tenzor. Nalogo bomo rešili na dva načina.



Slika 8.1: Strižna deformacija pravokotnika.

- Prvi bo geometrijski, kjer bomo upoštevali pomen komponent deformacijskega tenzorja za majhne deformacije. Postavimo koordinatni sistem z osema X in Y v smeri stranic pravokotnika, os Z pa pravokotno na ravnino XY . V smeri Z ni deformacije, zato so komponente E_{13} , E_{23} in E_{33} deformacijskega tenzorja enake nič. Komponenta E_{11} je enaka relativni spremembi v smeri osi X . Kot vidimo na sliki se dolžina X stranice ne spremeni, zato je

$E_{11} = 0$. Določimo sedaj E_{22} . Stranica z dolžino b se deformira v stranico romboida z dolžino $\sqrt{b^2 + (\Delta a)^2}$. Potem je

$$E_{22} = \frac{\sqrt{b^2 + (\Delta a)^2}}{b} - 1 = \sqrt{1 + (\Delta a/b)^2} - 1. \quad (8.10)$$

Sedaj upoštevamo, da je

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x \quad \text{za} \quad |x| \ll 1. \quad (8.11)$$

Ta ocena sledi iz enakosti

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{df}{dx}(\xi)h, \quad \xi \in (x_0, x_0 + h)$$

za funkcijo $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$ in $h = x$. Potem lahko (8.10) zapišemo v obliki

$$E_{22} = \sqrt{1 + (\Delta a/b)^2} - 1 = \frac{1}{2}(\Delta a/b)^2.$$

Določiti moramo še izvendiagonalni element E_{12} . Pri majhnih deformacijah je enak polovični spremembi kota med osema X in Y . Iz slike vidimo, da je

$$\tan \Delta\varphi = \frac{\Delta a}{b}.$$

Za majhne kote je $\tan \Delta\varphi \approx \sin \Delta\varphi \approx \Delta\varphi$. Potem je

$$E_{12} = \frac{1}{2} \frac{\Delta a}{b}.$$

Deformacijski tenzor je potemtakem enak

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\Delta a/b & 0 \\ \frac{1}{2}\Delta a/b & \frac{1}{2}(\Delta a/b)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Infinitezimalni deformacijski tenzor pa je

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\Delta a/b & 0 \\ \frac{1}{2}\Delta a/b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dobili smo ga iz $\underline{\underline{E}}$ tako, da smo zanemarili majhne količine drugega reda.

- Deformacijski tenzor bomo določili preko funkcije pomika. Iz slike vidimo, da se daljice pravokotnika, ki so vzporedne osi X pomaknejo v desno. Pomik narašča linearno z Y . Na začetku je enak nič, na vrhu pa Δa . Funkcija pomika je torej

$$\vec{U} = \frac{\Delta a}{b} Y \vec{i}.$$

Velja torej $U_1 = \frac{\Delta a}{b} Y$ in $U_2 = U_3 = 0$. Matrika gradient pomika je po (8.3) sestavljena iz parcialnih odvodov. Edini neničelni parcialni odvod je

$$\frac{\partial U_1}{\partial Y} = \frac{\Delta a}{b}.$$

Potem je

$$\text{Grad } \vec{U} = \begin{bmatrix} 0 & \Delta a/b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vidimo, da je gradient pomika konstanten oziroma neodvisen od položaja. Deformaciji za katero je gradient pomika konstanten pravimo *homogena deformacija*.

Infinitezimalni deformacijski tenzor je

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2} \left(\text{Grad } \vec{U} + (\text{Grad } \vec{U})^T \right) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\Delta a/b & 0 \\ \frac{1}{2}\Delta a/b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

kar se seveda ujema z rešitvijo po prvi poti.

Po kratkem računu dobimo

$$(\text{Grad } \vec{U})^T \text{Grad } \vec{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\Delta a/b)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Potem je

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{\epsilon}} + \frac{1}{2} (\text{Grad } \vec{U})^T \text{Grad } \vec{U} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\Delta a/b & 0 \\ \frac{1}{2}\Delta a/b & \frac{1}{2}(\Delta a/b)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Deformacijski tenzor smo tako določili. Za primer njegove uporabe izračunajmo spremembo dolžine diagonale pravokotnika. Označimo z D dolžino diagonale v referenčnem položaju in z d v deformiranem. Iz slike hitro vidimo

$$D = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{in} \quad d = \sqrt{(a + \Delta a)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + 2a\Delta a + b^2 + (\Delta a)^2}.$$

Relativna sprememba dolžin je

$$\epsilon_1 = \frac{d}{D} - 1 = \sqrt{\frac{a^2 + 2a\Delta a + b^2 + (\Delta a)^2}{a^2 + b^2}} - 1 = \sqrt{1 + \frac{2a\Delta a + (\Delta a)^2}{a^2 + b^2}} - 1 \approx \frac{a\Delta a}{a^2 + b^2}.$$

V zadnjem koraku smo uporabili aproksimacijo (8.11).

Poglejmo še kakšna je relativna sprememba kvadratov dolžin

$$\epsilon_2 = \frac{d^2 - D^2}{D^2} = \frac{2a\Delta a + (\Delta a)^2}{a^2 + b^2}.$$

Ponovno vidimo, da je za majhne deformacije $\epsilon_2 \approx 2\epsilon_1$.

Sedaj izračunajmo relativno spremembo dolžine diagonale s pomočjo formul (8.5) in (8.6). Prvo moramo določiti enotski vektor v smeri diagonale pravokotnika. Ta je

$$\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (a\vec{i} + b\vec{j}) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ne pozabimo, vektor smeri mora biti normiran. Potem je

$$\begin{aligned} \epsilon_2 &= 2\vec{e} \cdot \underline{\underline{E}} \vec{e} = \frac{2}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\Delta a/b & 0 \\ \frac{1}{2}\Delta a/b & \frac{1}{2}(\Delta a/b)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta a \\ a\Delta a/b + (\Delta a)^2/b \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2a\Delta a + (\Delta a)^2}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Rezultat se ujema z izračunom po geometrijski poti.

Preverimo še izračun relativne spremembe dolžin. Sedaj je

$$\begin{aligned}\epsilon_1 = \vec{e} \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \vec{e} &= \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\Delta a/b & 0 \\ \frac{1}{2}\Delta a/b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\Delta a \\ \frac{1}{2}a\Delta a/b \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{a\Delta a}{a^2 + b^2},\end{aligned}$$

kar se tudi ujema z že izračunananim.

8.5 Osnovni načini deformacije

Podobno kot pri napetosti definiramo osnovna deformacijska stanja. Omejili se bomo na majhne deformacije in pripadajoči infinitezimalni deformacijski tenzor.

1. Enoosna deformacija. To deformacijo že poznamo. V koordinatnem sistemu, ki ima os X v smeri osi deformacije je pomik oblike $\vec{U} = U_1(X)\vec{i}$. Edini neničelni element matrike Grad \vec{U} je element $\partial U_1/\partial X = dU_1/dX$. Tu smo parcialni odvod zamenjali z navadnim odvodom, ker je U_1 funkcija samo spremenljivke X . Infinitezimalni deformacijski tenzor zapišemo z matriko

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

kjer je $\epsilon = \frac{dU_1}{dX}$. Deformacijski tenzor $\underline{\underline{E}}$ je enake oblike, edini neničelni element E_{11} pa je $E_{11} = \epsilon + \frac{1}{2}\epsilon^2$. Relativna sprememba dolžin v smeri $\vec{e} = e_1\vec{i} + e_2\vec{j} + e_3\vec{k}$ je po formuli (8.6) enaka ϵe_1^2 . Očitno je največja deformacija v smeri osi deformacije. V kateri smeri je največja sprememba kota bomo spoznali pri obravnavi ekstremalnih lastnosti deformacijskega tenzorja.

2. *Strižna deformacija.* Deformacija je strižna, če je sled deformacijskega tenzorja enaka nič. Ker je sled enaka nič, strižna deformacija ohranja volumen. Za primer si pogledjmo deformacijo, ki ji bazi \vec{i} , \vec{j} in \vec{k} pripada matrika

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Poglejmo kakšna matrika pripada tej deformaciji v koordinatnem sistemu, ki ima bazne vektorje $\vec{i}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$, $\vec{j}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i} + \vec{j})$ in $\vec{k}' = \vec{k}$. Matriko v novi bazi označimo z \mathbf{e}' , njene elemente pa z ϵ'_{ij} . Izračunajmo

$$\epsilon'_{11} = \vec{i}' \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \vec{i}' = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau \\ -\tau \\ 0 \end{bmatrix} = 0,$$

$$\epsilon'_{22} = \vec{j}' \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \vec{j}' = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\tau \\ -\tau \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

in

$$\epsilon'_{12} = \vec{i}' \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \vec{j}' = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\tau \\ -\tau \\ 0 \end{bmatrix} = -\tau$$

Ostale komponente so očitno enake nič. Iskana matrika je

$$\mathbf{e}' = - \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pri strižni deformaciji pride do spremembe kota med smerema \vec{i}' in \vec{j}' . Kot se poveča za 2τ .

3. *Enakomerna deformacija.* Deformacijski tenzor enakomerne deformacije je $\underline{\underline{\epsilon}} = \epsilon \underline{\underline{i}}$. Enakomerna deformacija povzroči relativno spremembo volumna $\epsilon \text{sl} \underline{\underline{i}} = 3\epsilon$. Relativne spremembe dolžin so v vse smeri enake. Pravimo, da je deformacija *izotropična*. Sprememb kotov ni. Naj bosta \vec{e} in \vec{f} dva enotska med seboj pravokotna vektorja. Sprememba kota pri deformaciji med smerema \vec{e} in \vec{f} je enaka

$$\Delta\varphi = 2\vec{e} \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \vec{f} = 2\epsilon \vec{e} \cdot \underline{\underline{i}} \vec{f} = 2\epsilon \vec{e} \cdot \vec{f} = 0,$$

saj sta vektorja med seboj pravokotna.

Poljubno deformacijo lahko zapišemo v obliki

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{3}(\text{sl} \underline{\underline{\epsilon}}) \underline{\underline{i}} + \left(\underline{\underline{\epsilon}} - \frac{1}{3}(\text{sl} \underline{\underline{\epsilon}}) \underline{\underline{i}} \right). \quad (8.12)$$

Prvi del je enakomerna deformacija, drugi pa je strižna deformacija, saj je njegova sled enaka

$$\text{sl} \left(\underline{\underline{\epsilon}} - \frac{1}{3}(\text{sl} \underline{\underline{\epsilon}}) \underline{\underline{i}} \right) = \text{sl} \underline{\underline{\epsilon}} - \frac{1}{3} \text{sl} \underline{\underline{\epsilon}} \text{sl} \underline{\underline{i}} = \text{sl} \underline{\underline{\epsilon}} - \text{sl} \underline{\underline{\epsilon}} = 0.$$

Tu smo upoštevali, da je sled tenzorja linearna preslkava, da velja $\text{sl}(\underline{\underline{a}} + \underline{\underline{b}}) = \text{sl} \underline{\underline{a}} + \text{sl} \underline{\underline{b}}$ in $\text{sl} \alpha \underline{\underline{a}} = \alpha \text{sl} \underline{\underline{a}}$. Tenzorju z ničelo sledjo pravimo *deviatorični tenzor*. Poljubni deformacijski tenzor lahko torej zapišemo kot vsoto enakomerne deformacije in strižne deformacije. Razcep (8.12) velja seveda za poljubni tenzor. Poljubni tenzor lahko torej zapišemo kot vsoto krogelnega in deviatoričnega tenzorja.

4. *Ravninska deformacija.* Deformacijsko stanje je ravninsko, če obstaja tak koordinatni sistem, da je pripadajoča matrika deformacijskega tenzorja oblike

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & 0 \\ e_{12} & e_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & \frac{1}{2}\gamma & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ravninsko deformacijsko stanje nastopi, ko je pomik ravninski in je samo odvisen od ravninskih koordinat. V nadaljevanju se bomo večinoma omejili na ravninske deformacije.

Relativna sprememba dolžin v smeri enotskega vektorja $\vec{e} = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}$ je po formuli (8.9) enaka

$$\begin{aligned} \epsilon &= \vec{e} \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \vec{e} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & 0 \\ e_{12} & e_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_{11} \cos \varphi + e_{12} \sin \varphi \\ e_{12} \cos \varphi + e_{22} \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= e_{11} \cos^2 \varphi + e_{12} \sin 2\varphi + e_{22} \sin^2 \varphi \\ &= \frac{1}{2}(e_{11} + e_{22}) + \frac{1}{2}(e_{11} - e_{22}) \cos 2\varphi + e_{12} \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

Če poznamo relativno spremembo dolžin v treh smereh, potem lahko s pomočjo zgornje formule določimo ravninski deformacijski tenzor.

8.6 Ravninska deformacija

Omejili se bomo na infinitezimalno deformacijo. Deformacijski tenzor ravninske deformacije lahko zapišemo z matriko dimenzije 2×2

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{12} & e_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & \frac{1}{2}\gamma_{12} \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} & \epsilon_2 \end{bmatrix}.$$

Prednost prve pisave je, da matrika \mathbf{e} po strukturi zapisa splošna simetrična matrika dimenzije 2×2 , prednost druge, inženirske pisave pa, da imajo elementi zapisa svoj neposredni deformacijski pomen.

8.6.1 Ekstremalne lastnosti ravninskega deformacijskega tenzorja

Pri obravnavi ekstremalnih lastnosti bomo raje uporabili splošni zapis. Zanima nas v kateri smeri $\vec{e} = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}$ je relativna sprememba dolžin največja. S formulo, zanima nas v kateri smeri ima forma

$$\epsilon = \epsilon(\vec{e}) = \vec{e} \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \vec{e}$$

ekstremalne vrednosti.

Obliko te forme že poznamo, ko smo obravnavali ekstremalne lastnosti napetostnega tenzorja. Tam je vlogo vektorja smeri \vec{e} imela normala na ravnino preseka, namesto deformacijskega tenzorja je nastopal napetostni tenzor, zanimala pa nas je smer ekstremalne normalne napetosti. Vse kar moramo narediti pri iskanju ekstremalne relativne spremembe dolžin je, da uporabimo rezultate ekstremalnih lastnosti napetostnega tenzorja in tam dobljene rezultate ustrezno prevedemo na deformacijo. Potemtakem velja:

- V smeri $\vec{e} = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}$ je relativna sprememba dolžine enaka

$$\epsilon = \frac{1}{2}(e_{11} + e_{22}) + \frac{1}{2}(e_{11} - e_{22}) \cos 2\varphi + e_{12} \sin 2\varphi. \quad (8.13)$$

- Maksimalna relativna sprememba dolžine je

$$\epsilon_{\max} = \frac{1}{2} \left(e_{11} + e_{22} + \sqrt{(e_{11} - e_{22})^2 + 4e_{12}^2} \right)$$

in nastopi v smeri $\vec{e} = \cos \varphi_{\max} \vec{i} + \sin \varphi_{\max} \vec{j}$, kjer je

$$\varphi_{\max} = \frac{1}{2} \arctan \frac{2e_{12}}{e_{11} - e_{22}} + \begin{cases} 0 & e_{11} \geq e_{22} \\ \pi/2 & e_{11} < e_{22}. \end{cases} \quad (8.14)$$

Tu so e_{ij} komponente deformacijskega tenzorja $\underline{\underline{\epsilon}}$ v bazi \vec{i}, \vec{j} .

- Minimalna relativna sprememba dolžine je

$$\epsilon_{\min} = \frac{1}{2} \left(e_{11} + e_{22} - \sqrt{(e_{11} - e_{22})^2 + 4e_{12}^2} \right).$$

Minimalna relativna sprememba dolžine nastopi v smeri $\varphi_{\min} = \varphi_{\max} + \frac{1}{2}\pi$.

Poglejmo še, kako je z ekstremalno spremembo kotov. Vemo, da izvendiagonalni element matričnega zapisa deformacijskega tenzorja predstavlja polovico spremembe kota med koordinatnima osema v smeri \vec{i} in \vec{j} . Prav tako poznamo pomen izvendiagonalnega elementa napetostnega tenzorja ravninskega napetostnega stanja, je natanko komponenta strižne napetosti. Potemtakem velja:

- Sprememba kota med pravokotnima vektorjema $\vec{e} = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}$ in $\vec{f} = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}$ je enaka

$$\gamma = -(e_{11} - e_{22}) \sin 2\varphi + 2e_{12} \cos 2\varphi.$$

- Maksimalna sprememba kota je

$$\gamma_{\max} = \sqrt{(e_{11} - e_{22})^2 + 4e_{12}^2} = \epsilon_{\max} - \epsilon_{\min},$$

minimalna pa

$$\gamma_{\min} = -\sqrt{(e_{11} - e_{22})^2 + 4e_{12}^2}.$$

- Smeri ekstremalne spremembe kota oklepata kot $\pi/4$ s smerema ekstremalne spremembe relativnih dolžin.
- Ugotoviti moramo še, v kateri smeri je sprememba največja in v kateri najmanjša. Če zapišemo $\varphi = \theta - \pi/4$ potem je

$$\gamma = (e_{11} - e_{22}) \sin 2\theta + 2e_{12} \cos 2\theta.$$

Dobili smo izraz, ki je enak bistvenemu delu v (8.13). Maksimum je torej dosežen pri θ_{\max} , ki je dan z (8.14). Potemtakem nastopi maksimalna sprememba kota pri

$$\varphi_{\max} = \theta_{\max} - \pi/4 = \frac{1}{2} \left(\arctan \frac{2e_{12}}{e_{11} - e_{22}} - \frac{\pi}{2} \right) + \begin{cases} 0 & e_{11} \geq e_{22} \\ \pi/2 & e_{11} < e_{22}. \end{cases} \quad (8.15)$$

Dobljeno formulo lahko še preoblikujemo. Vemo, da je

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}.$$

Potem je $\alpha - \beta = \pi/2$, če je $\tan \beta = -1/\tan \alpha$ oziroma $\beta = -\arctan(1/\tan \alpha) + k\pi$, kjer lahko k omejimo na $k \in \{-1, 0\}$. Potem je $\alpha - \pi/2 = -\arctan(1/\tan \alpha) + k\pi$. V našem primeru, ko je

$$\alpha = \arctan \frac{2e_{12}}{e_{11} - e_{22}}$$

sledi

$$\arctan \frac{2e_{12}}{e_{11} - e_{22}} - \frac{\pi}{2} = -\arctan \left(\tan \left(\arctan \frac{2e_{12}}{e_{11} - e_{22}} \right) \right)^{-1} + k\pi = \arctan \frac{e_{22} - e_{11}}{2e_{12}} + k\pi.$$

Določiti moramo še $k \in \mathbb{N}$. Če imata e_{12} in $e_{11} - e_{22}$ enak predznak, leži leva stran zgornje enakosti na intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, 0)$. Desna stran leži na tem intervalu za $k = 0$. Če imata različni predznaki, leži leva stran na intervalu $(-\pi, -\frac{1}{2}\pi)$. Za enakost mora potem veljati $k = -1$. Primer $e_{12} = 0$ obravnavamo posebej. Če je $e_{12} = 0$ in $e_{22} > e_{11}$, je $k = -1$, pri $e_{22} < e_{11}$ pa $k = 0$. Tako lahko (8.15) prepišemo v

$$\varphi_{\max} = \frac{1}{2} \arctan \frac{e_{22} - e_{11}}{2e_{12}} + \frac{\pi}{2} \begin{cases} 0; & e_{11} \geq e_{22} \\ 1; & e_{11} < e_{22} \end{cases} - \frac{\pi}{2} \begin{cases} 0; & 2e_{12}/(e_{11} - e_{22}) > 0 \\ 0; & e_{12} = 0 \text{ in } e_{11} > e_{22} \\ 1; & 2e_{12}/(e_{11} - e_{22}) \leq 0 \\ 1; & e_{12} = 0 \text{ in } e_{11} < e_{22} \end{cases}. \quad (8.16)$$

Minimalna sprememba nastopi v smeri

$$\varphi_{\min} = \varphi_{\max} + \frac{\pi}{2}.$$

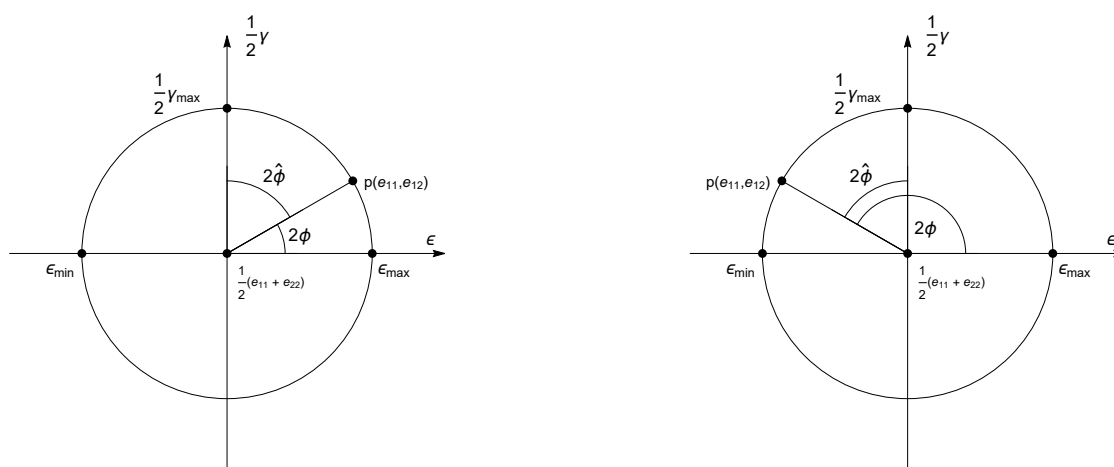
Podobno kot smo ekstremalne lastnosti napetostnega tenzorja upodobili z Mohrovo krožnico, ekstremalne lastnosti deformacije upodobimo z Mohrovo krožnico. Poglejmo to na primeru.

Primer

Naredili bomo primere za vse možnosti, ki nastopajo v (8.16). Začnimo s primerom $e_{11} > e_{22}$ in $e_{12} > 0$. Naj bo

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}\epsilon_0 \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix},$$

kjer je ϵ_0 pozitivna konstanta, ki zagotavlja, da matrika \mathbf{e} res pripada infinitezimalno majhni deformaciji. Ker je sled deformacijskega tenzorja enaka nč je to strižna deformacija. Po formulah za ekstremalno relativno spremembo relativnih dolžin hitro dobimo $\epsilon_{min} = -1$ in $\epsilon_{max} = 1$. Smer maksimalne deformacije je $\varphi_{max} = \pi/12$, smer maksimalne spremembe kota pa $\hat{\varphi}_{max} = -\pi/6$. Mohrova krožnica za ta primer je leva slika na sliki 8.2. Pozitivni predznak kota pomeni, da maksimalno smer iščemo v smeri urinega kazalca, negativni pa v obratni smeri.



Slika 8.2: Mohrove krožnice, primer $e_{12} > 0$. Levo $e_{11} > e_{22}$, desno $e_{11} < e_{22}$.

Naslednji je primer $e_{11} < e_{22}$ in $e_{12} > 0$, kjer je

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}\epsilon_0 \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Ekstremalne vrednosti so enake, smeri pa sta $\varphi_{max} = 5\pi/12$ in $\hat{\varphi}_{max} = \pi/6$. Vidimo, da sta sedaj oba kota pozitivna.

Poglejmo še primera z negativnim izvendiagonalnim elementom, glej sliko 8.3.

