Poglavje 1

Kinematika in dinamika

1.1 Premočrtno gibanje

1.1.1 Rešene naloge

1. Točka se giblje premočrtno po osi x. V času od 0 do t_1 se giblje s konstantno brzino v_1, v času od t_1 do t_2 enakomerno zavira tako, da ima v času t_2 trenuto brzino nič.

   (a) Izračunaj do kod pride v času t_1.

   (b) Izračunaj pospešek zaviranja.

   (c) Do kod pride v času t_2?

   (d) Kdaj se vrne v začetni položaj?

   (e) Izračunaj za konkretne vrednosti $v_1 = 2\,\mathrm{m/s}$, $t_1 = 10\,\mathrm{s}$, $t_2 = 20\,\mathrm{s}$. Nariši tudi grafe pospeška, hitrosti in položaja v odvisnosti od časa.

   Rešitev: Poglejmo prvo kako je s pospeškom. Pospešek je od $t = 0$ do $t = t_1$ enak nič, ker je gibanje enakomerno, na intervalu (t_1, t_2) in naprej do t_3, ko se točka vrne v začetni položaj, pa je pospešek konstanten in ima vrednostjo a_2. Kolikšna je njena vrednostše ne vemo, vemo pa da je negativna, saj točka zavira. Na intervalu $(0, t_1)$ je hitrost konstantna in enaka v_1, nato pa od t_1 naprej linearno poda, saj točka enakomerno zavira. Njen linearni potek je natanko določen, saj vemo, da je $v(t_1) = v_1$ in $v(t_2) = 0$. Od tod sledi, da je

$$v(t) = \frac{v_1(t - t_2)}{t_1 - t_2} \qquad t > t_1.$$

   Odvod hitrosti je pospešek in tako $a_2 = -v_1/(t_2 - t_1) = -0.2\,\mathrm{m/s^2}$. Postavimo začetni položaj točke v $x = 0$. Ker je hitrost na $(0, t_1)$ konstantna, na tem intervalu velja $x = v_1 t$, x torej narašča linearno in tako velja $x(t = t_1) = v_1 t_1 = 20\,\mathrm{m}$. Za $t > t_1$ je gibanje enakomerno pospešeno, zato je x kvadratna funkcija časa. Ker poznamo položaj in hitrost za $t = t_1$ zapišemo x v obliki

$$x = \frac{1}{2} a_2 (t - t_1)^2 + v_1 (t - t_1) + v_1 t_1.$$

   Potem

$$x(t_2) = -\frac{v_1(t_2 - t_1)^2}{2(t_2 - t_1)} + v_1(t_2 - t_1) + v_1 t_1 = \frac{1}{2} v_1 (t_1 + t_2) = 60\,\mathrm{m}.$$

Kdaj se vrne v začetni položaj, dobimo iz enačbe

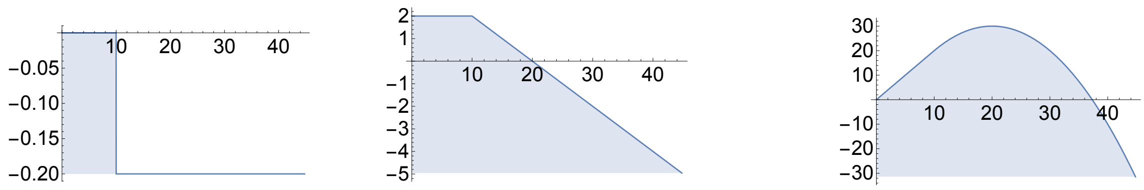
$$0 = \frac{1}{2}a_2(t_3 - t_1)^2 + v_1(t_3 - t_1) + v_1 t_1.$$