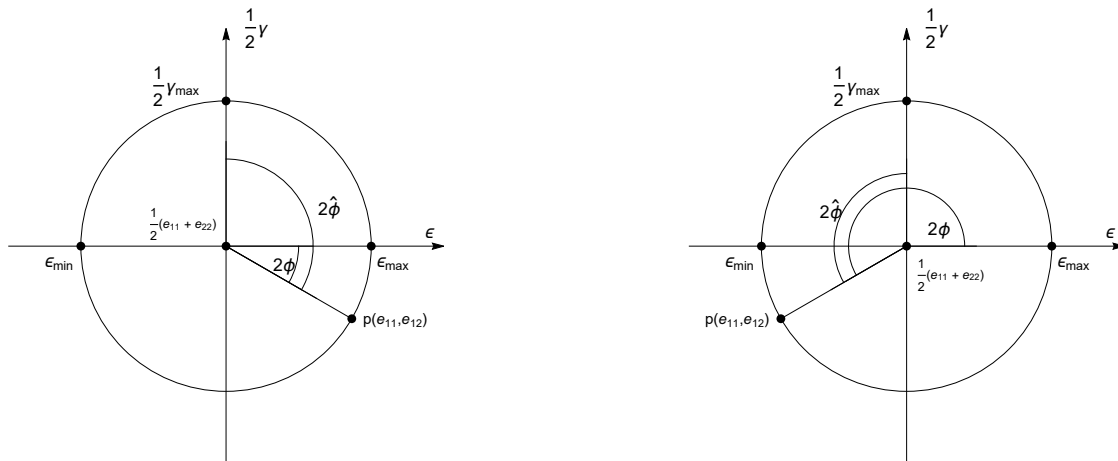
$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}\epsilon_0 \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ -1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e} = \frac{1}{2}\epsilon_0 \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & -1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Za $e_{11} > e_{22}$ sta kota $\varphi_{max} = -\pi/12$ in $\hat{\varphi}_{max} = -\pi/3$. V primeru $e_{11} < e_{22}$ pa je $\varphi_{max} = 7\pi/12$ in $\hat{\varphi}_{max} = \pi/3$.

8.7 Vprašanja in naloge

8.7.1 Vprašanja

1. Izračunaj parcialne odvode funkcije $f(X, Y, Z) = XY^2 \sin Z$.



Slika 8.3: Mohrove krožnice, primer $e_{12} < 0$. Levo $e_{11} > e_{22}$, desno $e_{11} < e_{22}$.

- Za funkcijo $f(x, y) = (x + y)^3$ izračunaj druge odvode $\partial^2 f / \partial x^2$, $\partial^2 f / \partial x \partial y$ in $\partial^2 f / \partial y^2$.
- Naj bo \mathbf{a} matrika reda 2×2 . Z računom pokaži, da je $\vec{a} \cdot \mathbf{a} \vec{b} = \mathbf{a}^T \vec{a} \cdot \vec{b}$ za poljubna vektorja \vec{a} in \vec{b} .
- Pokaži, da res velja $\text{sl}(\alpha \underline{\underline{a}} + \beta \underline{\underline{b}}) = \alpha \text{sl} \underline{\underline{a}} + \beta \text{sl} \underline{\underline{b}}$.
- Opiši deformacijo, ki ima deformacijski tenzor

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Za strižno deformacijo pravokotnika $a \times b$, kjer je $a = 3$ cm, $b = 2$ cm in $\Delta a = 1$ mm izračunaj razliko med dejansko relativno spremembo dolžine diagonale in spremembo, ki jo dobimo z uporabo deformacijskega tenzorja.

8.7.2 Naloge

- Ravninska deformacija deformira pravokotnik s stranicama $a = 1$ cm in $b = 2$ cm v romboid s stranicama 1.02 cm in 1.97 cm in vmesnim kotom med stranicama 89.7° .
 - Zapiši deformacijski tenzor.
 - Določi osno deformacijo diagonale pravokotnika.

Rešitev:

- Infinitezimalni deformacijski tenzor bomo določili v koordinatnem sistemu, ki ima osi v smereh pravokotnika. Diagonalna elementa sta enaka relativni spremembi dolžin stranic pravokotnika, izvendiagonalni pa spremembi kota. Deformacija stranice v smeri osi x je

$$\epsilon_1 = \frac{\Delta l_1}{l_1} = \frac{0.02}{1} = 0.02.$$

Deformacija v smeri osi y pa je

$$\epsilon_2 = \frac{\Delta l_2}{l_2} = \frac{-0.03}{2} = -0.015.$$

Sprememba kota je $\Delta\varphi = 90^\circ - 89.7^\circ = 0.3^\circ$. Vrednost v stopinjah moramo pretvoriti v radiane. Ker se je kot zmanjšal, je $\gamma > 0$. Potem je

$$\gamma = 0.3 \frac{\pi}{180} \approx 0.005.$$

Infinitezimalni deformacijski tenzor je enak

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \mathbf{e} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & \frac{1}{2}\gamma \\ \frac{1}{2}\gamma & \epsilon_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.02 & 0.0025 \\ 0.0025 & -0.015 \end{bmatrix} = 10^{-2} \begin{bmatrix} 2 & 1/4 \\ 1/4 & -3/2 \end{bmatrix}$$

- (b) Enotski vektor v smeri diagonale je $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{i} + 2\vec{j})$. Relativna sprememba v smeri diagonale je potem

$$\begin{aligned} \epsilon_d &= \vec{e} \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \vec{e} = \frac{1}{5} 10^{-2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1/4 \\ 1/4 & -3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{5} 10^{-2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/2 \\ -11/4 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} 10^{-2} \left(-\frac{6}{2} \right) = -0.6 \times 10^{-2}. \end{aligned}$$

2. Ravninska deformacija deformira pravokotni trikotnik z dolžinama stranic a in b v smeri koordinatnih osi v trikotnik z oglišči v točkah $A = (x_0, y_0)$, $B = (x_0 + a_{11}, y_0 + a_{12})$ in $C = (x_0 + a_{21}, y_0 + a_{22})$. Tu so a_{ij} dane konstante.

- (a) Določi deformacijski tenzor na geometrijski način.
 (b) Določi pogoje na a_{ij} , da bo deformacija res majhna.
 (c) Zapiši gradient deformacije in izračunaj deformacijski tenzor.

Rešitev:

- (a) Koordinatni sistem postavimo v smereh katet trikotnika. Kateta v smeri osi x se preslika v stranico AB . Njena dolžina je $|AB| = \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}$. Potem je

$$\epsilon_1 = \frac{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}}{a} - 1.$$

Kateta v smeri osi y se preslika v stranico AC . Njena dolžina je $|AC| = \sqrt{a_{21}^2 + a_{22}^2}$. Potem je

$$\epsilon_2 = \frac{\sqrt{a_{21}^2 + a_{22}^2}}{b} - 1.$$

Določiti moramo še izvendiagonalni element, ki ga določa sprememba kota. Pravi kot se deformira v kot $\varphi = \angle CAB$ z vrhom v A . Po kosinusnem izreku je

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB||AC|\cos\varphi.$$

Od tod potem

$$(a_{21} - a_{11})^2 + (a_{22} - a_{12})^2 = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2 - 2\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}\sqrt{a_{21}^2 + a_{22}^2}\cos\varphi$$

in po krajšem računu

$$\cos\varphi = \frac{a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}\sqrt{a_{21}^2 + a_{22}^2}}.$$

Ker je $\Delta\varphi = \frac{1}{2}\pi - \varphi$, je $\cos\varphi = \sin\Delta\varphi \approx \Delta\varphi$. Pri pogoju, da je deformacija majhna, je infinitezimalni deformacijski tenzor enak

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}}{a} - 1 & \frac{1}{2} \frac{a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}\sqrt{a_{21}^2 + a_{22}^2}} \\ & \frac{\sqrt{a_{21}^2 + a_{22}^2}}{b} - 1 \end{bmatrix}.$$

Tu smo zaradi zapisali samo zgornji trikotni del simetrične matrike.

- (b) Sedaj moramo določiti pogoje na koeficiente a_{ij} , da je deformacija res majhna. Da bo pisava lažja, bomo predpostavili, da so vsi koeficienti pozitivni. Prepišimo $\cos\varphi$ v

$$\cos\varphi = \frac{a_{21}/a_{22} + a_{12}/a_{11}}{\sqrt{1 + (a_{12}/a_{11})^2}\sqrt{1 + (a_{21}/a_{22})^2}}.$$

Izraz je majhne, če je $|a_{12}/a_{11}| \ll 1$ in $|a_{21}/a_{22}| \ll 1$. Potem je

$$\cos\varphi \approx (a_{21}/a_{22} + a_{12}/a_{11}).$$

Nadalje je

$$\epsilon_1 = \frac{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}}{a} - 1 \approx \frac{|a_{11}|}{a} - 1.$$

Veljati mora torej $|a_{11}| \approx a$. Podobno dobimo pogoj $|a_{22}| \approx b$. Konstanti a_{11} in a_{22} sta torej pozitivni. Za majhne deformacije je tako

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} a_{11}/a - 1 & \frac{1}{2}(a_{21}/a_{22} + a_{12}/a_{11}) \\ & a_{22}/b - 1 \end{bmatrix}.$$

- (c) Prvo moramo poiskati funkcijo pomika. Vsa oglišča trikotnika so pomaknjena za $\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$. Potem je

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \begin{bmatrix} a_{11}/a & a_{21}/b \\ a_{12}/a & a_{22}/b \end{bmatrix} \vec{R}.$$

Vektor pomika je dan z enačbo $\vec{r} = \vec{R} + \vec{U}$. Tako dobimo

$$\vec{U}(X, Y) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11}/a - 1 & a_{21}/b \\ a_{12}/a & a_{22}/b - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}.$$

Gradinet pomika je

$$\text{Grad } \vec{U} = \begin{bmatrix} a_{11}/a - 1 & a_{21}/b \\ a_{12}/a & a_{22}/b - 1 \end{bmatrix}.$$

Deformacijski tenzor pa je

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\epsilon}} &= \frac{1}{2} (\text{Grad } \vec{U} + (\text{Grad } \vec{U})^T) = \begin{bmatrix} a_{11}/a - 1 & \frac{1}{2}(a_{21}/b + a_{12}/a) \\ & a_{22}/b - 1 \end{bmatrix} \\ &\approx \begin{bmatrix} a_{11}/a - 1 & \frac{1}{2}(a_{21}/a_{22} + a_{12}/a_{11}) \\ & a_{22}/b - 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3. Z ekstenziometrom smo izmerili osne deformacije $3 \cdot 10^{-3}$, $\sqrt{3} \cdot 10^{-3}$ in $-\sqrt{3} \cdot 10^{-3}$ v smereh, ki oklepajo kot $2\pi/3$. Določi deformacijski tenzor.

Rešitev: Uporabili bomo formulo s predavanj

$$\epsilon_\varphi = \frac{1}{2}(e_{11} + e_{22}) + \frac{1}{2}(e_{11} - e_{22}) \cos 2\varphi + e_{12} \sin 2\varphi$$

za kote $\varphi = 0, 2\pi/3$ in $4\pi/3$. Potem je $2\varphi = 0, 4\pi/3, 8\pi/3 = 2\pi/3$. Upoštevajmo, da je $\cos 4\pi/3 = \cos 8\pi/3 = -\frac{1}{2}$ in $\sin 4\pi/3 = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ in $\sin 8\pi/3 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Tako dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} 3 \cdot 10^{-3} &= e_{11} \\ \sqrt{3} \cdot 10^{-3} &= \frac{1}{2}(e_{11} + e_{22}) - \frac{1}{4}(e_{11} - e_{22}) - e_{12} \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \cdot 10^{-3} &= \frac{1}{2}(e_{11} + e_{22}) - \frac{1}{4}(e_{11} - e_{22}) + e_{12} \frac{1}{2}\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Iz prve enačbe sledi $e_{11} = 3 \cdot 10^{-3}$. Če seštejemo drugo in tretjo enačbo dobimo $0 = \frac{1}{2}e_{11} + \frac{3}{2}e_{22}$ in potem $e_{22} = -\frac{1}{3}e_{11} = -10^{-3}$. Odštejmo od tretje enačbe drugo. Dobimo $\sqrt{3}e_{12} = -2\sqrt{3} \cdot 10^{-3}$ in $e_{12} = -2 \cdot 10^{-3}$. Matrika infinitezimalnega tenzorja je tako

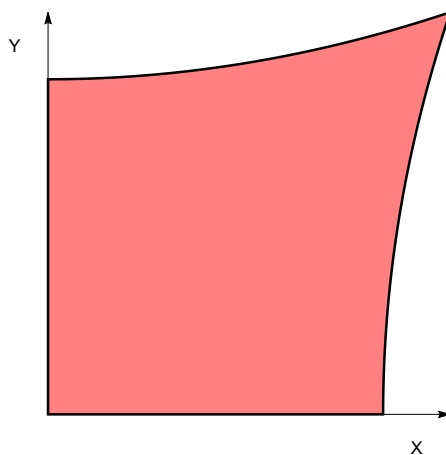
$$\underline{\underline{\epsilon}} = \mathbf{e} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

4. Podana je funkcija pomika $\vec{U} = \alpha(XY^2\vec{i} + X^2Y\vec{j})$.

- Skiciraj, kam se preslika kvadrat $[0, a] \times [0, a]$.
- Izračunaj infinitezimalni deformacijski tenzor.
- Izračunaj deformacijski tenzor in ugotovi kdaj je deformacija majhna.

Rešitev:

- Izberimo $a = 1$ in $\alpha = 1/5$ Sliko narišemo tako, da narišemo stranice deformiranega lika.



Slika 8.4: Skiciraj deformirani kvadrat $a = 1$ in $\alpha = 1/5$.

(b) Gradient pomika je

$$\text{Grad } \vec{U} = \begin{bmatrix} \partial U_1 / \partial X & \partial U_1 / \partial Y \\ \partial U_2 / \partial X & \partial U_2 / \partial Y \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} Y^2 & 2XY \\ 2XY & X^2 \end{bmatrix}.$$

Potem je

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \mathbf{e} = \alpha \begin{bmatrix} Y^2 & 2XY \\ 2XY & X^2 \end{bmatrix}.$$

Ker je deformacija odvisna od položaja, deformacija ni homogena.

(c) Deformacijski tenzor je

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{\epsilon}} + \frac{1}{2}(\text{Grad } \vec{U})^T \text{Grad } \vec{U}.$$

Izračunajmo posebej

$$(\text{Grad } \vec{U})^T \text{Grad } \vec{U} = \alpha^2 \begin{bmatrix} Y^2 & 2XY \\ 2XY & X^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y^2 & 2XY \\ 2XY & X^2 \end{bmatrix} = \alpha^2 \begin{bmatrix} Y^4 + 4X^2Y^2 & 2(XY^3 + X^3Y) \\ 2(XY^3 + X^3Y) & X^4 + 4X^2Y^2 \end{bmatrix}.$$

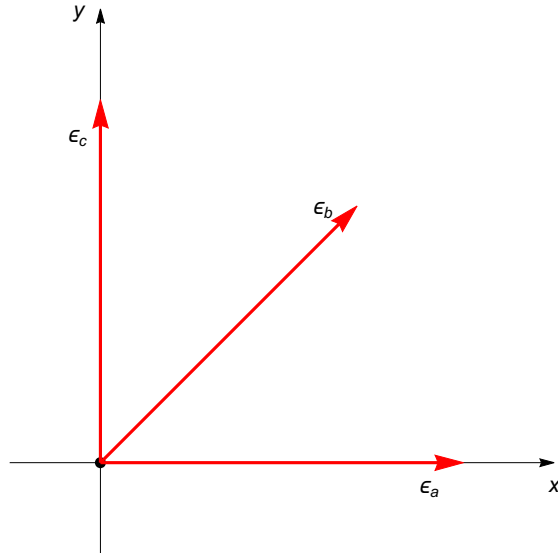
Deformacija je majhna, če so komponente tenzorja $\text{Grad } \vec{U}$. To dosežemo, če je α majhen in $|X| \leq 1$ in $|Y| \leq 1$.

5. V treh smereh, ki oklepajo medsebojni kot $\pi/4$ so znane osne deformacije $\epsilon_a = \epsilon_0$, $\epsilon_b = -\frac{3}{2}\epsilon_0$ in $\epsilon_c = 2\epsilon_0$, kjer je $\epsilon_0 = 10^{-3}$.

- Določi deformacijski tenzor.
- Skiciraj Mohrovo krožnico in določi ekstremalne vrednosti in smeri deformacije.

Rešitev:

- Koordinatni sistem z osema x in y postavimo v smereh deformacije ϵ_a in ϵ_c , glej skico. V tem koordinatnem sistemu pripada deformacijskemu tenzorju matrika



$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \epsilon_a & e_{12} \\ e_{12} & \epsilon_c \end{bmatrix} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} 1 & x \\ x & 2 \end{bmatrix}.$$

Določiti moramo še komponento $e_{12} = \epsilon_0 x$. Vemo, da je v smeri

$$\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j}),$$

ki oklepa kot $\varphi = \pi/4$ s smerjo x

$$\epsilon_b = \vec{e} \cdot \mathbf{e} \vec{e} = \frac{1}{2}(e_{11} + e_{22}) + \frac{1}{2}(e_{11} - e_{22}) \cos 2\varphi + e_{12} \sin 2\varphi.$$

Vstavimo v formulo naše podatke. Potem je

$$-\frac{3}{2}\epsilon_0 = \frac{3}{2}\epsilon_0 - \frac{1}{2}\epsilon_0 \cos \frac{1}{2}\pi + x\epsilon_0 \sin \frac{1}{2}\pi = \frac{3}{2}\epsilon_0 + x\epsilon_0.$$

Potem je $x = -3$ in

$$\mathbf{e} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Po formuli sta ekstremalni osni deformaciji enaki

$$\epsilon_{\text{ext}} = \frac{1}{2} \left(e_{11} + e_{22} \pm \sqrt{(e_{11} - e_{22})^2 + 4e_{12}^2} \right).$$

Izračunajmo prvo

$$\sqrt{(e_{11} - e_{22})^2 + 4e_{12}^2} = \sqrt{37} \epsilon_0.$$

Potem je

$$\epsilon_{\text{max}} = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{37})\epsilon_0 \quad \text{in} \quad \epsilon_{\text{min}} = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{37})\epsilon_0.$$

Maksimalna osna deformacija nastopi v smeri

$$\varphi_{\text{max}} = \frac{1}{2} \arctan \frac{2e_{12}}{e_{11} - e_{22}} + \begin{cases} 0 & e_{11} \geq e_{22} \\ \pi/2 & e_{11} < e_{22}. \end{cases}$$

V našem primeru je $e_{11} < e_{22}$ in $e_{12} < 0$. Potem je

$$\varphi_{\text{max}} = \frac{1}{2} \arctan 6 + \frac{1}{2} \pi \approx 130.3^\circ.$$

Smer minimalne osne deformacije je

$$\varphi_{\text{min}} = \varphi_{\text{max}} - \frac{1}{2} \pi \approx 40.3^\circ.$$

Tu smo upoštevali, da sta ekstremalni smeri med seboj pravokotni in tako lahko prištejemo ali odštejemo pravi kot, da pridemo do druge ekstremalne smeri. Maksimalna strižna deformacija oziroma sprememba kota je

$$\gamma_{\text{max}} = \epsilon_{\text{max}} - \epsilon_{\text{min}} = \sqrt{37} \epsilon_0$$

in nastopi v smeri

$$\hat{\varphi}_{\text{max}} = \frac{1}{2} \arctan \frac{e_{22} - e_{11}}{2e_{12}} + \frac{1}{2} \pi = -\frac{1}{2} \arctan \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \pi \approx 85.3^\circ.$$

Mohrova krožnica je na sliki 8.5

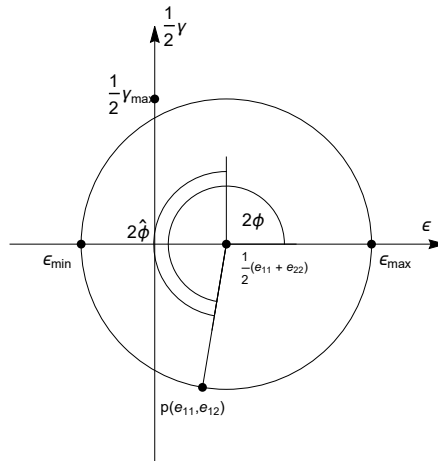
6. Za ravninsko deformacijsko stanje sta podani glavni osni deformaciji $\epsilon_1 = 2\epsilon_0$ in $\epsilon_2 = -\epsilon_0$, kjer je ϵ_0 majhno pozitivno število. Določi osi x' in y' pri katerih je $e'_{11} = 0$ in $e'_{12} > 0$.

Rešitev: V koordinatnem sistemu z baznima vektorjema \vec{i} in \vec{j} v smeri koordinatnih osi x in y pripada deformaciji diagonalna matrika

$$\mathbf{e} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Iščemo bazo \vec{i}' in \vec{j}' v kateri je $e'_{11} = 0$ in $e'_{12} > 0$. Naj bo $\vec{i}' = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}$. Potem je

$$0 = e'_{11} = \frac{1}{2}(e_{11} + e_{22}) + \frac{1}{2}(e_{11} - e_{22}) \cos 2\varphi + e_{12} \sin 2\varphi = \frac{1}{2}\epsilon_0 + \frac{3}{2}\epsilon_0 \cos 2\varphi.$$



Slika 8.5: Mohrova krožnica.

Tako dobimo

$$\cos 2\varphi = -\frac{1}{3}$$

in

$$\varphi = \pm \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1}{3}\right).$$

Rešitev je določena do predznaka, saj je \cos soda funkcija. Predznak določimo iz pogoja $e'_{12} > 0$. Velja

$$0 < e'_{12} = -\frac{1}{2}(e_{11} - e_{22}) \sin 2\varphi - e_{12} \cos 2\varphi = -\frac{3}{2}e_0 \sin 2\varphi$$

Funkcija $\sin 2\varphi$ je negativna za $2\varphi \in (\pi, 2\pi)$. Po drugi strani je $\cos 2\varphi < 0$ in zato $2\varphi \in (\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$. Potemtakem je $2\varphi \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$ in

$$\varphi \in \left(\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right). \quad (8.17)$$

Tako je

$$\varphi = \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1}{3}\right).$$

Določiti moramo še bazna vektorja \vec{i}' in \vec{j}' . V ta namen moramo prvo izračunati $\cos \varphi$ in $\sin \varphi$. Izračunajmo

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi) = \frac{1}{3} \quad \text{in} \quad \sin^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi) = \frac{2}{3}.$$

Potem je zaradi (8.17)

$$\cos \varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{in} \quad \sin \varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Iskana baza je

$$\vec{i}' = -\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i} + \sqrt{\frac{2}{3}}\vec{j} \quad \text{in} \quad \vec{j}' = -\sqrt{\frac{2}{3}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j}.$$

Poglavje 9

Elastični tenzor

9.1 Posplošen Hookov zakon

Pri enoosni deformaciji je linearna zveza med napetostjo σ in deformacijo ϵ dana s Hookovim zakonom $\sigma = E\epsilon$. V primeru prostorske deformacije in napetostnega stanja sta deformacija in napetost tenzorja. Njuni linearni zvezi pravimo *posplošen Hookov zakon*. Podobno kot pri enoosni deformaciji posplošen Hookov zakon velja samo za majhne deformacije, ko so elementi deformacijskega tenzorja po absolutni vrednosti manjši od 0.005. V danem koordinatnem sistemu v katerem pripadata deformaciji in napetosti matriki s komponentami t_{ij} in e_{kl} , $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$ linerano zvezo med napetostjo in deformacijo izrazimo z

$$t_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 C_{ijkl} e_{kl} = C_{ijkl} e_{kl}. \quad (9.1)$$

V zadnji enakosti smo uporabili zapis, ki mu pravimo *sumacijski dogovor*. Ta pravi, da indekse simbolov, ki se dvakrat ponovijo smatramo za tekoče indekse in jih seštejemo po njihovih vrednostih. Po tem dogovoru smo v zadnji enakosti v (9.1) izpustili znak za vsoto po indeksih k in l po vrednostih od 1 do 3. Primer uporabe sumacijskega dogovora, pravimo mu tudi sumacijska konvencija, je sled tenzorja. Vsoto diagonalnih elementov tenzorja s komponentami e_{ij} po tem dogovoru zapišemo z sl $\underline{e} = e_{ii}$. Sumacijski dogovor bomo uporabljali le občasno, posebej tam, kjer bomo z njim želeli poenostaviti izgled formule.

Zveza (9.1) pravi, da je vsaka komponenta napetostnega tenzorja t_{ij} linearno odvisna od komponent deformacijskega tenzorja. Koeficienti C_{ijkl} so konstantni, če je material homogen, in so funkcije položaja, če je material heterogen. V okviru predmeta se bomo posvetili predvsem homogenim materialom. Koeficientom C_{ijkl} pravimo elastični koeficienti. Ti koeficienti so dejansko komponente elastičnega tenzorja. Ker ima ta tenzor štiri komponente, je to tenzor četrtega reda. Pravimo mu elastični tenzor in ga ozančujemo s \underline{C} . Tenzorski zapis posplošenega Hookovega zakona je tako

$$\underline{t} = \underline{C} : \underline{e}.$$

Operacija označena z dvopičjem pomeni natanko to kar je zapisano po komponentah v (9.1). Tej operaciji pravimo *dvojna kontrakcija*.

Zveza (9.1) priredi deformaciji napetost. Če je ta zveza linearna, je linearna tudi zveza, ki napetosti priredi deformacijo

$$e_{ij} = S_{ijkl} t_{kl}.$$

Tu smo uporabili sumacijsko konvencijo. Pripadajoči tenzorski zapis je

$$\underline{e} = \underline{S} : \underline{t}.$$

Tenzorju $\underline{\underline{S}}$ pravimo podajnsotni tenzor. Očitno je sta si elastični in podajnostni tenzor med seboj inverzna.

Ker je $\underline{\underline{C}}$ tenzor četrtega reda in ker indeksi tečejo od 1 do 3 sklepamo, da ima elastični tenzor $3^4 = 81$ komponent C_{ijkl} . Hitro pa lahko ugotovimo, da vse te komponente niso med seboj neodvisne. Tenzorja napetosti in elastičnosti sta simetrična tenzorja, velja $t_{ij} = t_{ji}$ in $e_{ij} = e_{ji}$. Potem in (9.1) sledi, da velja

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk}.$$

Pravimo, da je elastičen tenzor simetričen v prvem in drugem paru indeksov. Prav tako je podajnostni tenzor simetričen v prvem in drugem paru indeksov. Poleg te simetije, ki ji prvimo tudi *mala simetrija* imata tako elastični in podajnostni tenzor še glavno simetrijo

$$C_{ijkl} = C_{klij}, \quad S_{ijkl} = S_{klij}.$$

tenzorjem z obema simetrijama pravimo simetrična tenzorja. Elastični in podajnostni tenzor sta tako simetrična tenzorja četrtega reda.

Glavna simetrija elastičnega tenzorja je posledica elastičnosti. Elastičnost dejansko pomeni, da je delo, ki ga opravijo površinske sile na del telesa pri deformaciji v zaprtem krogu od nedeformiranega položaja do deformiranega in nazaj v prvotni nedeformiran položaj enako nič. Gostota površinske sile, to je napetostni tenzor, je funkcija deformacije. In če je delo v zaprtem krogu enako nič, obstaja funkcija $U = U(\underline{\underline{e}})$, ki ji pravimo gostota elastična enrgija, tako da je

$$t_{ij} = \frac{\partial U}{\partial e_{ij}} \quad (9.2)$$

oziroma v tenzorskem zapisu

$$\underline{\underline{t}} = \frac{\partial U}{\partial \underline{\underline{e}}}.$$

V posebnem primeru enoosnega napetostno/deformacijskega stanja je $\sigma = E\epsilon$ in $U = \frac{1}{2}E\epsilon^2$. Iz zveze (9.1) in (9.2) potem vidimo, da je

$$C_{ijkl} = \frac{\partial t_{ij}}{\partial e_{kl}} = \frac{\partial}{\partial e_{kl}} \frac{\partial U}{\partial e_{ij}} = \frac{\partial^2 U}{\partial e_{ij} \partial e_{kl}}.$$

Tu smo v zadnji enakosti uporabili simbol za dvakratno parcialno odvajanje. Iz matematike je znano, da vrstni red zaporednih parcialnih odvodov gladkih funkcijni ni pomemben. Velja torej

$$\frac{\partial^2 U}{\partial e_{ij} \partial e_{kl}} = \frac{\partial^2 U}{\partial e_{kl} \partial e_{ij}},$$

od tod pa že vidimo, da je $C_{ijkl} = C_{klij}$.

Preštajmo sedaj število neodvisnih komponent elastičnega tenzorja. Iz male simetrije sledi, da je neodvisnih samo 6 parov prvih in 6 parov drugih indeksov. To pomeni, da ima zaradi male simetrije elastični tenzor $6 \times 6 = 36$ neodvisnih komponent. Po glavni simetriji pa lahko zamenjamo vrstni red obeh parov. Hitro vidimo, da je vseh neodvisnih parov 21. Elastični in podajnostni tenzor imata tako 21 neodvisnih komponent.

9.2 Voigtov zapis

Voigtov zapis je zapis posplošenega Hookovega zakona z matriko reda 6×6 . Ta zapis sledi že iz male simetrije elastičnega ali podajnostnega tenzorja. Matriki napetostnega tenzorja $\underline{\underline{t}}$ priredimo

stolpec neodvisnih komponent

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{12} & t_{22} & t_{23} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{22} \\ t_{33} \\ t_{23} \\ t_{13} \\ t_{12} \end{bmatrix} = T,$$

matriki deformacijskega \mathbf{e} tenzorja pa stolpec

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{12} & e_{22} & e_{23} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2e_{23} \\ 2e_{13} \\ 2e_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = E.$$

Pri prevedbi deformacije v stolpec smo uporabili inženirski zapis, ki se v inženirski literaturi večinoma uporablja. Slaba stran te uporabe je, da predpisa kako napetostnemu in deformacijskemu tenzorju priredimo stolpec nista enaka. Ta razlika potem poruši simetrijo med elastičnim in podajnostnim tenzorjem v Voigtovem zapisu.

S stolpcema T in E posplošen Hookov zakon zapišemo v obliki $T = \mathbf{C}E$, kje je \mathbf{C} matrika dimenzije 6×6 . Zaradi glavne simetrije je ta matrika simetrična. Posplošen Hookov zakon v Voigtovem zapisu je tako

$$\begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{22} \\ t_{33} \\ t_{23} \\ t_{13} \\ t_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2e_{23} \\ 2e_{13} \\ 2e_{12} \end{bmatrix}. \quad (9.3)$$

Splošne zveze med komponentami elastičnega tenzorja C_{ijkl} in elementi matrike c_{ij} ne bomo navajali. S primerjavo zapisov hitro vidimo naprimer, da je $c_{11} = C_{1111}$, $c_{12} = C_{1122}$ in $c_{16} = C_{1112}$ in tako naprej. Pri zadnji enakosti nam prav pride, da ima v stolpcu E komponenta e_{12} faktor 2. Pripadajoči Voigtov zapis za podajnostni tenzor je

$$\begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2e_{23} \\ 2e_{13} \\ 2e_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & s_{34} & s_{35} & s_{36} \\ s_{14} & s_{24} & s_{34} & s_{44} & s_{45} & s_{46} \\ s_{15} & s_{25} & s_{35} & s_{45} & s_{55} & s_{56} \\ s_{16} & s_{26} & s_{36} & s_{46} & s_{56} & s_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{22} \\ t_{33} \\ t_{23} \\ t_{13} \\ t_{12} \end{bmatrix}. \quad (9.4)$$

Posplošen Hookov zakon je ima 21 materialnih parametrov. To je veliko število in teoretični model s tako velikim številom parametrov ni kaj prida. Kmalu pa bomo videli, da lahko pogostokrat Hookov zakon zapišemo z bistveno manjšim številom parametrov, v idealnem primeru samo z dvema.

9.3 Simetrije elastičnega tenzorja

Kot že dobro vemo, je komponentni zapis tenzorja odvisen od izbire koordinatnega sistema. Če se Hookov zakon v koordinatnem sistemu z baznimi vektorji \vec{i} , \vec{j} in \vec{k} glasi

$$t_{ij} = C_{ijkl}e_{kl},$$

se v koordinatnem sistemu z baznimi vektorji \vec{i}' , \vec{j}' in \vec{k}' glasi

$$t'_{ij} = C'_{ijkl} e'_{kl}.$$

9.3.1 Monoklinična simetrija

Privzemimo, da novo bazo dobimo iz prvotne z zrcaljenjem preko ravnine xy . To pomeni, da je $\vec{i}' = \vec{i}$, $\vec{j}' = \vec{j}$ in $\vec{k}' = -\vec{k}$. V novi bazi se Hookov zakon glasi $t'_{ij} = C'_{ijkl} e'_{kl}$. V primeru, ko je $C'_{ijkl} = C_{ijkl}$, torej v primeru, ko ima elastični tenzor v tej novi bazi enake komponente kot v prvotni bazi, pravimo, da je elastičen tenzor invarianten za to zrcaljenje oziroma, da ima zrcalno simetrijo. Materialom, ki imajo eno zrcalno simetrijo pravimo *monoklinični materiali*. Poglejmo kaj ta simetrija pomeni za komponente elastičnega tenzorja.

Pišimo $\vec{e}'_1 = \vec{i}$, $\vec{e}'_2 = \vec{j}$ in $\vec{e}'_3 = \vec{k}$ ter podobno za $\vec{e}'_1 = \vec{i}'$, $\vec{e}'_2 = \vec{j}'$ in $\vec{e}'_3 = \vec{k}'$. Vemo, da je

$$t'_{ij} = \vec{e}'_i \cdot \mathbf{t} \vec{e}'_j,$$

kjer je \mathbf{t} matrika komponent, ki pripadajo tenzorju napetosti \underline{t} v bazi \vec{e}_i . Iz zgornjega zapisa hitro vidimo, da se spremenijo samo komponente t_{ij} , kjer je samo eden od indeksov enak 3, drugi pa različen od 3. Potem je

$$t'_{13} = -t_{13} \quad \text{in} \quad t'_{23} = -t_{23},$$

vse ostale komponente pa so nespremenjene. Na prav enak način ugotovimo, da je

$$e'_{13} = -e_{13}, \quad e'_{23} = -e_{23} \quad \text{in} \quad e'_{11} = e_{11}, \quad e'_{22} = e_{22}, \quad e'_{33} = e_{33}, \quad e'_{12} = e_{12}.$$

Zapišimo sedaj Hookov zakon za t_{11} v stari in novi bazi

$$t_{11} = c_{11}e_{11} + c_{12}e_{22} + c_{13}e_{33} + 2c_{14}e_{23} + 2c_{15}e_{13} + 2c_{16}e_{12}, \quad (9.5)$$

in

$$\begin{aligned} t'_{11} &= t_{11} = c_{11}e'_{11} + c_{12}e'_{22} + c_{13}e'_{33} + 2c_{14}e'_{23} + 2c_{15}e'_{13} + 2c_{16}e'_{12} \\ &= c_{11}e_{11} + c_{12}e_{22} + c_{13}e_{33} - 2c_{14}e_{23} - 2c_{15}e_{13} + 2c_{16}e_{12}. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Odštejmo (9.6) od (9.5). Tako dobimo

$$0 = 4c_{14}e_{23} + 4c_{15}e_{13}.$$

Ker mora ta enakost veljati za poljubno deformacijo, naprimer za strižni deformaciji v ravnini yz in xz , sledi, da je

$$c_{14} = c_{15} = 0. \quad (9.7)$$

Na podoben način pokažemo še, da je

$$c_{24} = c_{25} = c_{34} = c_{35} = c_{46} = c_{56} = 0. \quad (9.8)$$

Poglejmo še komponenti t_{23} in t_{13} . Pri tem upoštevajmo (9.7) in (9.8). Velja

$$t_{23} = c_{14}e_{11} + c_{24}e_{22} + c_{34}e_{33} + 2c_{44}e_{23} + 2c_{45}e_{13} + 2c_{46}e_{12} = 2c_{44}e_{23} + 2c_{45}e_{13}, \quad (9.9)$$

in

$$\begin{aligned} t'_{23} &= -t_{23} = c_{14}e'_{11} + c_{24}e'_{22} + c_{34}e'_{33} + 2c_{44}e'_{23} + 2c_{45}e'_{13} + 2c_{46}e'_{12} \\ &= c_{14}e_{11} + c_{24}e_{22} + c_{34}e_{33} - 2c_{44}e_{23} - 2c_{45}e_{13} + 2c_{46}e_{12} = -2c_{44}e_{23} - 2c_{45}e_{13}. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Vidimo, da sta enačbi (9.9) in (9.10) ekvivalentni in zato ne prinašata novega pogoja.

Za monoklinični material v koordinatnem sistemu, kjer je ravnina xy ravnina zrcalne simetrije veljajo za komponente enačbe (9.7) in (9.8). Pripadajoča matrika v Voigtovem zapisu je

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{45} & c_{55} & 0 \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}.$$

Monoklinični material ima 13 neodvisnih parametrov.

9.3.2 Ortotropična simetrija

Material je ortotropičen, če ima dve med seboj pravokotni ravnini zrcalne simetrije. Naj bosta to ravnini xy in xz . Na podoben način kot prej sedaj sledi, da je poleg (9.7) in (9.8) tudi

$$c_{16} = c_{26} = c_{36} = c_{45} = 0.$$

Elastični tenzor ortotropičnega material v Voigtovem zapisu je potem oblike

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}. \quad (9.11)$$

Velja poudariti, da je v zgornjem zapisu koordinatni sistem usklajen z ortotropično simetrijo. V poljubnem koordinatnem sistemu je matrika elastičnega tenzorja ortotropičnega materiala praviloma polna matrika brez ničel. Določitev koordinatnega sistema, ki je usklajen z ortotropično simetrijo računsko ni trivialen. Pomembna lastnost ortotropičnega materiala je, da osna deformacija v smeri normale na ravnino zrcalne simetrije povzroči samo normalno napetost, strižna deformacija v ravnini zrcalne simetrije pa samo strižno napetost v tej ravnini. To vidimo iz (9.3). Obstoj treh takih med seboj pravokotnih ravnin zagotavlja, da ima material ortotropično simetrijo.

Ortotropični material ima 9 neodvisnih parametrov. Opazimo, da ima matrika \mathbf{C} enako obliko, če je material zrcalnih simetričen glede na ravnini xy in yz namesto glede na xy in xz . Dodatna ravnina zrcalne simetrije ne zmanjša števila parametrov. Pomembem primer materiala z ortotropično simetrijo je les, njegove mehanske lastnosti so bistveno odvisne od smeri. V smeri celuloznih vlaken, ki lesu dajajo trdnost je les precej bolj tog kot v prečni smeri. To smo spoznali že v tabeli Youngovih modulov.

Podajnostni tenzor ima enako simetrijo kot elastični tenzor. Podajnostni tenzor za ortotropični material v Voigtovem zapisu zapišemo v obliki

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_2 & -\nu_{13}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{21}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{23}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{31}/E_1 & -\nu_{32}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\mu_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\mu_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\mu_{12} \end{bmatrix}.$$

Številom E_i pravimo Youngovi moduli, ν_{ij} Poissonovi količniki, μ_{ij} pa strižni moduli. Indeksi i in j tečejo po množici $\{1, 2, 3\}$. Za Poissonove količnike veljajo zveze

$$\frac{\nu_{12}}{E_2} = \frac{\nu_{21}}{E_1}, \quad \frac{\nu_{13}}{E_3} = \frac{\nu_{31}}{E_1}, \quad \frac{\nu_{23}}{E_3} = \frac{\nu_{32}}{E_2}.$$

Neodvisni parametri so tako $E_1, E_2, E_3, \nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}, \mu_{12}, \mu_{13}$ in μ_{23} . Njihov pomen razberemo iz enosnega in strižnega testa.

Izračunajmo deformacijo, ki jo povzroči enoosno napetostno stanje v smeri osi x . Po formuli (9.4) je

$$\begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2e_{23} \\ 2e_{13} \\ 2e_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_2 & -\nu_{13}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{21}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{23}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{31}/E_1 & -\nu_{32}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\mu_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\mu_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\mu_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Potem je

$$e_{11} = \frac{\sigma}{E_1}, \quad e_{22} = -\frac{\nu_{21}}{E_1}\sigma, \quad e_{33} = -\frac{\nu_{31}}{E_1}\sigma. \quad (9.12)$$

Vidimo, da je E_1 Youngov modul v smeri osi x , E_2 v smeri osi y in E_3 v smeri z . Kvocienta osnih deformacij (9.12) sta

$$\frac{e_{22}}{e_{11}} = -\nu_{21} \quad \text{in} \quad \frac{e_{33}}{e_{11}} = -\nu_{31}.$$

Poissonov količnik torej pove kolikšna je relativna sprememba dolžine v lateralni smeri glede na osno deformacijo. Pri raztegu v osni smeri se material praviloma skrči v lateralni smeri, pri skrčitvi v osni smeri pa raztegne v lateralni smeri. Zato je Poissonov količnik praviloma pozitiven. Obstajajo pa posebni materiali, pravimo jim *auksetični materiali*, ki se obnašajo ravno nasprotno in imajo tako negativni Poissonov količnik. Dopustne vrednosti Poissonovega količnika bomo spoznali kasneje.

Poglejmo kakšno deformacijo povzroči strižno napetostno stanje. Naj bo edina neničelna komponenta napetostnega tenzorja komponenta t_{12} . Potem po (9.4) sledi

$$2e_{12} = \frac{1}{\mu_{12}}t_{12} \Rightarrow t_{12} = 2\mu_{12}e_{12}.$$

Strižni modul torej povezuje z zgornjo enačbo strižno napetost in strižno deformacijo. V principu lahko tako materialne parametre ortotropičnega materiala določimo s tremi osnimi in tremi strižnimi preizkusi.

9.3.3 Kubična simetrija

Poleg zrcalne simetrije obstajajo tudi rotacijske simetrije. Primer je kubična simetrija. Naj za komponente elastičnega tenzorja v danem koordinatnem sistemu velja, da se ne spremenijo, če zasukamo koordinatni sistem okrog poljubne koordinatne osi za večkratnik pravega kota. Konkretno, če zavrtimo koordinatni sistem z baznimi vektorji \vec{i}, \vec{j} in \vec{k} okrog osi \vec{k} za kot π , je nova baza $\vec{i}' = -\vec{i}, \vec{j}' = -\vec{j}$ in $\vec{k}' = \vec{k}$. Podobne relacije veljajo za ostale rotacije za polni kot okrog \vec{j} in \vec{i} . Hitro lahko vidimo, podobno kot pri ortotropičnem materialu, da ima elastični tenzor materiala s kubično simetrijo enako obliko kot ortotropičen material. Velja pa še več. Ortotropičen material ima 9 neodvisnih parametrov, kubični pa samo tri, saj morajo biti njegove komponente invariantne tudi za rotacije za pravi kot.

Pri rotaciji za pravi kot okrog osi \vec{k} je nova baza oblike $\vec{i}' = \vec{j}, \vec{j}' = -\vec{i}$ in $\vec{k}' = \vec{k}$. Poglejmo

kaj to pomeni za komponente napetostnega in deformacijskega tenzorja. Izračunajmo

$$\begin{aligned}
t'_{11} &= \vec{i}' \cdot \mathbf{t} \vec{i}' = \vec{j} \cdot \mathbf{t} \vec{j} = t_{22}, \\
t'_{22} &= \vec{j}' \cdot \mathbf{t} \vec{j}' = -\vec{i} \cdot \mathbf{t} (-\vec{i}) = t_{11}, \\
t'_{33} &= \vec{k}' \cdot \mathbf{t} \vec{k}' = \vec{k} \cdot \mathbf{t} \vec{k} = t_{33}, \\
t'_{23} &= \vec{j}' \cdot \mathbf{t} \vec{k}' = -\vec{i} \cdot \mathbf{t} \vec{k} = -t_{13}, \\
t'_{13} &= \vec{i}' \cdot \mathbf{t} \vec{k}' = \vec{j} \cdot \mathbf{t} \vec{k} = t_{23}, \\
t'_{12} &= \vec{i}' \cdot \mathbf{t} \vec{j}' = \vec{j} \cdot \mathbf{t} (-\vec{i}) = -t_{21} = -t_{12}.
\end{aligned} \tag{9.13}$$

Podobne formule veljajo za komponente deformacijskega tenzorja.

Sedaj izračunajmo $T = \mathbf{C} E$

$$\begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{22} \\ t_{33} \\ t_{23} \\ t_{13} \\ t_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2e_{23} \\ 2e_{13} \\ 2e_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}e_{11} + c_{12}e_{22} + c_{13}e_{33} \\ c_{12}e_{11} + c_{22}e_{22} + c_{23}e_{33} \\ c_{13}e_{11} + c_{23}e_{22} + c_{33}e_{33} \\ 2c_{44}e_{23} \\ 2c_{55}e_{13} \\ 2c_{66}e_{12} \end{bmatrix} \tag{9.14}$$

in $T' = \mathbf{C}' E' = \mathbf{C} E'$, ki je dan z

$$\begin{bmatrix} t'_{11} \\ t'_{22} \\ t'_{33} \\ t'_{23} \\ t'_{13} \\ t'_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e'_{11} \\ e'_{22} \\ e'_{33} \\ 2e'_{23} \\ 2e'_{13} \\ 2e'_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}e'_{11} + c_{12}e'_{22} + c_{13}e'_{33} \\ c_{12}e'_{11} + c_{22}e'_{22} + c_{23}e'_{33} \\ c_{13}e'_{11} + c_{23}e'_{22} + c_{33}e'_{33} \\ 2c_{44}e'_{23} \\ 2c_{55}e'_{13} \\ 2c_{66}e'_{12} \end{bmatrix}. \tag{9.15}$$

Uporabimo v (9.15) transformacijske formule (9.13) za t'_{ij} in e'_{ij} . Tako dobimo

$$\begin{bmatrix} t_{22} \\ t_{11} \\ t_{33} \\ -t_{13} \\ t_{23} \\ -t_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}e_{22} + c_{12}e_{11} + c_{13}e_{33} \\ c_{12}e_{22} + c_{22}e_{11} + c_{23}e_{33} \\ c_{13}e_{22} + c_{23}e_{11} + c_{33}e_{33} \\ -2c_{44}e_{13} \\ 2c_{55}e_{23} \\ -2c_{66}e_{12} \end{bmatrix}. \tag{9.16}$$

Sedaj primerjajmo (9.14) in (9.16). Primerjavo zapišemo s sistemom enačb

$$\begin{aligned}
c_{11}e_{11} + c_{12}e_{22} + c_{13}e_{33} &= c_{12}e_{22} + c_{22}e_{11} + c_{23}e_{33} \\
c_{12}e_{11} + c_{22}e_{22} + c_{23}e_{33} &= c_{11}e_{22} + c_{12}e_{11} + c_{13}e_{33} \\
c_{13}e_{11} + c_{23}e_{22} + c_{33}e_{33} &= c_{13}e_{22} + c_{23}e_{11} + c_{33}e_{33} \\
2c_{44}e_{23} &= 2c_{55}e_{23} \\
2c_{55}e_{13} &= 2c_{44}e_{13} \\
2c_{66}e_{12} &= 2c_{66}e_{12}.
\end{aligned} \tag{9.17}$$

Rešitev sistema (9.17) za poljubno deformacijo je

$$c_{11} = c_{22}, \quad c_{44} = c_{55} \quad \text{in} \quad c_{13} = c_{23}.$$

Upoštevajmo še, da so za material s kubično simetrijo komponente elastičnega tenzorja invariantne za rotacije za pravi kot tudi okrog osi \vec{j} in \vec{i} . Iz vseh rotacijskih simetrij potem sledi

$$c_{11} = c_{22} = c_{33}, \quad c_{44} = c_{55} = c_{66} \quad \text{in} \quad c_{13} = c_{23} = c_{12}.$$

Elastični tenzor materiala s kubično simetrijo ima tako samo tri neodvisne parametre, njegov Voigtov zapis pa je

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix}.$$

Za material s kubično simetrijo je Youngov modul enak v vseh treh smereh. Prav tako so enaki strižni moduli in Poissonovi količniki. Ta ugotovitev seveda velja samo v smereh, ki se sovpadajo z rotacijskimi osmi. Neodvisni materialni parametri so tako Youngov modul, Poissonov količnik in strižni modul. Tipični materiali s kubično simetrijo so kovinski materiali.