Dobili smo kvadratno enačbo za t_3. Za lažje reševanje vpeljimo novo neznanko $\tau = t_3 - t_1$. Potem $0 = \frac{1}{2}a_2\tau + v_1\tau + v_1 t_1$ in tako

$$\tau_{1,2} = \frac{-v_1 \pm \sqrt{v_1^2 - 2a_2 v_1 t_1}}{a} = \frac{t_2 - t_1}{v_1}\left(v_1 \pm \sqrt{v_1^2 + 2v_1^2 t_1/(t_2 - t_1)}\right) = (t_2 - t_1)\left(1 \pm \sqrt{\frac{t_1 + t_2}{t_2 - t_1}}\right).$$

Pravi predznak je + in tako

$$t_3 = t_1 + \tau = t_1 + (t_2 - t_1)\left(1 \pm \sqrt{\frac{t_1 + t_2}{t_2 - t_1}}\right) = 10(2 + \sqrt{3})\mathrm{s}.$$



Slika 1.1: Pospešek, hitrost in polžaj.

2. Od časa $t = 0$ do $t = t_1$ se točka giblje enakomerno pospešeno s pospeškom a. V trenutku $t = t_1$ pričnemo zavirati. Določi pospešek zaviranja tako, da se točka v času $2t_1$ vrne v začetni položaj. Določi tudi do kod najdlje pride točka.

   Rešitev: Označimo z x koordinato premočrtnega gibanja. Za $t \in [0, t_1]$ je enačba gibanja $x = \frac{1}{2}at^2$. Položaj točke v času t_1 je $x_1 = \frac{1}{2}at_1^2$, hitrost pa je $v_1 = at_1$. Od t_1 naprej se točka prav tako giblje enakomerno pospešeno, tokrat s pospeškom a_1. Ker je za drugi del gibanja začetni položaj v času t_1 enak x_1, začetna hitrost pa v_1, je enačba gibanja

   $$x = x(t) = \frac{1}{2}a_1(t - t_1)^2 + v_1(t - t_1) + x_1 = \frac{1}{2}a_1(t - t_1)^2 + at_1(t - t_1) + \frac{1}{2}at_1^2.$$

   Točka se v času $t = 2t_1$ vrne v začetni položaj. Velja torej $0 = x(2t_1) = \frac{1}{2}a_1 t_1^2 + at_1^2 + \frac{1}{2}at_1^2$. Od tod potem sledi $a_1 = -3a$. Vidimo, da je pospešek zaviranja neodvisen od časa t_1.

   Poglejmo še, do kod pride točka. Točka se prične gibati nazaj v točki obrata gibanja, ki je določena z enačbo $0 = v = \dot{x}(t_2)$. Izračunajmo $\dot{x} = -3a(t - t_1) + at_1 = a(4t_1 - 3t)$. Tako dobimo $t_2 = \frac{4}{3}t_1$ in po krajšem računu $x_{\max} = \frac{2}{3}at_1^2$.

3. Dve točki se gibljeta ena proti drugi. Določi kdaj in kje se srečata, če sta v začetnem trenutku oddaljeni za d in je:

   (a) točki se gibljeta enakomerno z brzinama v_1 in v_2;

   (b) ena točka se giblje enakomerno z brzino v_1 druga pa enakomerno pospešeno s pospeškom a_2.

   Naredi izračun za konkretne vrednosti $d = 1\,\mathrm{m}$, $v_1 = 2\,\mathrm{cm/s}$, $v_2 = 3\,\mathrm{cm/s}$ in $a_2 = 2\,\mathrm{m/s^2}$.

   Rešitev:

(a) V prvem primeru je pogoj srečanja $v_1 t = d - v_2 t$. Od tod sledi $t = d/(v_1 + v_2)$ in točki se srečata v oddaljenosti $dv_1/(v_1 + v_2)$ od začetnega položaja prve točke. Za dane vrednosti je čas srečanja $t = 20\,\mathrm{s}$, razdalja pa $40\,\mathrm{cm}$.