9.3.4 Tranzverzalna simetrija

Material ima tranzverzalno simetrijo, če ima eno ravnino zrcalne simetrije in rotacijsko simetrijo za poljubni kot okrog normale na ravnino zrcalne simetrije. Te dve simetriji zagotavljata, da ima elastični tenzor tranzverzalno simetričnega materiala obliko (9.11). Zaradi dodatne rotacijske simetrije pa vsi ti koeficienti niso neodvisni.

Naj bo ravnina zrcalne simetrije ravnina xy , os rotacijske simetrije pa os \vec{k} . Rotacija okrog osi \vec{k} za kot $\pi/4$ prevede staro bazo v novo bazo

$$\vec{i}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j}), \quad \vec{j}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i} + \vec{j}), \quad \vec{k}' = \vec{k}.$$

Po krajšem računu, podobnemu kot v (9.13) dobimo

$$\begin{aligned} t'_{11} &= \vec{i}' \cdot \mathbf{t} \vec{i}' = \frac{1}{2}(t_{11} + 2t_{12} + t_{22}), \\ t'_{22} &= \vec{j}' \cdot \mathbf{t} \vec{j}' = \frac{1}{2}(t_{11} - 2t_{12} + t_{22}), \\ t'_{33} &= \vec{k}' \cdot \mathbf{t} \vec{k}' = t_{33}, \\ t'_{23} &= \vec{j}' \cdot \mathbf{t} \vec{k}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-t_{13} + t_{23}), \\ t'_{13} &= \vec{i}' \cdot \mathbf{t} \vec{k}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(t_{13} + t_{23}), \\ t'_{12} &= \vec{i}' \cdot \mathbf{t} \vec{j}' = \frac{1}{2}(-t_{11} + t_{22}). \end{aligned} \tag{9.18}$$

Podobne formule veljajo za komponente deformacijskega tenzorja. Potem je po Hookovem zakonu

$$\begin{aligned} t'_{11} &= \frac{1}{2}(t_{11} + 2t_{12} + t_{22}) \\ &= \frac{1}{2}(c_{11}e_{11} + c_{12}e_{22} + c_{13}e_{33}) + 2c_{66}e_{12} + \frac{1}{2}(c_{12}e_{11} + c_{22}e_{22} + c_{23}e_{33}) \\ &= \frac{1}{2}(c_{11} + c_{12})e_{11} + \frac{1}{2}(c_{12} + c_{22})e_{22} + \frac{1}{2}(c_{13} + c_{23})e_{33} + 2c_{66}e_{12} \end{aligned} \tag{9.19}$$

Po drugi strani pa je

$$\begin{aligned} t'_{11} &= c_{11}e'_{11} + c_{12}e'_{22} + c_{13}e'_{33} \\ &= \frac{1}{2}c_{11}(e_{11} + 2e_{12} + e_{22}) + \frac{1}{2}c_{12}(e_{11} - 2e_{12} + e_{22}) + c_{13}e_{33} \\ &= \frac{1}{2}(c_{11} + c_{12})e_{11} + \frac{1}{2}(c_{11} + c_{12})e_{22} + c_{13}e_{33} + (c_{11} - c_{12})e_{12}. \end{aligned} \tag{9.20}$$

Primerjajmo (9.19) in (9.20). Enakosti (9.19) in (9.20) hkrati veljata za poljubno deformacijo natanko takrat, ko je

$$c_{11} = c_{22}, \quad c_{13} = c_{23} \quad \text{in} \quad c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}).$$

Poglejmo še, kako je s strižno komponento napetosti. Velja

$$t'_{13} = \frac{1}{\sqrt{2}}(t_{13} + t_{23}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(2c_{55}e_{13} + 2c_{44}e_{23}).$$

Po drugi strani pa je

$$t'_{13} = 2c_{44}e'_{13} = 2c_{44}\frac{1}{\sqrt{2}}(e_{13} + e_{23}).$$

Enakosti sta hkrati zadoščeni za poljubno deformacijo, če je

$$c_{44} = c_{55}.$$

S tem smo dejansko v celoti izkoristili rotacijsko simetrijo za določitev vezi med komponentami elastičnega tenzorja. Izkaže se, da z rotacijo okrog osi \vec{k} za poljubni kot ne dobimo novih pogojev.

Elastični tenzor tranzverzalno izotropičnega materiala ima tako pet neodvisnih konstant. Splošna oblika elastičnega tenzorja je

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (c_{11} - c_{12})/2 \end{bmatrix}.$$

Vidimo, da lahko strižni modul μ_{12} tranzverzalno izotropičnega materiala zapišemo kot funkcijo Youngovega modula E_1 in Poissonovega količnika ν_{12} . Materiale z vlaknasto strukturo v fiksni smeri pogostokrat obravnavamo kot tranzverzalno izotropične materiale.

9.3.5 Izotropija

Material je izotropičen, če je v vse smeri enak. To pomeni, da je tranzverzalno simetričen za poljubno os, oziroma, da je elastičen tenzor invarianten za poljubno rotacijo. Izotropičen tenzor je hkrati kubičen in tranzverzalno simetričen. Potemtakem ima izotropičen material samo dva neodvisna parametra, splošna oblika elastičnega tenzorja pa je

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (c_{11} - c_{12})/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (c_{11} - c_{12})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (c_{11} - c_{12})/2 \end{bmatrix}.$$

Youngov modul v poljubni smeri je enak, enaki so tudi Poissonovi količniki za poljubni par smeri in enaki so tudi strižni moduli. Podajnostni tenzor izotropičnega materiala je

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix}. \quad (9.21)$$

Tu smo z G zapisali strižni modul.

Poiščimo še zvezo med strižnim modulom in Youngovim modulom. Ker stolpca napetosti T in deformacije E nista po strukturi enaka, matrika \mathbf{S} ni inverz matrike \mathbf{C} in tudi zveza $\frac{1}{G} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{E} + \frac{\nu}{E}\right)$ ne velja. Zvezo $2e_{12} = s_{66}t_{12}$ prepisimo v $e_{12} = \frac{1}{4}s_{66}2t_{12}$. To je po obliki enaka zveza kot $t_{12} = c_{66}2e_{12}$. Potem je

$$\frac{1}{4}s_{66} = \frac{1}{4G} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{E} + \frac{\nu}{E}\right) = \frac{1+\nu}{2E}$$

in

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (9.22)$$

Neodvisna materialna parametra izotropičnega materiala sta tako E in ν .

Pkažimo sedaj, da lahko posplošen Hookov zakon za izotropičen material zapišemo v obliko

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{t}} - \frac{\nu}{E}\text{sl}\underline{\underline{t}}\underline{\underline{i}}. \quad (9.23)$$

Res, upoštevajmo (9.21). Velja

$$t_{11} = \frac{1}{E}e_{11} - \frac{\nu}{E}e_{22} - \frac{\nu}{E}e_{33} = \frac{1+\nu}{E}e_{11} - \frac{\nu}{E}(e_{11} + e_{22} + e_{33}) = \frac{1+\nu}{E}e_{11} - \frac{\nu}{E}\text{sl}\underline{\underline{e}}.$$

Dobljena enakost potrjuje valjavnost (9.23) za t_{11} . Podobno dokažemo da enakost velja tudi za t_{22} in t_{33} . Preverimo veljavnost še za izvendiagonalne elemente. Dovolj je preveriti za t_{12} . Po (9.23) je

$$t_{12} = \frac{1+\nu}{E}t_{12},$$

po (9.21) in (9.22) pa je

$$2e_{12} = \frac{1}{G}t_{12} = \frac{2(1+\nu)}{E}t_{12},$$

kar se po krajšanju z 2 ujema s predhodno enakostjo. Zveza (9.23) torej res velja. $\hat{\underline{\underline{t}}}$

Poiščimo še obratno zvezo, ki dani deformaciji priredi napetost. Prvo poiščimo zvezo med sledema napetostnega in deformacijskega tenzorja. Iz (9.23) sledi

$$\text{sl}\underline{\underline{e}} = \frac{1+\nu}{E}\text{sl}\underline{\underline{t}} - \frac{\nu}{E}\text{sl}\underline{\underline{t}}\text{sl}\underline{\underline{i}} = \left(\frac{1+\nu}{E} - \frac{3\nu}{E}\right)\text{sl}\underline{\underline{t}} = \frac{1-2\nu}{E}\text{sl}\underline{\underline{t}}. \quad (9.24)$$

Potem iz (9.23) dobimo

$$\underline{\underline{t}} = \frac{E}{1+\nu}\left(\underline{\underline{\epsilon}} + \frac{\nu}{E}\text{sl}\underline{\underline{t}}\underline{\underline{i}}\right).$$

Upoštevajmo (9.23). Tako je

$$\underline{\underline{t}} = \frac{E}{1+\nu}\underline{\underline{\epsilon}} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\text{sl}\underline{\underline{\epsilon}}\underline{\underline{i}}. \quad (9.25)$$

Dobljeno zvezo pogostokrat prepisemo v obliko

$$\underline{\underline{t}} = 2\mu\underline{\underline{\epsilon}} + \lambda\text{sl}\underline{\underline{\epsilon}}\underline{\underline{i}}, \quad (9.26)$$

kjer je

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{in} \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

Koeficientoma μ in λ pravimo Laméjeva koeficienta.

Če je napetostno stanje hidrostatično, $\underline{t} = -p\underline{i}$, sledi iz (9.24), da je

$$\text{sl } \underline{\underline{\epsilon}} = -\frac{3(1-2\nu)p}{E}$$

oziroma

$$p = -\frac{E}{3(1-2\nu)} \text{sl } \underline{\underline{\epsilon}}.$$

Sled deformacijskega tenzorja je enaka relativni spremembi volumna. Pri enakomerni kompresiji, ko je $p > 0$, se volumen zmanjša. To pomeni, da mora biti koeficient

$$\kappa = \frac{E}{3(1-2\nu)},$$

ki mu pravimo *kompresijski modul*, pozitiven. It tega pogoja sledi, da je $\nu \leq \frac{1}{2}$. V limiti $\nu \rightarrow \frac{1}{2}$ mora biti kompresija za spremembo volumna neskončno velika. To pomeni, da vrednost $\nu = \frac{1}{2}$ ustreza *nestisljivemu* materialu. Ker mora biti tudi strižni modul pozitiven, dobimo iz (9.22), da je $\nu > -1$. Potemtakem je Poissonov količnik omejen z

$$-1 < \nu \leq \frac{1}{2}. \quad (9.27)$$

Eksperimentalno je Poissonov količnik težko natančno izmeriti, ker so spremembe volumna ali lateralne dimenzije v območju linearne elastičnosti majhne. Tipična vrednost Poissonovega količnika za kovine je približno 0.3.

9.4 Prostorska temperaturna deformacija

Sprememba temperature za ΔT v izotropičnem materialu, v katerem je odziv v vse smeri enak, povzroči deformacijo

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \alpha \Delta T \underline{i}. \quad (9.28)$$

Koeficintu α pravimo koeficient termalnega raztezka in ga že poznamo iz obravnave enoosne deformacije. Deformacijo smo opisali z infinitezimalnim deformacijskim tenzorjem, saj je deformacija za katero velja ta zveza za dopustne spremembe temperature majhna. Ker je deformacijski tenzor deformacije (9.28) sferičen, deformacija ne spreminja kotov. Kroglja se skrči ali raztegne v kroglo. Sprememba temperature v prostem materialu ne povzroči napetost. Do napetosti pride, če se material ne more prosto skrčiti ali razširiti. Poglejmo to na primeru.

Elastična izotropična kocka je vložena v togi material. Določiti moramo napetost v kocki, če se kocka segreje za ΔT . Prost kocka bi se prosto razširila, ker pa ni prosta, sprememba temperature povzroči elastično napetost, ta pa elastično deformacijo. Deformacija kocke je tako vsota termalne in elastične deformacije. Velja torej

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}}_E + \underline{\underline{\epsilon}}_T,$$

kjer je $\underline{\underline{\epsilon}}_E$ elastična deformacija, $\underline{\underline{\epsilon}}_T$ pa je termalna deformacija dana z $\underline{\underline{\epsilon}} = \alpha \Delta T \underline{i}$. Ker je kocka vložena v togi material, ki se ne deformira, je skupna deformacija $\underline{\underline{\epsilon}}$ enaka nič. Potemtakem je

$$\underline{\underline{\epsilon}}_E = -\alpha \Delta T \underline{i}.$$

Sedaj, ko poznamo deformacijo, napetost izračunamo po Hookovem zakonu

$$\begin{aligned} \underline{t} &= \frac{E}{1+\nu} \underline{\underline{\epsilon}}_E + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{sl } \underline{\underline{\epsilon}}_E \underline{i} \\ &= -\alpha \left(\frac{E}{1+\nu} + \frac{3\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right) \Delta T \underline{i} \\ &= -\frac{\alpha E}{1+\nu} \Delta T \underline{i} = -2\alpha G \Delta T \underline{i}. \end{aligned}$$

Napetostno stanje je hidrostatično. Za primer izračunajmo tlak za aluminij za katerega je $E = 69 \text{ GPa}$, $\nu = 0.35$, $\alpha = 23.1 \times 10^{-6} \text{ 1/K}$, ki ga segrejemo za 10 K . Za te vrednosti je

$$2\alpha G \Delta T = 11.8 \text{ MPa.}$$

9.5 Hookov zakon za ravninsko deformacijo in napetost

Hookov zakon za izotropični material je

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{t}} - \frac{\nu}{E} \text{sl} \underline{\underline{t}}. \quad (9.29)$$

Za ravninsko napetostno stanje se (9.29) po komponentah glasi

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{1}{E} t_{11} - \frac{\nu}{E} t_{22}, \\ e_{22} &= -\frac{\nu}{E} t_{11} + \frac{1}{E} t_{22}, \\ e_{12} &= \frac{1+\nu}{E} t_{12} = \frac{1}{2G} t_{12}, \\ e_{33} &= -\frac{\nu}{E} (t_{11} + t_{22}), \\ e_{23} &= e_{13} = 0. \end{aligned}$$

Rezultirajoča deformacija v splošnem ni ravninska, člen e_{33} je lahko neničelen. V primeru ravninske deformacije lahko lahko kljub temu na (9.29) gledamo kot na Hookov zakon, kjer so vsi tenzorji ravninski in pripadajoče matrike dimenzije 2×2 . Komponenta e_{33} ne vpliva na napetostno stanje.

Poglejmo si še ravninsko deformacijo. Iz (9.29) sledi

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{1}{E} t_{11} - \frac{\nu}{E} t_{22} - \frac{\nu}{E} t_{33}, \\ e_{22} &= -\frac{\nu}{E} t_{11} + \frac{1}{E} t_{22} - \frac{\nu}{E} t_{33}, \\ 0 &= -\frac{\nu}{E} t_{11} - \frac{\nu}{E} t_{22} + \frac{1}{E} t_{33}, \\ e_{12} &= \frac{1+\nu}{E} t_{12} = \frac{1}{2G} t_{12}, \\ e_{23} &= e_{13} = 0. \end{aligned}$$

Iz tretje enačbe izrazimo $t_{33} = \nu(t_{11} + t_{22})$ in vstavimo v prvo. Dobimo

$$e_{11} = \left(\frac{1}{E} - \frac{\nu^2}{E} \right) t_{11} - \left(\frac{\nu}{E} + \frac{\nu^2}{E} \right) t_{22} = \frac{1-\nu^2}{E} t_{11} - \frac{\nu(1+\nu)}{E} t_{22}.$$

Označimo

$$\frac{1}{E'} = \frac{1-\nu^2}{E} \quad \text{in} \quad \nu' = \frac{\nu}{1-\nu}. \quad (9.30)$$

Potem je

$$e_{11} = \frac{1}{E'} t_{11} - \frac{\nu'}{E'} t_{22} \quad (9.31)$$

in podobno

$$e_{22} = -\frac{\nu'}{E'} t_{11} + \frac{1}{E'} t_{22}. \quad (9.32)$$

Direktni račun pokaže, da je

$$\frac{1 + \nu'}{E'} = \frac{1 + \nu}{E}$$

in potemtakem tudi

$$e_{12} = \frac{1 + \nu'}{E'} t_{12}. \quad (9.33)$$

Enačbe (9.31), (9.32) in (9.33) so prav take enačbe kot za ravninsko deformacijo, le namesto konstant E in ν sedaj nastopajo E' in ν' . Potemtakem lahko naloge ravninske napetosti in deformacije enotno obravnavamo, pri ravninski napetosti nastopajo dejanski materialni parametri, pri ravninski deformaciji pa modificirani (9.30).

9.6 Vprašanja in naloge

9.6.1 Vprašanja

1. Zapiši koeficiente c_{1j} s komponentami elastičnega tenzorja.
2. Pokaži, da je za monoklinični material $c_{64} = c_{65} = 0$.
3. Pokaži, da tretja ravnina zrcalne simetrije ne vpliva ne zmanjša število neodvisnih parametrov monokliničnega materiala.
4. Zapiši elastični tenzor tranzverzalno izotropičnega materiala v koordinatnem sistemu, kjer je matrika elastičnega tenzorja invarianta za rotacije okrog osi \vec{i} .
5. Dokaži, da velja (9.23) za t_{22} in t_{33} .
6. Poišči vrednosti Poissonovega količnika za nekatere konkretne materiale.

9.6.2 Naloge

1. Izotropični material je v homogenem napetostnem stanju. V smeri vektorja \vec{i} je normalna napetost enaka σ_0 , v smeri vektorja \vec{j} , ki je pravokoten na \vec{i} pa je normalna napetost enaka $2\sigma_0$. Določi Yongov modul in Poissonov količnik, če je matrika pripadajočega deformacijskega tenzorja v bazi \vec{i}, \vec{j} enaka

$$\mathbf{e} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Določi tudi napetostni tenzor.

Rešitev: Deformacijo in napetost povezuje splošen Hookov zakon

$$\mathbf{t} = \frac{E}{1 + \nu} \mathbf{e} + \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \text{sl e i} = \frac{\epsilon_0 E}{1 + \nu} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{4\epsilon_0 \nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (9.34)$$

kjer je \mathbf{i} enotska matrika.

Vemo, da je $\vec{i} \cdot \underline{\underline{t}} \vec{i} = \sigma_0$ in $\vec{j} \cdot \underline{\underline{t}} \vec{j} = 2\sigma_0$. Po krajšem računu dobimo

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_0 E}{1 + \nu} + \frac{4\epsilon_0 \nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} &= \sigma_0, \\ \frac{3\epsilon_0 E}{1 + \nu} + \frac{4\epsilon_0 \nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} &= 2\sigma_0. \end{aligned}$$

Od druge enačbe odštejemo prvo. Tako dobimo

$$\frac{\epsilon_0 E}{1 + \nu} = \frac{\sigma_0}{2} \quad (9.35)$$

in potem iz prve enačbe

$$\frac{4\epsilon_0 \nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} = \frac{\sigma_0}{2}. \quad (9.36)$$

V drugi enačbi upoštevajmo prvo. Potem je

$$\frac{4\nu}{1 - 2\nu} = 1 \Rightarrow \nu = \frac{1}{6},$$

iz prve enačbe pa dobimo

$$E = \frac{7}{12} \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}.$$

Vstavimo (9.35) in (9.36) v (9.34). Potem po krajšem računu sledi

$$\mathbf{t} = \sigma_0 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Vidimo, da je deformacija ravninska, napetost pa ne.

2. Izotropični material je v homogenem napetostnem stanju. V smeri vektorja \vec{i} je osna deformacija enaka ϵ_0 , v smeri vektorja \vec{j} , ki je pravokoten na \vec{i} pa je osna deformacija enaka $-\frac{2}{3}\epsilon_0$. Določi Yongov modul in Poissonov količnik, če je matrika napetostnega tenzorja v bazi \vec{i}, \vec{j} enaka

$$\mathbf{t} = \sigma_0 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Določi tudi deformacijski tenzor.

Rešitev: Deformacijo in napetost povezuje posplošen Hookov zakon

$$\mathbf{e} = \frac{1 + \nu}{E} \mathbf{t} - \frac{\nu}{E} \text{sl} \mathbf{t} \mathbf{i} = \frac{(1 + \nu)\sigma_0}{E} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{\nu\sigma_0}{E} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (9.37)$$

Tu je \mathbf{i} enotska matrika.

Vemo, da je $\vec{i} \cdot \underline{e} \vec{i} = \epsilon_0$ in $\vec{j} \cdot \underline{e} \vec{j} = -\frac{2}{3}\epsilon_0$. Po krajšem računu dobimo

$$\begin{aligned} \frac{2(1 + \nu)\sigma_0}{E} - \frac{\nu\sigma_0}{E} &= \epsilon_0, \\ -\frac{(1 + \nu)\sigma_0}{E} - \frac{\nu\sigma_0}{E} &= -\frac{2}{3}\epsilon_0, \end{aligned}$$

Od prve enačbe odštejemo drugo. Tako dobimo

$$\frac{(1 + \nu)\sigma_0}{E} = \frac{5\epsilon_0}{9} \quad (9.38)$$

in potem iz prve enačbe

$$\frac{\nu\sigma_0}{E} = \frac{\epsilon_0}{9}. \quad (9.39)$$

Iz (9.38) potem sledi

$$E = \frac{9 \sigma_0}{4 \epsilon_0},$$

iz (9.39) pa

$$\nu = \frac{1}{4}.$$

Sedaj izračunamo še deformacijski tenzor. Iz (9.37) sledi

$$\mathbf{e} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} 1 & -5/9 & 0 \\ -5/9 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/9 \end{bmatrix}.$$

Vidimo, da tudi ravninsko napetostno stanje povzroči prostorsko deformacijo.

3. V zaprto togo kotanjo v obliki kocke dimenzije $a \times a \times a$ vložimo elastično kocko enakih dimenzij. Kocko segrejemo za ΔT . Določi napetost v kocki. Pri tem upoštevaj, da je kotanja odprta.

Rešitev: Celotna deformacija je vsota termalne in elastične, velja torej

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}}_E + \underline{\underline{\epsilon}}_T.$$

Postavimo koordinatni sistem z osmi v smereh stranic kocke, z osjo z v smeri odprtine kotaje. Ker je kocka vložena v togo kotanjo, ki je odprta so vse komponente deformacijskega tenzorja $\underline{\underline{\epsilon}}$ enake nič, razen komponente e_{33} . Potem je

$$e_{12}^E = e_{13}^E = e_{23}^E = 0 \quad \text{in} \quad e_{11}^E = e_{22}^E = -\alpha \Delta T.$$

Komponente e_{33}^E torej ne poznamo. Zato pa poznamo napetost na zgornji ploskvi kocke. Ta napetost je enaka nič, ker kotanja ni zaprta in je ta ploskev prosta. Uporabimo sedaj Hookov zakon

$$\underline{\underline{t}} = \frac{E}{1 + \nu} \underline{\underline{\epsilon}} + \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \text{sl} \underline{\underline{\epsilon}} \underline{\underline{i}}.$$

za komponento t_{33} . Velja

$$0 = t_{33} = \frac{E}{1 + \nu} e_{33}^E + \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} (e_{11}^E + e_{22}^E + e_{33}^E).$$

Potem je

$$\frac{2\alpha\nu\Delta T}{1 - 2\nu} = \left(1 + \frac{\nu}{1 - 2\nu}\right) e_{33}^E = \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} e_{33}^E.$$

Potem je

$$e_{33}^E = \frac{2\alpha\nu}{1 - \nu} \Delta T.$$

Sedaj poznamo vse komponente elastične deformacije in lahko izračunamo napetost po Hookovem zakonu. Prvo izračunajmo sled

$$\text{sl} \underline{\underline{\epsilon}} = e_{11}^E + e_{22}^E + e_{33}^E = 2\alpha \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \Delta T.$$

Potem po krajšem računu dobimo

$$t_{11} = t_{22} = -\frac{\alpha E \Delta T}{1 - \nu}.$$

Ker so vse ostale komponente napetostnega tenzorja enake nič je s tem napetost določena.

Poglavje 10

Upogib nosilca

10.1 Upogib ravninskega nosilca

Nosilce smo že obravnavali. Spoznali smo notranje količine, osno in prečno silo ter upogibni moment. V okviru statike smo te količine definirali kot rezultante vpliva desnega dela nosilca na levi del vzdolž navideznega prereza nosilca. Sedaj vemo, da je ta vpliv posledica površinskih sil na preseku. Gostota površinskih sil je napetost, ki jo z deformacijo povezuje Hookov zakon. Naš namen je sedaj povezati prej spoznane notranje količine z deformacijo in napetostjo.

Omejili se bomo na ravninske nosilce. To pomeni, da ima nosilec v smeri, ki je pravokotna na to ravnino konstantno debelino, ki ne vpliva na mehanski odziv nosilca. V skladu s to omejitvijo bomo predpostavili, da je nosilec simetričen glede na to ravnino. Koordinatni sistem potem postavimo tako, da je ta ravnina ravnina xz , nosilec je v smeri osi x , normala na ravnino pa kaže v smeri osi y . Dodatno bomo predpostavili, da je nosilec v referenčnem položaju simetričen tudi glede na ravnino xy . Ker želimo, da je nosilec tudi v deformiranem položaju ravninski nosilec, ga ne smemo obremeniti izven ravnine in bomo zato predpostavili, da so vse obremenitve nosilca v ravnini xz . Dodatno se bomo omejili na obremenitve v prečni smeri. Nalogo, kjer je nosilec obremenjen hkrati tudi v osni smeri rešimo v dveh korakih. Obremenitev razstavimo na prečno in osno obremenitev. Potem rešimo nalogo za vsako obremenitev posebej in rešitvi seštejemo. To lahko storimo, ker sta obe nalogi linearni in je potemtakem vsota rešitev rešitev naloge z vsoto obremenitev.

Vsak ravninski presek nosilca z ravnino yz ima geometrijsko središče. To je točka, ki jo dobimo na enak način kot masno središče lika, ki ima konstantno gostoto. Osi, ki povezuje geometrijska središča vzdolž dolžine nosilca pravimo *centralna os*. Ker smo privzeli, da je nosilec simetričen glede na ravnini xy in xz se centralna os sovpača z osjo x .

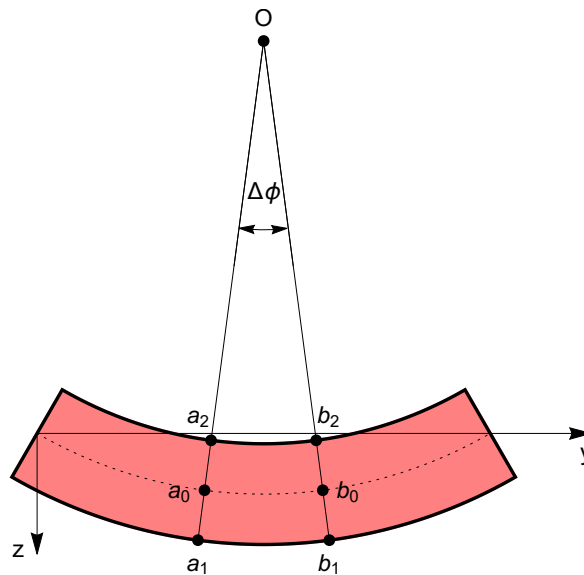
Slika 10.1 shematsko kaže upogib nosilca. Opazimo, da se pri upogibu nekatera vlakna podaljšajo, nekatera pa skrčijo. Konkretno, na sliki se spodnji lok podaljša, zgornji lok pa skrajša. To pomeni, da v nekem vmesnem položaju ni spremembe dolžin. Vlaknu, ki pri deformaciji ne spremeni dolžino pravimo *nevtralna os*. Privzeli bomo, da se v referenčnem položaju koordinatna os x ujema z nevtralno os.

Omejili se bomo na majhne deformacije, konkretno, privzeli bomo, da se ravni preseki nosilca, ki so v referenčnem položaju pravokotni na nevtralno os pri deformaciji deformirajo v ravne preseke, ki so pravokotni na deformirano nevtralno os v deformiranem položaju, glej sliko 10.1. Predpostavili bomo tudi, da v ravninah presekov ni deformacij. Deformacija nosilca je tako v bistvu dana z deformacijo nevtralne osi. Za homogeni nosilec bomo dodatno zahtevali, da se pri deformaciji centralna os ujema z nevtralno. Kaj naj velja za nosilec, ki nima homogenih materialnih lastnosti bomo še spoznali.

Za boljši pregled, bomo vse predpostavke zapisali na enem mestu.

- Dolžina nosilca je bistveno večja od lateralnih dimenzij.
- Nosilec je simetričen glede na ravnini xz in xy .
- Za homogeni nosilec se nevtralna se ujema s centralna os.
- Ravnine pravokotne na nevtralno os v referenčni legi se deformirajo v ravnine, ki so pravokotne na deformirano nevtralno os.
- V ravninah, ki so pravokotne na nevtralno ni deformacij.

Teorija nosilcev, ki temelji na teh predpostavkah se imenuje *inženirska teorija nosilcev*. Pomen teh predpostavk bomo spoznali v nadaljevanju.



Slika 10.1: Upogib nosilca, nevtralna os je označena črtkano.

10.2 Enoosna deformacija vlaken

Izpeljali bomo enačbo za enoosno deformacijo vlaken. Slika 10.1 prikazuje del nosilca v deformiranem položaju. V referenčnem položaju naj ima nosilec obliko pravokotnika. Označenim točkam na sliki v referenčnem položaju pripadajo točke označene z velikimi črkami. Vsa vlakna A_0B_0 , A_1B_1 in A_2B_2 imajo v referenčnem položaju enako dolžino, v deformiranem pa je dolžina vlakna a_2b_2 krajša, a_1b_1 daljša, a_0b_0 pa nespremenjena, saj vlakno A_0B_0 leži na nevtralni osi. Relativna sprememba dolžine vlakna A_iB_i , $i = 1, 2$ je enaka

$$\epsilon = \frac{|a_1b_1|}{|A_1B_1|} - 1 = \frac{|a_1b_1|}{|a_0b_0|} - 1. \quad (10.1)$$

V zadnji enakosti smo upoštevali, da je $|A_1B_1| = |A_0B_0| = |a_0b_0|$. Označimo z R razdaljo $|Oa_0|$. V referenčnem koordinatnem sistemu smo postavili koordinatni sistem z osjo x v smeri nevtralne osi, os z pa smo usmerili navzdol. Točka A_1 ima z koordinato $z_1 > 0$, točka A_2 pa za $z_2 < 0$. Ker v ravnini preseka ni deformacij, je točka a_1 oddaljena od a_0 za z_1 , točka a_2 pa za z_2 .

Iz slike 10.1 vidimo, da je $|a_0b_0| = |Oa_0| \Delta\phi = R\Delta\phi$ in $|a_0b_0| = (R + z_1)\Delta\phi$. Potem iz (10.1) sledi

$$\epsilon = \frac{|a_1b_1|}{|a_0b_0|} - 1 = \frac{R + z_1}{R} - 1 = \frac{z_1}{R}. \quad (10.2)$$

Enačba (10.2) velja za poljubno točko nosilca, kjer z_1 postane z koordinata točke.

Enoosno deformacijo povezuje Hookeov zakon z enosno napetostjo. Iz (10.2) tako dobimo za poljubno točko osno napetost σ v smeri vlakna. Napetost v točki, ki ima v referenčnem položaju z koordinato z je

$$\sigma = E\epsilon = z \frac{E}{R}. \quad (10.3)$$

10.3 Upogibni moment

Sedaj, ko poznamo osno napetost poskusimo izraziti upogibni moment z deformacijo. Naj bo $A(x)$ pravokotni presek na nevtralno os v deformiranem položaju. V vsaki točki preseka deluje napetost dana s formulo (10.3) v smeri normale na presek. Ta napetost je gostota površinske sile na presek. Označimo z \vec{i}' normalo na presek $A(x)$. Nadalje naj bo $\vec{j}' = \vec{j}$ in $\vec{k}' = \vec{i}' \times \vec{j}'$. Iz predpostavke, da preseki na nevtralno os po deformaciji ostanejo pravokotni na deformirano nevtralno os sledi, da presek $A(x)$ leži v ravnini baznih vektorjev \vec{j}' in \vec{k}' . Izhodišče koordinatnega sistema z bazo \vec{i}' , \vec{j}' in \vec{k}' postavimo v geometrijsko središče preseka, torej na nevtralno os.

Pokažimo prvo, da je površinska sila na preseku $A = A(x)$ enaka nič. Izračunajmo

$$\int_A \sigma \vec{i}' dA = \frac{E}{R} \int_A z dA \vec{i}' = \vec{0}. \quad (10.4)$$

V zadnji enakosti smo upoštevali, da je integral enak nič, saj je presek simetričen glede na os z . Dobljeni rezultat se ujema s predpostavko, da nosilec ni obremenjen v osni sili.

Sedaj izračunajmo še upogibni moment $\vec{M} = \vec{M}(x)$. Ker je površinska sila enaka nič, je upogibni moment neodvisen od izbire pola. Za pol izberimo kar koordinatno izhodišče. Tako je

$$\vec{M} = \int_A (y\vec{j}' + z\vec{k}') \times \sigma \vec{i}' dA = \frac{E}{R} \int_A (-zy\vec{k}' + z^2\vec{j}') dA.$$

Zaradi simetrij preseka je

$$\int_A zy dA = 0.$$

Potemtakem je

$$\vec{M} = \frac{E}{R} \int_A z^2 dA \vec{j}' = \frac{EI}{R} \vec{j}, \quad (10.5)$$

kjer smo upoštevali, da je $\vec{j}' = \vec{j}$ in označili

$$I = \int_A z^2 dA. \quad (10.6)$$

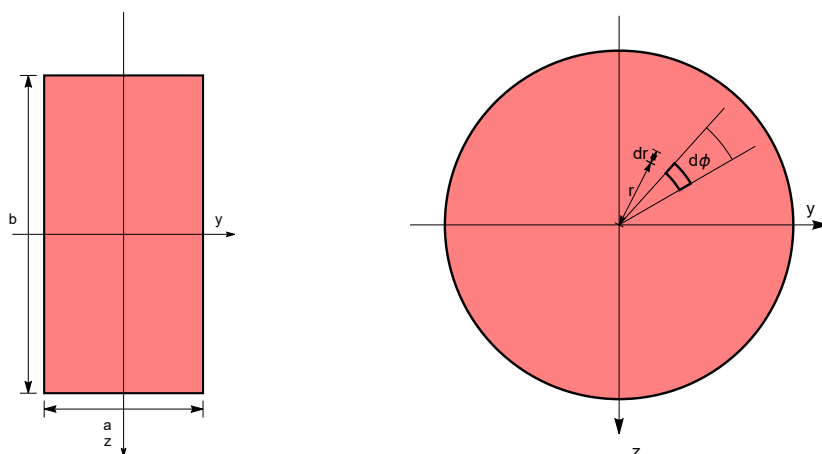
Izrazu I pravimo *ploskovni moment* preseka drugega reda A okrog osi y . Iz izpeljave vidimo, da je upogibni moment v smeri osi y , ker je nosilec simetričen glede na ravnini xy in xz . Formuli (10.5) pravimo *Euler-Bernoullijeva enačba*.

Če kombiniramo enačbi (10.3) in (10.5) dobimo pomembno formulo

$$\sigma = \frac{M}{I} z, \quad (10.7)$$

ki povezuje osno napetost z upogibnim momentom. Vidimo, da z velikostjo upogibnega momenta narašča osna napetost. Kako hitro narašča je odvisno od momenta I . Ploskovni moment preseka je zato pri obravnavi nosilcev zelo pomembna količina. Opazimo tudi, da je napetost največja/najmanjša na robu preseka, kjer je z ekstremalen.

10.4 Ploskovni moment



Slika 10.2: Ploskovna preseka. Levo: pravokotni, desno: krožni.

Ploskovni moment drugega reda ravninskega preseka bom na kratko imenovali kar ploskovni moment. Iz definicije (10.6) vidimo, da je dimenzija ploskovnega momenta enaka m^4 . Ker je moment integral kvadrata z koordinate, je očitno odvisen od postavitve koordinatnega sistema. Kako je odvisen, bomo spoznali v kratkem. Ploskovne momente tipičnih presekov lahko najdemo v literaturi. Kljub temu pa je koristno, če jih za enostavne preseke znamo sami izračunati. Za primer bomo izračunali ploskovni moment pravokotnega in krožnega preseka.

Pravokotni presek dimenzije $a \times b$ je shematsko prikazan na levi sliki slike 10.2. Tu smo koordinatno os z usmerili navzdol, kot smo navajeni pri nosilcih. Ploskovni element v kartezičnih koordinatah yz je $dA = dydz$. Potem je

$$I = \int_A z^2 dA = \int_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a} dy \int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} z^2 dz = 2a \int_0^{\frac{1}{2}b} z^2 dz = \frac{2a}{3} z^3 \Big|_0^{\frac{1}{2}b} = \frac{ab^3}{12}. \quad (10.8)$$

Pri izračunu smo ploskovni integral petvorili v dvakratni integral, en integral po y , drugi pa po z . Pri izračunu integrala po z smo upoštevali, da je funkcija z^2 soda. Iz formule za ploskovni moment pravokotnika vidimo pomembno lastnost, visoki nosilci, velik b v primerjavi z a ima velik ploskovni moment. Ta narašča s tretjo potenco višine nosilca. Dvakrat višji nosilec ima osemkratno večji moment.

Izračunajmo še ploskovni moment krožnega preseka, glej desno sliko slike 10.2. Za izračun integrala bomo uporabili polarne koordinate r in ϕ . Tu je ϕ kot, ki ga radij vektor do točke s koordinatama (y, z) oklepa z osjo y . V polarnih koordinatah je ploskovni moment enak $dA = r dr d\phi$, glej sliko, kjer je označen ploskovni element. Potem je

$$I = \int_A z^2 dA = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{r_0} z^2 r dr.$$

Upoštevajmo, da je $z = r \sin \phi$. Potem je

$$I = \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi d\phi \int_0^{r_0} r^3 dr.$$

Očitno je

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \phi d\phi = \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi$$

in ker je $\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$, je

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \phi \, d\phi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) \, d\phi = \pi.$$

Potem je

$$I = \pi \int_0^{r_0} r^3 \, dr = \frac{\pi}{4} r^4 \Big|_0^{r_0} = \frac{\pi}{4} r_0^4.$$

Pri konstrukciji nosilcev je zaželeno, da je ploskovni moment čim večji. Seveda primerjamo preseke, ki imajo enako ploščino, saj ima v nasprotnem primeru presek z večjo površino prednost. V zvezi s tem je zanimivo vprašanje, kdo ima večji ploskovni moment, kvadrat ali krog. Poglejmo. Ploščina je predpisana, potem je $a^2 = A_0$ in $\pi r_0^2 = A_0$. Izrazimo ploskovna momenta kvadrata I_a in kroga I_r s površino. Velja

$$I_a = \frac{1}{12} a^4 = \frac{1}{12} A_0^2 \quad \text{in} \quad I_r = \frac{\pi}{4} r_0^4 = \frac{1}{4\pi} A_0^2.$$

Ker je $4\pi > 12$, ima kvadrat večji ploskovni moment.

Ker v definiciji ploskovnega momenta integriramo funkcijo z^2 integralu več prinesejo deli preseka, ki so bolj oddaljeni od osi y oziroma je njihova z koordinata po absolutni vrednosti večja. Tako je smiselno namesto polnih nosilcev uporabiti votle nosilce. Pri izračunu ploskovnega momenta votlega nosilca uporabimo naslednjo lastnost. Naj bosta Ω_1 in Ω_2 dva preseka, ki se ne prekrivata. Potem iz lastnosti integrala sledi, da je

$$I(\Omega_1 \cup \Omega_2) = I(\Omega_1) + I(\Omega_2). \quad (10.9)$$

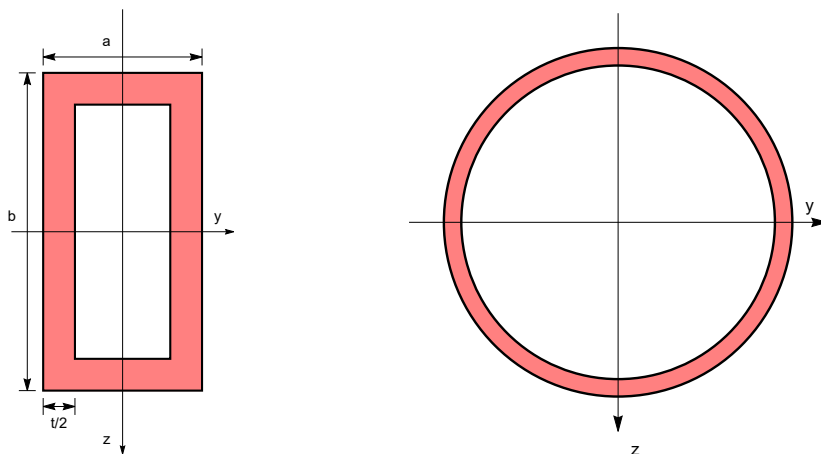
Tu smo z $I(\Omega)$ označili ploskovni moment preseka Ω . Velja pa še ena lastnost. Naj bo $\Omega_1 \subset \Omega_2$. Označimo razliko množic

$$\Omega_2 \setminus \Omega_1 = \{\omega : \omega \in \Omega_2 \quad \text{in} \quad \omega \notin \Omega_1\}.$$

Potem je

$$I(\Omega_2 \setminus \Omega_1) = I(\Omega_2) - I(\Omega_1). \quad (10.10)$$

Te dve lastnosti pogostokrat uporabimo pri računanju ploskovnih momentov. Pri tem se lahko spomnemo, da podobna lastnost velja za računanje masnih središč likov z izrezi.



Slika 10.3: Ploskovna preseka. Levo: votli pravokotni, desno: votli krožni.

Formulo bomo uporabili za izračun votlega pravokotnega in krožnega preseka, glej sliko 10.3. Začnimo z votlim pravokotnim, glej levo sliko na sliki 10.3. Pravokotniku $a \times b$ smo simetrično

izrezali pravokotnik $(a - t) \times (b - t)$. Če je t majhen, smo dobili tankostenski pravokotni presek. Ker ima izrezan pravokotnik enako središče kot večji pravokotnik, smemo takoj uporabiti formulo (10.10). Kasneje bomo spoznali, kaj moramo prej še narediti, če pravokotnika nimata enakega središča. Po formuli (10.10) je ploskovni presek votlega kvadratnega preseka enak

$$I = \frac{ab^3}{12} - \frac{(a-t)(b-t)^3}{12}.$$

V primeru tankostenskega preseka je t v primerjavi z a in b majhen. Če zanemarimo člene ki so sorazmerni s t^2 in višjimi potencami, ploskovni moment aproksimiramo z

$$I \approx \frac{1}{12}(ab^3 - ab^3 + tb^3 + 3ab^2t) = \frac{tb^2}{12}(b + 3a).$$

Za votli krožni presek, ponovno predpostavimo, da ima krožni izrez s polmerom $r_0 - t$ enako središče kot zunanji, je

$$I = \frac{\pi}{4}(r_0^4 - (r_0 - t)^4).$$

Za tankostenski krožni izrez, $t \ll r_0$, aproksimiramo

$$I \approx \frac{\pi}{4}(r_0^4 - r_0^4 + r_0^3t) = \frac{\pi r_0^3 t}{4}. \quad (10.11)$$

Izpeljali smo dovolj teorije, da si lahko pogledamo pomembno uporabo. Enostavno podprti nosilec dolžine $l = 1$ m s tankostenskim krožnim presekom z zunanjim polmerom 4 cm je točkovno obremenjen s silo $F = 2$ kN na svoji polovici. Naša naloga je, da določimo minimalno debelino preseka, da bo osna napetost v nosilcu pod dopustno vrednostjo $\sigma_0 = 120$ MPa.

Iskano debelino bomo določili z uporabo formule (10.7). Nalogo bomo rešili v dveh korakih, prvo bomo izračunali maksimalno vrednost upogibnega momenta. Nato bomo v formulo (10.7) vstavili moment tankostenskega preseka in določili njegovo debelino. Iz obravnave nosilcev poznamo maksimalno vrednost upogibnega momenta za točkovno obremenjen nosilec, ki je enostavno podprt. Maksimalna vrednost upogibnega momenta je $M_{\max} = \frac{1}{4}lF$. Tu smo predpostavili, da je nosilec obremenjen navzdol oziroma, da je $F > 0$. Po formuli (10.7) je osna napetost odvisna od z koordinate. Največja vrednost je potem dosežena pri največjem z , to je na robu. Tako je

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I} z_{\max} = \frac{lF}{4I} r_0.$$

V dobljen izraz vstavimo formulo (10.11) za ploskovni moment tankostenskega krožnega preseka. Potem je

$$\sigma_{\max} = \frac{lF}{\pi r_0^3 t} r_0 = \frac{lF}{\pi r_0^2 t}.$$

Veljati mora $\sigma_{\max} < \sigma_0$. Od tod dobimo pogoj

$$t > \frac{lF}{\pi r_0 \sigma_0} = 3.3 \text{ mm}.$$

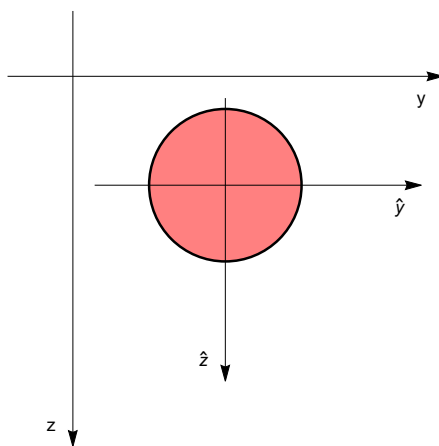
Vidimo, da je iskana debelina v primerjavo s polmerom r_0 dovolj majhna, da velja tankostenski približek. Če približka ne bi uporabili, bi dobili enačbo, ki jo ne bi znali rešiti samo numerično.

Kot rečeno, je pravkar rešena naloga pomembna naloga pri dizajniranju nosilca. Dimenzije nosilca, dolžino in geometrične lastnosti preseka moramo določiti tako, da osna sila ostane v predpisanih mejah. V splošnem se lahko presek nosilca vzdolž njegove dolžine spreminja. Ker to nalogo precej uteži, se bomo omejili na nosilec s konstantnim presekom. Naloge se lotimo po korakih.

- Prvo moramo določiti potek upogibnega momenta $M(x)$ in poiskati, kje upogibni moment doseže ekstremalne vrednosti.
- Za izbrano obliko nosilca moramo potem izračunati ploskovni moment in poiskati točke na preseku, kje je z koordinata ekstremalna.
- Izračunane ekstremalne vrednosti vstavimo v formulo (10.7) iz katere potem ugotovimo, ali so napetosti za izbrano obliko in dimenzija nosilca v predpisanem območju.

Prvi korak že dobro poznamo od prej. Za drugi korak, izračun ploskovnega momenta pa še nismo povedali dovolj. Pri izračunu votlega pravokotnega preseka smo privzeli, da ima izrez enako središče kot zunanji del. Povedati moramo še, kaj naredimo, če ta pogoj ni izpolnjen. V ta namen si pogledjmo, kako je ploskovni moment odvisen od postavitve koordinatnega sistema.

10.4.1 Izrek o paralelnih oseh



Slika 10.4: Paralelna koordinatna sistema.

Ploskovni moment osnovnih likov praviloma poznamo v koordinatnem sistemu, ki ima središče v središču lika. Če je presek sestavljen iz večih osnovnih likov, moramo vse ploskovne momente teh likov zapisati v koordinatnem sistemu, ki ima izhodišče v središču preseka. To pomeni, da potrebujemo pravilo, ki nam zapis ploskovnega momenta iz enegea koordinatnega sistema prevede na zapis v drugem koordinatnem sistemu. Pri tem se bomo omejili na koordinatna sistema, ki imata vzporedne koordinatne osi, razlikujeta se samo v izhodišču. Iskanemu pravilu pravimo izrek o paralelnih oseh.

Slika 10.4 kaže dva koordinatna sistema. Koordinatni sistem $y'z'$ ima izhodišče v središču lika. V tem koordinatnem sistemu je ploskovni moment enak I' . Koordinatni sistem yz ima izhodišče v drugi točki, osi pa ima enako usmerjen kot prvi. Splošnega primera, ko so smeri koordinatnih sistemov različne ne bomo obravnavali. V koordinatnem sistemu yz ima središče lika koordinati y_* in z_* . Zveza med koordinatama poljubne točke je

$$z = z_* + z'$$

V koordinatnem sistemu yz je moment enak

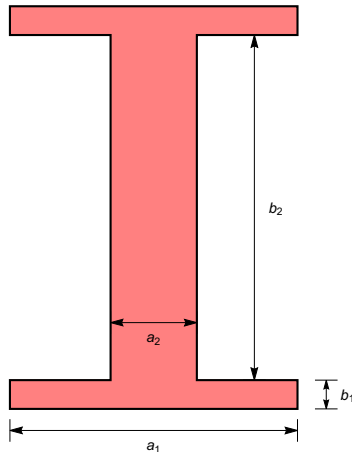
$$I = \int_A z^2 dA = \int_A (z_* + z')^2 dA = z_*^2 \int_A dA + 2z_* \int_A z' dA + \int_A z'^2 dA.$$

V drugem in tretjem integralu smo z_* zapisali pred integral, ker je z_* konstanta. Upoštevajmo, da je

$$\int_A dA = |A| \quad \text{in} \quad \int_A z' dA = 0,$$

saj je v koordinatnem sistemu $y'z'$ središče lika v izhodišču tega koordinatnega sistema. Tako dobimo

$$I = z_*^2 |A| + I'. \quad (10.12)$$



Slika 10.5: I nosilec.

Za primer uporabe izreka o paralelnih oseh bomo izračunali ploskovni moment preseka I nosilca, glej sliko 10.5. Lik je sestavljen iz treh pravokotnikov, spodnji in zgornji pravokotnik in pokončno postavljen pravokotnik. Koordinatni sistem postavimo v središče preseka I. Pokončno postavljen pravokotnik ima masno središče kar v koordinatnem izhodišču, z koordinata središča spodnjega oziroma zgornjega pravokotnika pa je $\frac{1}{2}(b_1 + b_2)$ oziroma $-\frac{1}{2}(b_1 + b_2)$. Potem je po formuli (10.8) in (10.12)

$$I = \frac{a_2 b_2^3}{12} + 2 \left(\frac{1}{4} (b_1 + b_2)^2 a_1 b_1 + \frac{a_1 b_1^3}{12} \right) = \frac{a_2 b_2^3}{12} + \frac{1}{2} (b_1 + b_2)^2 a_1 b_1 + \frac{a_1 b_1^3}{6}.$$

Tu smo upoštevali, da sta spodnji in zgornji pravokotnik enaka in da v (10.12) nastopa z koordinata središča s kvadratom. Če je b_1 v primerjavi z a_1 in b_2 majhen, lahko uporabimo aproksimacijo

$$I \approx \frac{a_2 b_2^3}{12} + \frac{1}{2} a_1 b_1 b_2^2.$$

V praksi pogostokrat srečamo I nosilce. Zaradi svoji višine b_2 imajo velik moment. Spodnji in zgornji pravokotnik sta dodana zaradi stabilnosti. Visoki in tanki pravokotnik ima velik moment okrog vodoravne osi, to je osi y in majhen okrog navpične osi, osi z . To pomeni, da dobro prenaša obremenitve v smeri osi z , slabo pa v smeri y . V praksi obremenitev nosilca ni povsem simetrična. Ta asimetrija bi lahko nosilec s tankim presekom nevarno upognila v lateralni smeri, zato tankemu pravokotniku dodamo še spodnji in zgornji pravokotnik in tako dobimo I nosilec.

10.5 Kompozitni nosilec

V primeru, ko je nosilec kompozitni oziroma, ko presek ni homogen, predpostavka, da je nevtralna os tudi centralna ne velja več. Opustimo predpostavko, da je nevtralna os centralna in označimo

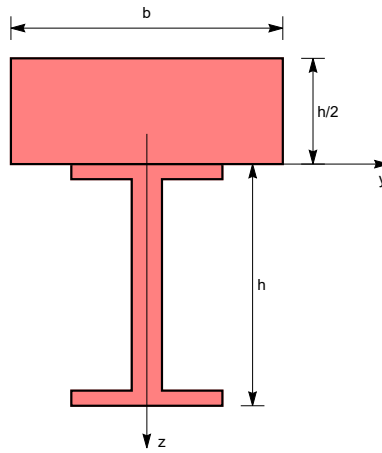
z z_0 koordinato z centralne osi. Potem je namesto (10.3) deformacija centralne osi dana z

$$\sigma = E\epsilon = (z - z_0)\frac{E}{R}. \quad (10.13)$$

Koordinato z_0 določa pogoj, da je površinska sila na preseku enaka nič. Potemtakem, sedaj namesto (10.4) velja

$$0 = \int_A \sigma \, dA = \frac{1}{R} \int_A E(z - z_0) \, dA. \quad (10.14)$$

Sedaj Youngovega modula nismo zapisali pred integral, ker je nosilec heterogen in je E odvisen od položaja na preseku. V primeru, če je presek homogen, sledi iz (10.14), da je $z_0 = z_* = 0$, saj predpostavka, da je centralna os koordinatna os x še vedno velja.



Slika 10.6: Plošča na nosilcu.

Poglejmo si primer kompozitnega nosilca. Na jekleni I nosilec višine h in površine $h^2/6$ je postavljena betonska plošča dimenzije $b \times h/2$. Določi širino betonske plošče b tako, da bo v betonski plošči kompresijsko napetostno stanje, v nosilcu pa natezno. Youngov modul jekla je 210 GPa, betona pa 35 GPa.

Koordinatni sistem postavimo na stiku nosilca in plošče tako kot kaže slika 10.6. Potem je v nosilcu $z > 0$, v plošči pa $z < 0$. Za $z_0 = 0$ je potem po formuli (10.13) v plošči kompresijska napetost, v nosilcu pa natezna. Tu smo privzeli, da je $R > 0$, kar pomeni, da je kompozitni nosilec obremenjen navzdol. Pri $z_0 = 0$ potem iz (10.14) sledi, da je

$$0 = \int_A E(z - z_0) \, dA = E_1 \int_{A_1} z \, dA + E_2 \int_{A_2} z \, dA,$$

kjer smo z A_1 označili I nosilec, z A_2 pa ploščo. Integrala sta enaka produktu površine lika $|A_i|$ in z koordinate z_i^* njegovega središča. Upoštevajmo, da je $A_1 = h^2/6$, $z_1^* = h/2$, $A_2 = bh/2$, $z_2^* = -h/4$. Potem je

$$\frac{h^3 E_1}{12} = \frac{bh^2 E_2}{8}$$

in od tod

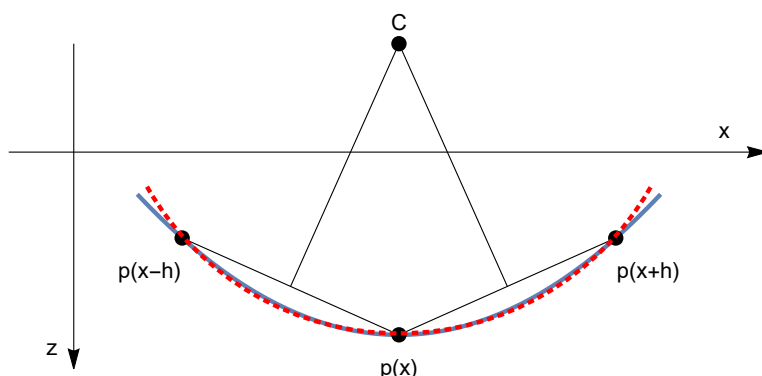
$$b = \frac{2E_1}{3E_2} h = 4h.$$

10.6 Upogib nosilca

Upogib nosilca v inženirski teoriji nosilcev je določen z upogibom nevtralne osi. Pri definiciji osne deformacije vlaken nosilca smo deformiran položaj nevtralne osi lokalno aproksimirali s krožnico s polmerom R . Tako smo ugotovili, da je relativna infinitezimalna sprememba dolžnin vlaken enaka $\epsilon = z/R$, kjer je z koordinata vlakna na prerezu. Tu velja poudariti, da je R lahko poljubnega predznaka. Če je nosilec ukrivljen v smeri osi z , je R pozitiven, če pa je nosilec ukrivljen v negativni smeri osi z je R negativen, saj se vlakna za $z < 0$ raztegnejo. Zato je $\epsilon = z/R > 0$ in potemtakem je $R < 0$.

Aproksimacija krivulje s krožnico je prikazana na sliki 10.7. Kako dobimo to aproksimacijo? Naj bo krivulja podana kot graf funkcije $z = w(x)$. Aproksimacijo krivulje s krožnico v točki $p(x)$ s koordinatami $(x, w(x))$, dobimo tako, da skozi točke $p(x-h)$, $p(x)$ in $p(x+h)$ potegnemo krožnico. Krožnica je enolično določena, če točke niso na isti premici, glej sliko 10.7. Za dani h tako dobimo polmer krožnice $R(h) > 0$. Če je krivulja gladka, vsaj dvakrat zvezno odvedljiva, obstaja limita $R_0 = \lim_{h \rightarrow 0} R(h)$. Ker je $R(h) > 0$, je tudi $R_0 \geq 0$. Velja torej $R_0 = |R|$. Predznak krivinskega radija R bomo določili kasneje. Direktni račun pokaže, tu uporabimo enakost $w(x \pm h) = w(x) \pm w'(x)h + \frac{1}{2}w''(\xi)h^2$, kjer je ξ med x in $x \pm h$, da je

$$\frac{1}{R_0} = \left| \frac{w''(x)}{(1 + (w'(x))^2)^{3/2}} \right|. \quad (10.15)$$



Slika 10.7: Aproksimacija krivulje s krožnim lokom.

Dobili smo izraz, ki je nelinearen v w . Če se omejimo na majhne deformacije, je upogib nevtralne osi na dolžino nosilca majhen. To pomeni, da je odvod $|w'|$ majhen. Potem je člen $|w'|^2$ v primerjavi z 1 majhen in ga v okviru linearne teorije zanemarimo. Tako je v linearni teoriji upogiba nosilca

$$\frac{1}{R_0} = |w''(x)|.$$

Določiti moramo še predznak R . Če je nosilec ukrivljen v smeri osi z , glej sliko 10.8, potem kot, ki ga oklepa tangenta na nevtralno os z osjo x z naraščajočim x pada. Potemtakem je w' padajoča funkcija spremenljivke x . Odvod padajoče funkcije je negativen, zato je v tem primeru $w'' < 0$. Ker je za nosilec, ki je upognjen v smeri osi z krivinski polmer R pozitiven, je

$$\frac{1}{R} = -w''(x). \quad (10.16)$$

V primeru, da je nosilec upognjen v smer negativne osi z , kot narašča in je $w'' > 0$. V tem primeru je $R < 0$, zato formula (10.16) velja tudi za nosilec upognjen v smer negativne osi z .



Slika 10.8: Tangenta na nevtralno os. Levo: upogib v smeri osi z , kot tangente pada z naraščajočim x , $\theta_1 > \theta_2$. Desno: upogib v negativni smeri osi z , kot tangente narašča z x , $\theta_1 < \theta_2 < 0$.

Sedaj, ko poznamo ukrivljenost $1/R$, lahko zapišemo upogibni moment v obliki

$$M = \frac{EI}{R} = -EIw'' . \quad (10.17)$$

Vidimo, da je enačba pri znanem upogibnem momentu diferencialna enačba drugega reda za $w(x)$. Če poznamo upogibni moment, potem lahko uporabimo (10.17) za določitev upogiba nosilca. Ker je to diferencialna enačba drugega reda, je rešitev enolično določena z dvema robnima pogoje. Predpišemo lahko vrednost upogiba $w(x)$ ali njegovega odvoda $w'(x)$ na krajišču nosilca. V točki, kjer je nosilec podprt, je upogib enak nič, zato je tam $w(x)$ enak nič. V konzolnem vpetju pa je odvod $w'(x)$ enak nič. Seveda pa morajo biti robni pogoji usklajeni z upogibnim momentom. Če je $M(x)$ naprimer upogibni moment konzolno vpetega nosilca, smemo uporabiti samo robne pogoje za konzolno vpeti nosilec. Podobno velja tudi za podprti nosilec.

Kako določimo upogibni moment smo spoznali pri statiki. Ugotovili smo, da v primeru linijske obremenitve nosilca velja

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -q(x) . \quad (10.18)$$

Tu je $q(x)$ gostota prečne linijske obremenitve nosilca. Če kombiniramo enačbi (10.17) in (10.18) dobimo

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2w}{dx^2} \right) = q(x) . \quad (10.19)$$

Produktu EI pravimo *upogibna togost*. Če je nosilec homogen in ima konstanten presek, je upogibna togost konstantna. V tem primeu se enačba poenostavi v

$$\frac{d^4w}{dx^4} = \frac{1}{EI} q . \quad (10.20)$$

Enačba (10.19) velja samo na območju nosilca, kjer je nosilec obremenjen smo linijsko, ne velja pa v točki, kjer je nosilec točkovno obremenjen. Konkretno, če je prevesni nosilec linijsko obremenjen, velja (10.19) oziroma (10.20) za dela nosilca, ki sta levo in desno od prevesne podpore, ne velja pa vzdolž cele dolžine nosilce, ker v prevesni podpori deluje na nosilec točkovna sila podpore. Kako tako nalogo rešimo, bomo spoznali kasneje v nadaljevanju.

10.7 Robni pogoji

Enačba (10.19) oziroma (10.20) je enačba četrtega reda, zato ima njena splošna rešitev štiri konstante. Te konstante določajo robni pogoji. Poleg pogojev na $w(x)$ in $w'(x)$, ki smo jih že spoznali, lahko predpišemo tudi $w''(x)$. Enačba (10.17) določa upogibni moment. Če je ta znan, je potem po (10.17) znan tudi $w''(x)$ v tej točki. Konkretno, v členkasti podpori je upogibni moment enak

nič, zato je tam $w''(x)$ enak nič. V določenih primerih, pa robni pogoj določa $w'''(x)$. Vemo, da je odvod upogibnega momenta enak prečni sili. Če je torej prečna sila predpisana, potem je s tem predpisom posredno določen tudi tretji odvod upogiba. V posebnem primeru, ko je krajišče nosilca prosto, je prečna sila enaka nič in zato je v tej točki $w'''(x)$ enak nič.

Za boljši pregled naštejmo vse robne pogoje na enem mestu.

- Nosilec je podprt v točki $x = a$. Potem je $w(x = a) = 0$.
- Nosilec je konzolno vpet v točki $x = a$. Velja $w'(x = a) = 0$.
- V členkasti podpori $x = a$ je $w''(x = a) = 0$. Splošneje, če je v točki $x = a$ predpisan upogibni moment $M(a)$, je $w''(x = a) = -M(a)/EI$.
- Na prostem koncu je $x = a$ je $w'''(x = a) = 0$. Splošneje, če je v točki $x = a$ prečna sila na nosilec enaka $Q(a)$, je $w'''(x = a) = -Q(a)/EI$.

10.8 Primeri

10.8.1 Upogib linijsko obremenjenega nosilca

Za primer si pogledjmo upogib enostavno podprtega nosilca dolžine l , ki je obremenjen s konstantno linijsko obremenitvijo z gostoto q_0 . Rešiti moramo enačbo

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{1}{EI} q_0 \quad (10.21)$$

z robnimi pogoji

$$w(0) = w(l) = 0 \quad \text{in} \quad w''(0) = w''(l) = 0. \quad (10.22)$$

Privzeli smo, da je nosilec homogen s konstantnim presekom. Iz (10.21) sledi

$$w''' = \frac{q_0}{EI} x + C_1 \quad (10.23)$$

in potem

$$w'' = \frac{q_0}{2EI} x^2 + C_1 x + C_2. \quad (10.24)$$

Nadalje je

$$w' = \frac{q_0}{6EI} x^3 + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

in končno

$$w = \frac{q_0}{24EI} x^4 + \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4. \quad (10.25)$$

Konstante določimo iz robnih pogojev (10.22). Hitro vidimo, da iz robnih pogojev pri $x = 0$ sledi $C_4 = C_2 = 0$. Upoštevajmo še pogoja pri $x = l$. Dobimo dve enačbi

$$\begin{aligned} 0 = w''(l) &= \frac{q_0 l^2}{2EI} + C_1 l \\ 0 = w(l) &= \frac{q_0 l^4}{24EI} + \frac{l^3}{6} C_1 + C_3 l. \end{aligned}$$

Iz prve enačbe dobimo

$$C_1 = -\frac{q_0 l}{2EI} \quad (10.26)$$

in potem iz druge

$$C_3 = -\frac{q_0 l^3}{24EI} - \frac{C_1 l^2}{6} C_1 = \frac{q_0 l^3}{24EI}.$$

Rešitev je

$$w = \frac{q_0}{24EI} x^4 - \frac{q_0 l}{12EI} x^3 + \frac{q_0 l^3}{24EI} x = \frac{q_0}{24EI} (x^4 - 2lx^3 + l^3 x).$$

Zanima nas še maksimalni upogib. Iščemo ekstrem funkcije $w(x)$. Ekstrem nastopi tam kjer je $w'(x) = 0$. V našem primeru nam ni potrebn iskati korena te enačbe, saj iz simetrije naloge sledi, da je iskana točka na polovici. Vstavimo v rešitev $x = \frac{1}{2}l$. Tako dobimo

$$w_{max} = \frac{q_0}{24EI} \left(\frac{l^4}{16} - 2l \frac{l^3}{8} + l^3 \frac{l}{2} \right) = \frac{5q_0 l^4}{384EI}.$$

Poglejmo konkretni primer za aluminijasti nosilec $E = 70$ GPa dolžine 1 m s kvadratnim presekom $a = 3$ cm obremenjen z linijsko gostoto $q_0 = 10$ kN/m. Pri teh vrednostih je $w_{max} = 2.75$ cm. V tem primeru lahko še uporabimo linearno aproksimacijo, saj je maksimalna vrednost odvoda $w'(x)$ enaka 0.088.

10.8.2 Upogib točkovno obremenjenega nosilca

Naslednji primer bo izračun upogiba točkovno obremenjenega nosilca. Obremenitev ni linijska, zato moramo razdeliti nosilec v dva dela, na levi in desni del od točke obremenitve. Za vsak del potem velja enačba (10.19) s $q(x) = 0$. Tako dobimo levo in desno rešitev. Rešitvi nato sklopimo z ustreznimi robnimi pogoji na stiku.

Namesto te poti bomo raje uporabili drugo pot, k temelji na tem, da upogibni moment točkovno obremenjenega nosilca že poznamo. Namesto enačbe (10.19) bomo tako reševali enačbo (10.17). To lahko vedno storimo, kadar je upogibni moment znan. Če je sistem sil na nosilec statično določen, je upogibni moment nosilca določen in potemtakem lahko v teh primerih upogib nosilca določimo direktno z reševanjem (10.17). Ni pa vedno tako. Nosilec, ki je podprt v treh točkah je statično nedoločen, zato upogibnega momenta ne moremo v naprej določiti. Kako to nalogo rešimo bomo spoznali v nadaljevanju.

Upogibni moment enostavno podprtega nosilca dolžine l , ki je točkovno obremenjen s prečno silo F v razdalji a od levega krajišča je

$$M = \begin{cases} x(1 - \frac{a}{l})F & 0 \leq x \leq a \\ a(1 - \frac{x}{l})F & a \leq x \leq l. \end{cases}$$

Moment je zvezen v točki obremenitve $x = a$. Ker je moment podan odsekom, moramo enačbo rešiti za vsak del posebej. Začnimo z $0 \leq x \leq a$. Enačbo (10.17) preoblikujemo v

$$w'' = -\frac{F}{EI} (1 - \frac{a}{l})x.$$

Podobno kot že prej se vprašamo, kaj moramo odvajati, da dobimo x . Odgovor je $\frac{1}{2}x^2 + C_1$, kjer je C_1 poljubna konstanta. Potem je

$$w' = -\frac{F}{2EI} (1 - \frac{a}{l})x^2 + C_1.$$

Da dobimo x^2 moramo odvajati $\frac{1}{3}x^3 + C_2$. Tako je

$$w = -\frac{F}{6EI} (1 - \frac{a}{l})x^3 + C_1 x + C_2 \quad \text{za } 0 \leq x \leq a. \quad (10.27)$$

Poglejmo sedaj rešitev za desni del. Enačba je

$$w'' = -\frac{F}{EI}a\left(1 - \frac{x}{l}\right) = -\frac{aF}{EI} + \frac{aF}{EI}x.$$

S podobnim sklepom kot prej sledi

$$w' = -\frac{aF}{EI}x + \frac{aF}{2EI}x^2 + C_3$$

in

$$w = -\frac{aF}{2EI}x^2 + \frac{aF}{6EI}x^3 + C_3x + C_4 \quad \text{za } a \leq x \leq l. \quad (10.28)$$

Določiti moramo še konstante C_i , $i = 1, 2, 3, 4$. Konstante določajo robni pogoji. Nosilec je na krajiščih podprt, zato je tam upogib enak nič. Velja torej $w(0) = w(l) = 0$. Iz (10.27) potem takoj sledi $C_2 = 0$ iz (10.28) pa

$$0 = -\frac{aF}{2EI}l^2 + \frac{aF}{6EI}l^3 + C_3l + C_4 = -\frac{aF}{3EI}l^2 + C_3l + C_4. \quad (10.29)$$

Potrebujemo še dve enačbi. Te dve enačbi sledita iz pogojev na stiku obeh delov pri $x = a$. V tej točki se mora upogib levega dela ujemati z upogibom desnega dela. Označimo rešitev (10.27) levega dela z w_l , desnega dela (10.28) pa z w_d . Veljati mora torej $w_l(x = a) = w_d(x = a)$ in tudi $w'_l(x = a) = w'_d(x = a)$, saj je $w(x)$ dvakrat zvezno odvedljiva in potemtaka tudi enkrat zvezno odvedljiva v točki $x = a$. Tako dobimo enačbi

$$-\frac{F}{2EI}\left(1 - \frac{a}{l}\right)a^2 + C_1 = -\frac{aF}{EI}a + \frac{aF}{2EI}a^2 + C_3, \quad (10.30)$$

$$-\frac{F}{6EI}\left(1 - \frac{a}{l}\right)a^3 + C_1a = -\frac{aF}{2EI}a^2 + \frac{aF}{6EI}a^3 + C_3a + C_4. \quad (10.31)$$

Od (10.31) odštejemo (10.30). Po krajšem računu dobimo

$$C_4 = -\frac{a^3}{EI}F.$$

Iz enačbe (10.29) potem sledi

$$C_3 = \frac{a^3 + 2al^2}{6EI}F$$

in končno iz (10.30)

$$C_1 = \frac{a(a^2 - 3al + 2l^3)}{6EI}F.$$

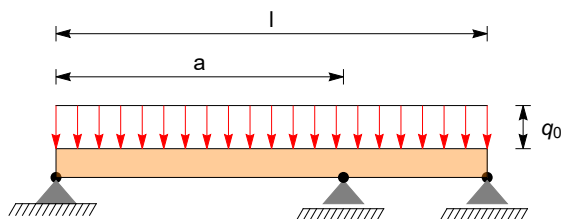
V posebnem primeru $a = l/2$ je

$$C_1 = \frac{l^2}{16EI}F, \quad C_3 = \frac{3l^3}{16}F \quad \text{in} \quad C_4 = -\frac{l^3}{48EI}F.$$

Maksimalni upogib je potem očitno na polovici in je enak

$$w_{max} = w_l(l/2) = -\frac{F}{12EI} \frac{l^3}{8} + \frac{l^2 F}{16EI} \frac{l}{2} = \frac{Fl^3}{48EI}.$$

Za primer izračunajmo maksimalni upogib za enake podatke kot pri linijsko obremenjenem nosilcu. Za točkovna obremenitev bomo vzeli $F = q_0l = 10\text{ kN}$. Za te vrednosti je $w_{max} = 4.41\text{ cm}$, kar je za faktor 1.6 več kot pri linijsko obremenjenem nosilcu. Razlaga je očitna, pri točkovnem je vsa obremenitev skoncentrirana v točki maksimalnega upogiba, pri linijskem pa je obremenitev enakomerno razporejena vzdolž nosilca. Faktor 1.6 je neodvisen od materialnih in geometrijskih podatkov nosilca.



Slika 10.9: Tritočkovno podprt nosilec.

10.8.3 Tritočkovno podprt nosilec

Poglejmo še primer tritočkovno podprtega nosilca, glej sliko 10.9. Nosilec je obremenjen s konstantno linijsko obremenitvijo z gostoto q_0 . Ker je določitev sil podpor statično nedoločen problem, upogibnega momenta v naprej ne moremo izračunati. Vmesna podpora deluje na nosilec s točkovno silo, zato nosilec razdelimo na dva dela, na levi del, levo od vmesne podpore in desni del, desno od vmesne podpore. Na vsakem delu, pravimo tudi polju, je obremenitev linijska, zato tam velja enačba (10.19) za vak del posebej. Upogib na levem delu označimo z w_l , na desnem delu pa w_d . Potem je

$$w_l'''' = \frac{q_0}{EI} \quad \text{in} \quad w_l(0) = 0, \quad w_l''(0) = 0 \quad (10.32)$$

in

$$w_d'''' = \frac{q_0}{EI} \quad \text{in} \quad w_d(l) = 0, \quad w_d''(l) = 0. \quad (10.33)$$

Splošno rešitev (10.25) že poznamo. Rešitev (10.32) za levi del je tako

$$w_l(x) = \frac{q_0}{24EI}x^4 + C_1x^3 + C_3x. \quad (10.34)$$

Rešitev za desni del lahko dobimo tako, da upoštevamo robna pogoja pri $x = l$ in na ta način eliminiramo dve konstanti v splošni rešitvi. Račun je nekoliko siten, zato bomo obrali drugo pot. Opazimo, da za $w(x) = w_l(x - l)$ velja $w(l) = 0$, $w''(l) = 0$ in

$$w'''' = \frac{q_0}{EI}.$$

Potemtakem, je to rešitev naloge (10.33) in tako

$$w_d(x) = \frac{q_0}{24EI}(x - l)^4 + C_2(x - l)^3 + C_4(x - l), \quad (10.35)$$

kjer smo sedaj konstanti označili z C_2 in C_4 .

Konstante C_i , $i = 1, 2, 3, 4$ določajo pogoji na stiku. Velja

$$\begin{aligned} w_l(a) &= 0, \\ w_l(a) &= w_d(a), \\ w_l'(a) &= w_d'(a), \\ w_l''(a) &= w_d''(a). \end{aligned}$$

Prvi pogoj pravi, da je nosilec podprt v $x = a$, ostali trije pa, da nosilec v srednji podpori ni prelomljen. Tu smo uporabili dejstvo, da je nevtralna os nosilca v točki točkovne obremenitve dvakrat zvezno odvedljiva. Enačbe so za splošni $a \in (0, l)$ precej nepregledne, zato se bomo omejili

na primer $a = \frac{1}{2}l$. Po poenostavitvi tako dobimo enačbe:

$$\begin{aligned} 48C_1l^2 + 192C_3 &= -\frac{l^3q_0}{EI}, \\ C_2l^2 + C_1l^2 + 4C_3 + 4C_4 &= 0, \\ 18C_1l^2 - 18C_2l^2 + 24C_3 - 24C_4 &= -\frac{l^3q_0}{EI}, \\ C_2 + C_1 &= 0. \end{aligned}$$

Hitro vidimo, da je $C_2 = -C_1$ in $C_4 = -C_3$. Tako dobimo sistem

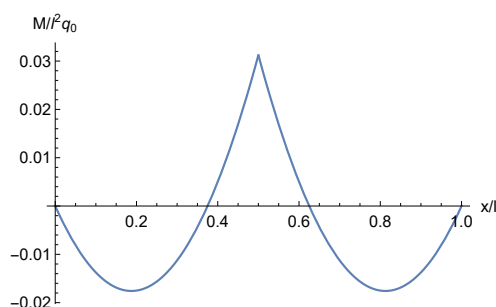
$$\begin{aligned} 48l^2C_1 + 192C_3 &= -\frac{l^3q_0}{EI}, \\ 36l^2C_1 + 48C_3 &= -\frac{l^3q_0}{EI}. \end{aligned}$$

Odštejemo drugo enačbo od prve. Potem je $12l^2C_1 + 144C_3 = 0$ in $C_3 = -\frac{1}{12}l^2C_1$. Iz druge enačbe potem dobimo C_1 . Iskane konstante so tako

$$C_1 = -\frac{q_0l}{32EI}, \quad C_2 = \frac{q_0l}{32EI}, \quad C_3 = \frac{q_0l^3}{384EI}, \quad C_4 = -\frac{q_0l^3}{384EI}.$$

Rešitev je potem

$$\begin{aligned} w_l(x) &= \frac{q_0}{384EI} (16x^4 - 12lx^3 + l^3x), \\ w_d(x) &= \frac{q_0}{384EI} (16(x-l)^4 + 12l(x-l)^3 - l^3(x-l)). \end{aligned} \quad (10.36)$$



Slika 10.10: Brezdimenzijski potek upogibnega momenta trotočkovno podprtega nosilca.

Upogib nosilca je določen. Sedaj nas zanima potek upogibnega momenta in sile podpor. Upogibni moment določimo po (10.17). Iz (10.36) dobimo takoj

$$\begin{aligned} M_l(x) &= -\frac{1}{2}q_0 \left(x^2 - \frac{3}{8}lx \right), \\ M_d(x) &= -\frac{1}{2}q_0 \left((x-l)^2 + \frac{3}{8}l(x-l) \right). \end{aligned}$$

Graf upogibnega momenta je narisana na sliki 10.10. Na sliki se lepo vidi prelom upogibnega momenta v srednji podpori. Prečna sila je enaka odvodu upogibnega momenta. Potem je

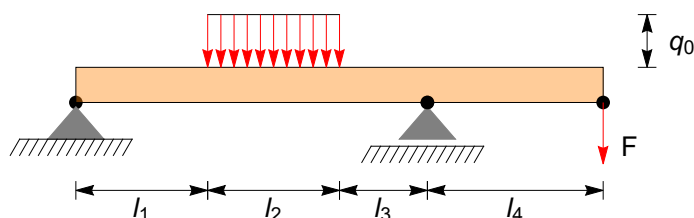
$$\begin{aligned} Q_l(x) &= -\frac{1}{2}q_0 \left(2x - \frac{3}{8}l \right), \\ Q_d(x) &= -\frac{1}{2}q_0 \left(2(x-l) + \frac{3}{8}l \right). \end{aligned}$$

Sila leve podpore je $A_1 = Q_l(x = 0) = \frac{3}{16}lq_0$. Zaradi simetrije je sila desne podpore $A_3 = A_1$ enaka sili leve podpore. Ker podpore uravnotežijo celotno obremenitev nosilca lq_0 , je sila srednje podpore A_2 enaka

$$A_2 = lq_0 - A_1 - A_3 = lq_0 - \frac{3}{8}lq_0 = \frac{5}{8}lq_0.$$

To vrednost lahko dobimo tudi tako, da izračunamo skok prečne sile v srednji podpori. Vidimo, da je srednja podpora bolj obremenjena kot krajiščni podpori.

10.8.4 Splošni primer



Slika 10.11: Prevesni nosilec s točkovno in linijsko obremenitvijo.

Pristop s katerim smo rešili nalogo uporabimo na nalogah, kjer je nosilec hkrati obremenjen z linijsko in točkovno obremenitvijo. Na sliki 10.11 je prikazan prevesni nosilec, ki je linijsko obremenjen na enem delu, točkovno pa na prevesnem koncu. Nosilec razdelim na štiri polja dolžine l_i , $i = 1, \dots, 4$. Upogib na i -tem polju označimo z $w_i(x)$. Polja se stikajo v točkah $a_1 = l_1$, $a_2 = l_1 + l_2$ in $a_3 = l_1 + l_2 + l_3$. Dolžina nosilca je $l = l_1 + l_2 + l_3 + l_4$. Definirajmo $q_1 = q_3 = q_4 = 0$ in $q_2 = q_0$. Upogib nosilca i -tem polju je rešitev enačbe

$$w_i''''(x) = \frac{q_i}{EI}.$$

Splošna rešitev enačbe je oblike (10.25), kjer ima vsako polje svoje konstante C_k^i , $k = 1, \dots, 4$. Konstante določajo robni pogoji oziroma sklopitvene enačbe med polji. Ker je skupno 16 konstant, potrebujemo 16 enačb. Zapišimo jih. Levo krajišče je členkasta podpora. Zato je

$$w_1(0) = 0 \quad \text{in} \quad w_1''(0) = 0.$$

Na stiku prvega in drugega polja, kjer ima gostota linijske obremenitve nezveznost, je upogib trikrat zvezno odvedljiva funkcija. Tako pri $x = l_1$ velja

$$w_1(a_1) = w_2(a_1), \quad w_1'(a_1) = w_2'(a_1), \quad w_1''(a_1) = w_2''(a_1), \quad \text{in} \quad w_1'''(a_1) = w_2'''(a_1).$$

Enaki sklopitveni pogoji veljajo tudi na stiku drugega in tretjega polja

$$w_2(a_2) = w_3(a_2), \quad w_2'(a_2) = w_3'(a_2), \quad w_2''(a_2) = w_3''(a_2), \quad \text{in} \quad w_2'''(a_2) = w_3'''(a_2).$$

V podpori na stiku tretjega in četrtega polja podpora deluje s točkovno silo na nosilec. V tem stiku je upogib dvakrat zvezno odvedljiv. Poleg tega je pomik v podpori enak nič. Tako je

$$w_3(a_3) = 0, \quad w_3(a_3) = w_4(a_3), \quad w_3'(a_3) = w_4'(a_3) \quad \text{in} \quad w_3''(a_3) = w_4''(a_3).$$

Konec nosilca je točkovno obremenjen. Potem je upogibni moment na koncu enak nič, prečna sila pa je enaka obremenitvi

$$w_4''(l) = 0 \quad \text{in} \quad w_4'''(l) = -\frac{F}{EI}.$$

Tako smo zapisali 16 robnih pogojev, natanko toliko kolikor jih potrebujemo za določitev upogiba nosilca.

V primeru, če bi nosilec na koncu bil obremenjen z upogibnim momentom M namesto s silo F , bi na koncu nosilca veljalo

$$w_4''(l) = -\frac{M}{EI} \quad \text{in} \quad w_4'''(l) = 0.$$

10.9 Superpozicija rešitev

Privzemimo, da poznamo za dve različni obremenitvi enostavno podprtega nosilca dolžine l dva pripadajoča upogibna momenta $M_1(x)$ in $M_2(x)$ za kateri je

$$M_1(0) = M_2(0) = M_1(l) = M_2(l) = 0.$$

Tema dvema upogibnima momentoma pripadata upogiba $w_1(x)$ in $w_2(x)$, ki rešita enačbo (10.17) z robinim pogojema

$$w_1(0) = w_2(0) = w_1(l) = w_2(l) = 0.$$

Potem je $w(x) = w_1(x) + w_2(x)$ upogib enostavno podprtega nosilca, ki je obremenjen z vsoto obeh obremenitev.

Za primer pokažimo, da lahko upogib enakomerno obremenjenega trotočkovno podprtega nosilca zapišemo kot vsoto upogiba enakomerno obremenjenega enostavno podprtega nosilca in točkovno obremenjenega nosilca.

Upogib enakomerno obremenjenega enakomernega nosilca na sredini je $w_1(l/2) = \frac{5q_0l^4}{384EI}$, upogib točkovno obremenjenega nosilca pa je $w_2(l/2) = \frac{Fl^3}{48EI}$. Trotočkovni nosilec je na sredini podprt, zato je

$$0 = w(l/2) = w_1(l/2) + w_2(l/2) = \frac{5q_0l^4}{384EI} + \frac{Fl^3}{48EI} = \frac{l^2}{48EI} \left(\frac{5q_0l}{8} + F \right).$$

Potemtakem je za obremenitev

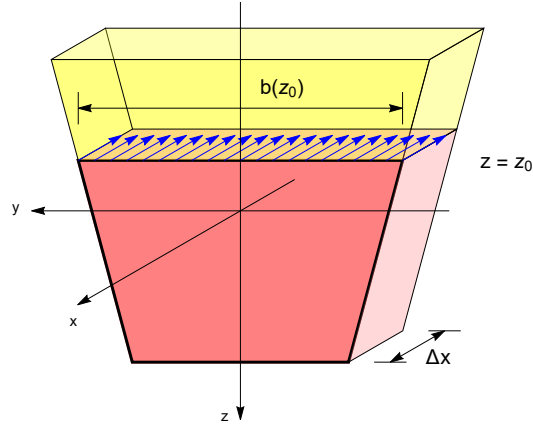
$$F = -\frac{5}{8}q_0l \tag{10.37}$$

navzgor pomik na sredini enak nič. Izračunana vrednost se ujema s silo podpore A_2 . Direktni račun potrди, da je vsota upogiba $w_1(x)$ enakomerno obremenjenega nosilca z gostoto q_0 in upogiba $w_2(x)$ točkovno obremenjenega nosilca s silo (10.37) enaka upogibu enakomerno obremenjenega trotočkovno podprtega nosilca (10.36).

10.10 Strižna napetost

Na preseku nosilca poleg normalne napetosti σ deluje tudi strižna napetost τ . Strižna napetost je gostota površinske sile v prečni smeri, torej sile, ki smo jo označili s Q . Strižno napetost bomo določili iz ravnovesja sil v smeri osi x za nosilec med odsekoma pri x in $x + \Delta x$, glej sliko 10.12, ki je dodatno odrezan pri $z = z_0$. Nosilec ni obremenjen na robu nosilca v smeri osi x , zato na odrezani del v smeri osi x deluje osna površinska sila na prerezih x in $x + \Delta$ in površinska sila na prerezu $z = z_0$. Gostota osne površinske sile na presekih x in $x + \Delta$ je $\sigma(x)$ oziroma $\sigma(x + \Delta x)$, na prerezu pa $\vec{v} \cdot \underline{t}(-\vec{k})$, kjer je \underline{t} napetostni tenzor na prerezu $z = z_0$. Zaradi simetrije je \underline{t} odvisen samo od koordinate $z = z_0$ in nič od koordinate y . Ker je zaradi simetričnosti napetostnega tenzorja $\vec{v} \cdot \underline{t}\vec{k} = \vec{k} \cdot \underline{t}\vec{v}$, je to natanko iskana strižna napetost τ na osnem preseku. Površino nosilca od reza $z = z_0$ do njegovega spodnjega konca označimo z $A(z_0)$, širino nosilca pri $z = z_0$ pa z $b(z_0)$. Ravnovesna enačba na odrezan del nosilca v smeri osi x se potem glasi

$$\int_{A(z_0)} \sigma(x + \Delta x) dA - \int_{A(z_0)} \sigma(x) dA - \tau b(z_0) \Delta x = 0.$$



Slika 10.12: Presek nosilca med x in $x + \Delta x$.

Enačbo delimo z Δx in poženemo Δx proti nič. Tako dobimo

$$\int_{A(z_0)} \frac{d\sigma}{dx} dA = \tau b(z_0).$$

Iz enačbe $\sigma = \frac{M}{I}z$ potem sledi

$$\tau b(z_0) = \int_{A(z_0)} \frac{d}{dx} \frac{M}{I} z dA = \int_{A(z_0)} \frac{dM}{dx} \frac{z}{I} dA = \frac{Q}{I} \int_{A(z_0)} z dA. \quad (10.38)$$

Tu smo upoštevali, da sta prečna sila in ploskovni moment neodvisna od y in z . Označimo z

$$S(z_0) = \int_{A(z_0)} z dA$$

linearni ploskovni moment dela preseka $A(z_0)$. Potem iz (10.38) sledi

$$\tau = \frac{QS(z_0)}{Ib(z_0)}. \quad (10.39)$$

Strižna napetost je odvisna od x in koordinate z na preseku. Povejmo brez dokaza, da je τ res gostota prečne sile Q , da velja

$$Q = \int_A \tau dA,$$

kjer sedaj integriramo po celem preseku nosilca z ravnino pri konstantnem x . Iz definicije $S(z_0)$ vidimo, da je $S(z_0)$ enak produktu ploščine spodnjega preseka $A(z_0)$ z z koordinato njegovega središča.

Za primer izračunajmo linearni ploskovni moment za pravokotnik dimenzije $b \times h$. Koordinata z teče od $-\frac{1}{2}h$ do $\frac{1}{2}h$. Pri z_0 odrezan spodnji presek je pravokotnik dimenzije $b \times (\frac{1}{2}h - z_0)$. Njegova ploščina je $b(\frac{1}{2}h - z_0)$, z koordinata masnega središča pa je $z_0 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}h - z_0) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}h + z_0)$. Potem je

$$S(z_0) = \frac{1}{2}b(\frac{1}{2}h - z_0)(\frac{1}{2}h + z_0) = \frac{b}{8}(h^2 - 4z_0^2).$$

Iz (10.39) potem sledi, da je strižna napetost enaka

$$\tau = \frac{Qb(h^2 - 4z_0^2)12}{8b^2h^3} = \frac{3Q}{2bh}(1 - 4(z_0/h)^2).$$

Stržna napetost na krajiščih $z_0 = \pm \frac{1}{2}h$ enaka nič. To že vemo. Novo pa je, da je za pravokotni presek potek strižne napetosti kvadratična funkcija z maksimumom pri z_0 . Maksimalna vrednost je

$$\tau_{max} = \frac{3Q}{2bh} = \frac{3Q}{2A}, \quad (10.40)$$

kjer je A površina preseka. Ta vrednost je za faktor $\frac{3}{2}$ večja od povprečne vrednosti Q/A .

Strižna napetost $\tau = t_{13}$ povzroči strižno deformacijo $\gamma = \tau/G$, kje je G strižni modul. Kot vemo, γ predstavlja spremembo kota med osjo x in z . V inženirski teoriji nosilcev preseki pravokotni na nevtralno os ostanejo po deformaciji pravokotni na deformirano nevtralno os. Po tej predpostavki bi morale veljati $\gamma = 0$. Vendar je inženirska teorija aproksimativna teorija, zato preseki niso natančno pravokotni na deformirano nevtralno os. Strižna deormacija γ tako ni enaka nič, mora pa biti majhna za veljavnost inženirske aproksimacije. Preverimo, da je res majhna v že obravnavanem primeru enostavno podprtega nosilca z enakomerno linijsko obremenitvijo.

Prečna sila je enaka $Q = -EIw'''$. Iz (10.23) in (10.26) potem sledi

$$w''' = \frac{q_0}{EI} \left(x - \frac{1}{2}l \right).$$

Izraz je ekstremalen v podporah, $x = 0, l$. Potem je

$$Q_{max} = \frac{q_0 l}{2},$$

kar je, kot vemo, enako sili leve podpore. Po (10.40) je potem

$$\tau_{max} = \frac{3q_0 l}{4A}$$

in

$$\gamma_{max} = \frac{\tau_{max}}{G} = \frac{3q_0 l(1 + \nu)}{2AE}.$$

Za aluminijasti nosilec z $E = 70 \text{ GPa}$ in $\nu = 1/3$ dolžine 1 m s kvadratnim presekom $a = 3 \text{ cm}$, ki je obremenjen z linijsko gostoto $q_0 = 10 \text{ kN/m}$ je potem $\gamma_{max} = 3.2 \times 10^{-4}$. Izračunana vrednost je v tem primeru dovolj majhna za veljavnost inženirske teorije.

10.11 Temperaturni upogib nosilca

V prostoru je temperaturna deformacija enaka $\underline{\underline{\epsilon}}_T = \alpha \underline{\underline{i}} \Delta T$. Ker v inženirski teoriji nosilcev dovolimo samo osno deformacijo, se bomo omejili na temperaturno deformacijo v smeri osi x , kjer je ΔT funkcija koordinate z . Celotna deformacija je enaka elastični ϵ_E in temperaturni ϵ_T deformaciji. Velja torej

$$\epsilon = \frac{z}{R} = \epsilon_E + \epsilon_T = \epsilon_E + \alpha \Delta T.$$

Potem je osna napetost

$$\sigma = E\epsilon_E = \frac{E}{R}z - \alpha E\Delta T.$$

Upogibni moment dobimo z integracijo $\vec{r} \times \sigma \vec{i}$ po preseku A . Če se omejimo na linearno spremembo temperature

$$\Delta T = T_0 + \beta(T_2 - T_1)z,$$

kjer je β sorazmernostni faktor z enoto $[1/\text{m}]$, je

$$M = \frac{EI}{R} - \alpha\beta(T_2 - T_1)EI = -EIw'' - \alpha\beta(T_2 - T_1)EI.$$

Tako je

$$w'' = -\frac{M}{EI} - \alpha\beta(T_2 - T_1) = \frac{M + M_T}{EI},$$

kjer je

$$M_T = \alpha\beta(T_2 - T_1)EI. \quad (10.41)$$

Če je $T_2 > T_1$ in $\beta > 0$, temperatura narašča z z . Spodnji del nosilca ima višjo temperaturo, zato se bolj raztegne in povzroči upogib nosilca. Zato izrazu M_T pravimo *temperaturni moment*.

Za primer si pogledajmo temperaturni upogib konzolno vpetega nosilca brez obremenitve. Potem je $M = 0$ in tako

$$w'' = \frac{M_T}{EI},$$

kjer je M_T dan z (10.41). Splošna rešitev je

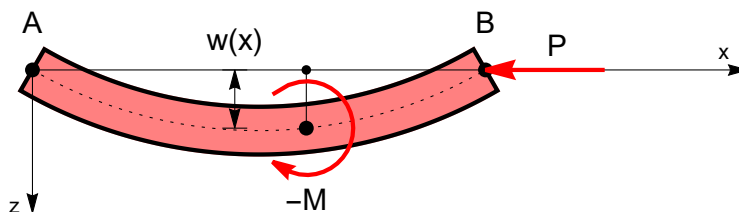
$$w(x) = -\frac{M_T}{2EI}x^2 + C_1x + C_2.$$

Robna pogoja za konzolno vpeti nosilec na krajišču $x = 0$ sta $w(0) = w'(0) = 0$. Potem je $C_1 = 0$ in $C_2 = 0$. Temperaturni upogib je

$$w(x) = -\frac{M_T}{2EI}x^2 = -\frac{1}{2}\alpha\beta(T_2 - T_1)x^2.$$

Pri $\beta > 0$ in $T_2 > T_1$ se nosilec upogne navzgor. Maksimalni upogib je pri $x = l$.

10.12 Uklon nosilca



Slika 10.13: Uklon členkasto podprtega nosilca.

Upogibu nosilca zaradi kompresijske osne sile pravimo uklon. Uklon je posledica nestabilnosti, ko deformacija iz osne smeri preskoči v lateralno smer. Na sliki 10.13 je členkasto podprt nosilec, leva podpora A je fiksna, desna B pa je drsna. Na nosilec na strani desne podpore deluje kompresijska sila P . Če pride do uklona, se nosilec upogne v lateralno smer, na naši sliki v smer osi z . Za del nosilca od x do l velja ravnovesje momentov. V polu v točki $(x, w(x))$ je moment sile P v smeri osi y enak $w(x)P$. Na odrezani del nosilca deluje upogibni moment levega dela nosilca na desni, ki je enak $-M(x)$. Ravnovesna enačba momenta je tako $wP - M = 0$. Upoštevajmo sedaj enačbo (10.17). Tako dobimo

$$w'' + \frac{P}{EI}w = 0. \quad (10.42)$$

Iščemo rešitev enačbe pri robnih pogojih

$$w(0) = w(l) = w'(0) = w'(l) = 0. \quad (10.43)$$

Ena rešitev je očitno trivialna rešitev $w(x) = 0$. Ta rešitev ustreza osni deformaciji. Vendar to ni edina rešitev. Hitro vidimo, da (10.42) reši tudi

$$w = A \sin \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x \right), \quad (10.44)$$

saj je

$$w'' = -A \frac{P}{EI} \sin \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x \right). \quad (10.45)$$

Iz (10.44) in (10.45) vidimo, da je $w(0) = w''(0) = 0$. Da bo (10.44) res iskana rešitev morata veljati še preostala robna pogoja (10.43). Pogoja sta izpolnjena, če je

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} = k\pi,$$

saj so ničle sinusa pri $k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Vidimo, da do uklona pride v primeru, ko osna sila P doseže kritično vrednost, ki je rešitev zgornje enačbe. Prva kritična sila je pri $k = 1$. Tako je kritična sila, ki povzroči upogib enaka

$$P_{kri} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

Ta formula je pomembna pri konstrukciji paličja, kjer moramo zagotoviti, da so vse kompresijske sile po absolutni vrednosti manjše od P_{kri} . Kritično vrednost lahko povečamo tako da povečamo upogibno togost ali pa da dodamo nova vozlišča s katerimi zmanjšamo dolžine palic s kompresijsko osno silo. Pri uklonu velja opozoriti, da lahko nastopi v katerikoli lateralni smeri, zato mora biti ploskovni moment preseka dovolj velik okrog poljubne smeri. To je tudi razlog pogoste uporabe nosilcev z I presekom.

10.13 Vprašanja in naloge

10.13.1 Vprašanja

1. Izračunaj relativno spremembo volumna bakrene kocke, ki jo segrejemo za $\Delta T = 10^\circ C$.
2. Za ravninsko defrmacijo določi modificiran Youngov modul in Poissonov količnik za baker, aluminij in beton. Njihovi Poissonovi količniki so 0.32, 0.33 in 0.1.
3. Razmisli, da formula (10.2) velja tudi, če se nosilec upogne navzgor.
4. Primerjaj momenta votlega in polnega kvadratna preseka, ki imata enako površino.
5. I presek lahko dobimo tudi tako, da pravokotniku na vsaki strani izreženo pravokotnik. Izračunaj moment I preseka po tej poti.
6. Zapiši splošno rešitev enačbe (10.21) za $q_0 = 0$.
7. Pokaži, da se maksimalni upogib točkovno obremenjenega nosilca na sredini za faktor 1.6 večji od upogiba linijsko obremenjenega nosilca.
8. Pokaži z računom, da (10.35) res reši (10.33).
9. Z računom pokaži, da je za $x \in (0, l/2)$ vsota upogiba enakomerno obremenjenega nosilca z gostoto q_0 in upogiba točkovno obremenjenega nosilca s silo (10.37) enaka upogibu enakomerno obremenjenega trotočkovno podprtega nosilca (10.36).

10. Zapiši robne pogoje za konzolni nosilec, ki je enakomerno linijsko obremenjen.
11. Zapiši robne pogoje za konzolni nosilec, ki je točkovno obremenjen na svojem koncu.
12. Za izračunane primere paličja zapiši pogoj, da ne pride do uklona.

10.13.2 Naloge

1. Votli enostavno podprt nosilec dolžine 2 m s tankostenskim kvadratnim presekom $a = 4$ cm in debelino $t = 4$ mm je enakomerno linijsko obremenjen z gostoto q_0 . Določi q_0 obremenitve, da bo napetost po velikosti manjša od $\sigma_0 = 120$ MPa.

Rešitev: Upogibni moment enakomerne linijske obremenitve je paraboličen z maksimumom na sredini nosilca z vrednostjo $M_{\max} = \frac{q_0 l^2}{8}$. Osnna napetost v nosilcu je dana s formulo

$$\sigma = \frac{M}{I} z.$$

Veljati mora

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I} z_{\max} \leq \sigma_0,$$

kjer je z_{\max} maksimalna z koordinata na preseku, torej $z_{\max} = \frac{1}{2}a$. Izračunati moramo še ploskovni moment I .

Formulo

$$I = \frac{tb^2}{12}(b + 3a)$$

za ploskovni moment votlega kvadratnega preseka z debelino t poznamo s predavanj. V formulo vstavimo $b = a$. Tako dobimo

$$I = \frac{ta^3}{3}.$$

Potem je

$$q_0 = \frac{16ta^2\sigma_0}{3l^2}.$$

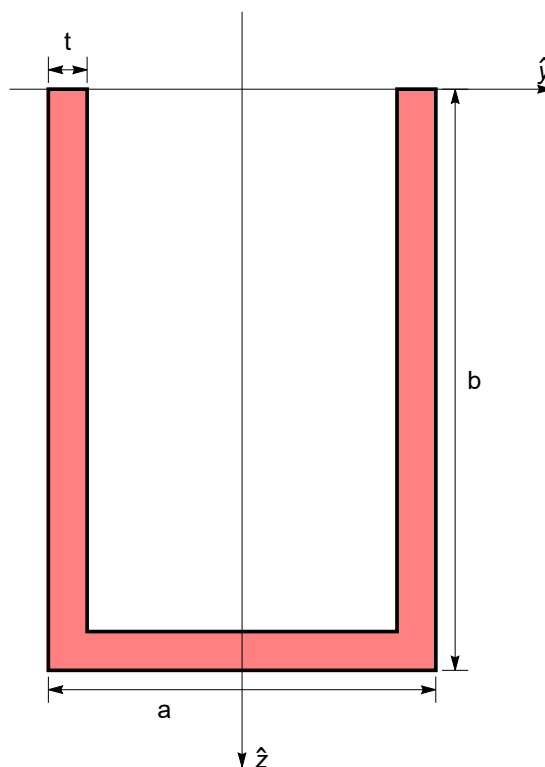
Za dane vrednosti potem mora veljati

$$q_0 \leq 1024 \text{ N/m} = 1.024 \text{ kN/m}.$$

2. Za presek v obliki črke U na sliki izračunaj ploskovni moment. Račun naredi za $b = \frac{3a}{2}$ in $t = \frac{a}{10}$.

Rešitev: Na U presek lahko gledamo kot na unijo treh pravokotnikov ali kot na pravokotni izrez iz pravokotnika. Izbrali bomo drugo možnost. Nalogo bomo rešili v treh korakih. Prvo bomo poiskali središče U preseka, nato bomo zapisali ploskovni moment za oba pravokotnika v koordinatnem sistemu, ki ima izhodišče v središču U preseka. Na tretjem koraku bomo ta dva momenta odšteli.

Poiščmo torej prvo središče U preseka. V ta namen postavimo pomožni koordinatni sistem $\hat{y}\hat{z}$ tako kot kaže slika. Izrezan pravokotnik označimo z A_1 , njegovo središče pa z \hat{z}_1^* . Podobno označimo za zunanji pravokotnik A_2 in \hat{z}_2^* . Potem je



$$|A_1| = (a - 2t)(b - t) = \frac{28a^2}{25} = 1.12a^2,$$

$$|A_2| = ab = \frac{3a^2}{2} = \frac{28a^2}{25} = 1.52a^2,$$

$$\hat{z}_1^* = \frac{1}{2}(b - t) = 0.7a,$$

$$\hat{z}_2^* = \frac{1}{2}b = \frac{3a}{4} = 0.75a$$

in

$$\hat{z}_0 = \frac{1}{-|A_1| + |A_2|} (-\hat{z}_1^* |A_1| + \hat{z}_2^* |A_2|) = 0.8973a.$$

Sedaj postavimo koordinatni sistem yz , ki ima izhodišče v \hat{z}_0 . V tem koordinatnem sistemu imata pravokotnika središči v točkah

$$z_1^* = \hat{z}_1^* - z_0 = -0.1974a \quad \text{in} \quad z_2^* = \hat{z}_2^* - z_0 = -0.1474a.$$

Ploskovna momenta sta

$$I_1 = \frac{(a - 2t)(b - t)^3}{12} + |A_1|(z_1^*)^2 = 0.2266a^4,$$

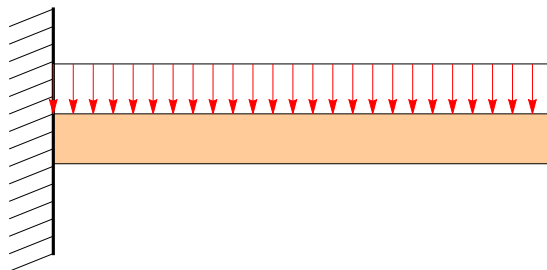
$$I_2 = \frac{ab^3}{12} + |A_2|(z_2^*)^2 = 0.3138a^4.$$

Ploskovni moment U preseka je potem

$$I = I_2 - I_1 = 0.0873a^4.$$

3. Za konzolno vpeti nosilec z enakomerno obremenitvijo q_0 :

- določi upogib nosilca;
- določi maksimalen upogib.



Rešitev:

(a) Enačba upogiba je

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{1}{EI} q_0.$$

Robni pogoji so, v konzolnem vpetju $w(0) = w'(0) = 0$ in na prostem koncu $w''(l) = w'''(l) = 0$. Splošna rešitev enačbe je

$$w(x) = \frac{q_0}{24EI} x^4 + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4.$$

Iz robnih pogojev pri $x = 0$ takoj sledi $C_3 = C_4 = 0$. Izračunajmo

$$w''(x) = \frac{q_0}{2EI} x^2 + 6C_1 x + 2C_2$$

in

$$w'''(x) = \frac{q_0}{EI} x + 6C_1.$$

Potem iz $w'''(l) = 0$ sledi

$$C_1 = -\frac{q_0 l}{6EI}.$$

Pogoj $w''(l) = 0$ se potem glasi

$$0 = \frac{q_0 l^2}{2EI} - \frac{q_0 l^2}{EI} + 2C_2 = -\frac{q_0 l^2}{2EI} + \check{C}_2$$

in

$$C_2 = \frac{q_0 l^2}{4EI}.$$

Upogib je tako

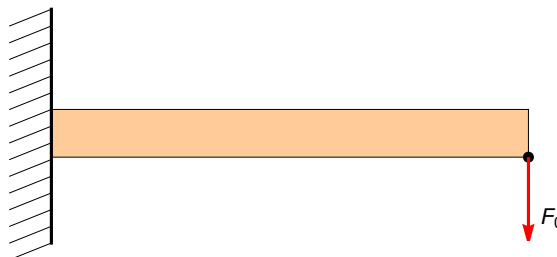
$$w(x) = \frac{q_0}{24EI} x^4 - \frac{q_0 l}{6EI} x^3 + \frac{q_0 l^2}{4EI} x^2 = \frac{q_0 x^2}{24EI} (x^2 - 4lx + 6l^2).$$

(a) Iz narave problema je očitno, da je maksimalni upogib na koncu. Tako je

$$w_{max} = w(l) = \frac{q_0 l^2}{24EI} (l^2 - 4l^2 + 6l^2) = \frac{q_0 l^4}{8EI}.$$

4. Za konzolno vpeti nosilec s točkovno obremenitvijo na koncu:

- določi upogib nosilca;
- določi maksimalen upogib in ga primerjaj z maksimalnim upogibom enakomerno obremenjenega nosilca.



Rešitev:

(a) Ker je obremenitev na koncu velja vzdolž celega nosilca enčba

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = 0.$$

Robni pogoji so, v konzolnem vpetju $w(0) = w'(0) = 0$ in na obremenjenem koncu $w''(l) = 0$ in $w'''(l) = -F_0/EI$. Splošna rešitev enačbe je

$$w(x) = C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4.$$

Iz robnih pogojev pri $x = 0$ tako kot prej sledi $C_3 = C_4 = 0$. Izračunajmo $w''(x) = 6C_1 x + 2C_2$ in $w'''(x) = 6C_1$. Potem iz $w'''(l) = -F_0/EI$ sledi

$$C_1 = -\frac{F_0}{6EI}.$$

Pogoj $w''(l) = 0$ se potem glasi

$$0 = -\frac{F_0 l}{EI} + 2C_2.$$

Tako dobimo

$$C_2 = \frac{F_0 l}{2EI}.$$

Upogib je tako

$$w(x) = -\frac{F_0}{6EI} x^3 + \frac{F_0 l}{2EI} x^2 = \frac{F_0}{6EI} x^2 (-x + 3l).$$

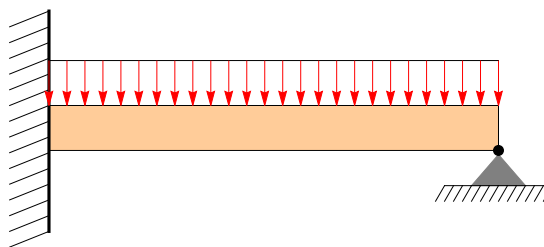
(b) Maksimalni upogib je na koncu in je

$$w_{max} = w(l) = \frac{F_0 l^3}{3EI}.$$

Ekvivalentna enakomerna obremenitev je $q_0 = F_0/l$. Maksimalni upogib točkovno obremenjenega nosilca je za faktor $8/3$ večji od enakomernega.

5. Konzolno vpeti nosilec z enakomerno obremenitvijo z gosoto q_0 je na koncu členkasto podprt. Določi upogib nosilca in silo podpore na koncu.

Rešitev: Nalogo bomo rešili na dva načina. Prvi bo po metodi superpozicije, kjer bomo uporabili rešitev prvih dveh nalog. Nato bomo nalogo rešili še direktno.



- (a) Označimo z w_1 rešitev za enakomerno linijsko obremenitvijo in z w_2 rešitev za točkovno obremenitev. Pri $x = l$ mora veljati $w_1(l) + w_2(l) = 0$ oziroma

$$0 = \frac{q_0 l^4}{8EI} + \frac{F_0 l^3}{3EI}.$$

Enačba je izpolnjena za

$$F_0 = -\frac{3q_0 l}{8}.$$

Ta sila ustreza sili podpore. Negativni predznak pomeni, da sila deluje v nasprotni smeri kot je obremenitev. Upogib je potem

$$\begin{aligned} w(x) &= w_1(x) + w_2(x) = \frac{q_0 x^2}{24EI} (x^2 - 4lx + 6l^2) - \frac{3q_0 l}{48EI} x^2 (-x + 3l) \\ &= \frac{q_0 x^2}{48EI} (2x^2 - 5lx + 3l^2). \end{aligned}$$

(b) Nalogo rešimo še po drugi poti. Rešujemo enačbo

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{1}{EI} q_0.$$

z robnimi pogoji $w(0) = w'(0) = 0$ v vpetju in $w(l) = w''(l) = 0$ v desni podpori. Rešitev enačbe z upoštevanjem pogojev pri $x = 0$ je

$$w(x) = \frac{q_0}{24EI} x^4 + C_1 x^3 + C_2 x^2.$$

Iz robnih pogojev pri $x = l$ potem sledi

$$0 = w(l) = \frac{q_0}{24EI} l^2 + C_1 l + C_2.$$

in

$$0 = w''(l) = \frac{q_0}{2EI} l^2 + 6C_1 l + 2C_2.$$

Dobili smo dve enačbi za dve neznanke. Pomnožimo prvo enačbo z -2 in jo prištejmo k drugi. Po krajšem računu dobimo

$$C_1 = -\frac{5q_0 l}{48EI}.$$

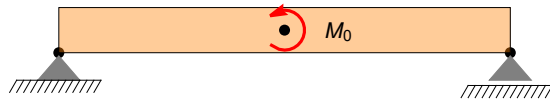
Nato pa še

$$C_2 = \frac{3q_0 l^2}{48EI}.$$

Dobili smo enako rešitev kot po prvi poti.

6. Enostavno podprti nosilec je na sredini obremenjen s točkovnim upogibnim momentom M_0 .

- (a) Določi upogib nosilca.
 (b) Skiciraj upogib in določi maksimalni upogib.



Rešitev:

- (a) Nosilec razdelimo v dve polji, levo in desno od točke obremenitve. Pomik na levem delu označimo z w_l na desnem pa z w_d . Za oba dela velja enačba

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = 0,$$

saj nosilec ni linijsko obremenjen. Označimo z l dolžino nosilca. Robni pogoji so

$$w_l(0) = w_l''(0) = 0 \quad \text{in} \quad w_d(l) = w_d''(l) = 0.$$

Rešitvi enačb sta očitno

$$\begin{aligned}w_l(x) &= C_1x^3 + C_2x, \\w_d(x) &= C_3(l-x)^3 + C_4(l-x),\end{aligned}$$

kar tudi potrdi kratek račun. Konstante C_i , $i = 1, \dots, 4$ določajo sklopitveni pogoji

$$w_l(l/2) = w_d(l/2), \quad w_l'(l/2) = w_d'(l/2), \quad w_l''(l/2) = -\frac{M_0}{EI}, \quad w_d''(l/2) = \frac{M_0}{EI}.$$

Tu smo upoštevali, da se nosilec ne prelomi v točki obremenitve in definicijo upogibnega momenta, ki pravi da je to moment s katerim desni del nosilca deluje na levi. Potem je moment levega dela na desni enak $-M_0$. Tako dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned}\frac{1}{8}C_1l^3 + \frac{1}{2}C_2l &= \frac{1}{8}C_3l^3 + \frac{1}{2}C_4l, \\3\frac{1}{8}C_1l^2 + \frac{1}{2}C_2 &= -3\frac{1}{8}C_3l^2 - \frac{1}{2}C_4, \\3C_1l &= -\frac{M_0}{EI}, \\3C_3l &= \frac{M_0}{EI}.\end{aligned}$$

Potem je

$$C_1 = -\frac{M_0}{3EI} \quad \text{in} \quad C_3 = \frac{M_0}{3EI}.$$

Vstavimo v prvi dve enačbi.

$$\begin{aligned}C_2 - C_4 &= \frac{M_0l^2}{6EI}, \\C_2 + C_4 &= 0.\end{aligned}$$

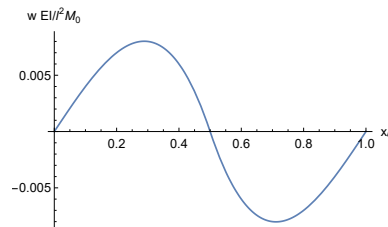
Rešitev je

$$C_2 = -C_4 = \frac{M_0l^2}{12EI}.$$

Tako je

$$\begin{aligned}w_l(x) &= -\frac{M_0}{3EI}x^3 + \frac{M_0l^2}{12EI}x = -\frac{M_0}{12EI}x(4x^2 - l^2), \\w_d(x) &= \frac{M_0}{3EI}(l-x)^3 - \frac{M_0l^2}{12EI}(l-x) = \frac{M_0}{12EI}(l-x)(4(l-x)^2 - l^2).\end{aligned}$$

(b) Skica upogibnega momenta je na sliki 1.



Slika 10.14: Upogib nosilca s točkovnim momentom.

Koordinato maksimalni upogiba levega dela dobimo iz enačbe $w'_l(x) = 0$. Rešitev enačbe

$$0 = w'_l(x) = \frac{M_0}{12EI}(-12x^2 + l^2).$$

je $x = l/2\sqrt{3}$. Maksimalni upogib je potem

$$w_{\max} = -\frac{M_0 l^2}{72\sqrt{3}EI} + \frac{M_0 l^2}{24\sqrt{3}EI} = \frac{M_0 l^2}{36\sqrt{3}EI}.$$