(b) Sedaj je pogoj srečanja $v_1 t = d - \frac{1}{2} a_2 t^2$. Dobili smo kvadratno enačbo za t. Rešitev je

$$t_{1,2} = \frac{1}{a_2}\left(-v_1 \pm \sqrt{v_1^2 + 2a_2 d}\right).$$

Prava rešitev je dana z vsoto. Za dane vrednosti je

$$t = \frac{1}{2}\left(-210^{-2} + \sqrt{410^{-4} + 4}\right)\mathrm{s} \doteq (-10^{-2} + 1)\mathrm{s} = 0.99\,\mathrm{s}.$$

Prepotovana razdalja prve točke pa je $v_1 t \doteq 1.98\,\mathrm{cm}$.

1.1.2 Dodatne naloge

1. Točka se giblje premočrtno po osi x. V času od 0 do t_1 se giblje enakomerno pospešeno s pospeškom a_1, v času od t_1 do t_2 pa nato enakomerno zavira tako, da ima v času t_2 trenuto brzino nič.

   (a) Izračunaj do kod pride v času t_1.

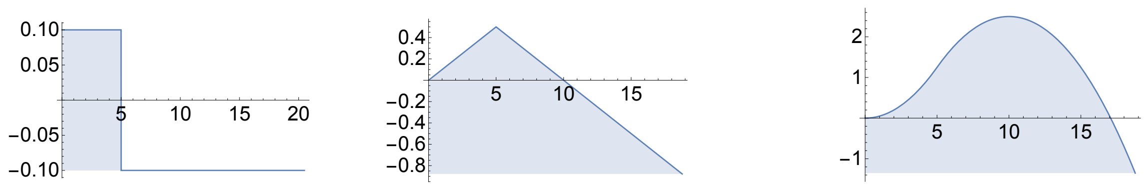
   (b) Izračunaj pospešek zaviranja a_2.

   (c) Do kod pride v času t_2?

   (d) Kdaj se vrne v začetni položaj?

   (e) Izračunaj za konkretne vrednosti $a_1 = 1/10\,\mathrm{m/s^2}$, $t_1 = 5\,\mathrm{s}$, $t_2 = 10\,\mathrm{s}$. Nariši tudi grafe pospeška, hitrosti in položaja v odvisnosti od časa.

   Rešitev: $x_1 = \frac{1}{2}a_1 t_1^2$, $a_2 = -\frac{a_1 t_1}{t_2 - t_1}$, $x_2 = \frac{1}{2}a_1 t_1 t_2$, $t_3 = t_2 + \sqrt{t_2(t_2 - t_1)}$.



Slika 1.2: Pospešek, hitrost in polžaj.

2. Točka se giblje premočrtno po osi x. V času od 0 do t_1 se giblje enakomerno pospešeno s pospeškom a_1, v času od t_1 do t_2 pa nato enakomerno zavira tako, da se v času t_2 vrne v začetni položaj.

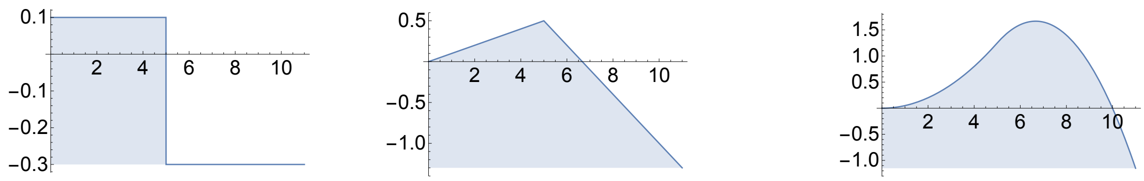
   (a) Izračunaj do kod pride v času t_1.

   (b) Izračunaj pospešek zaviranja a_2.

   (c) Določi do kod najdlje pride točka.

   (d) Izračunaj za konkretne vrednosti $a_1 = 1/10\,\mathrm{m/s^2}$, $t_1 = 5\,\mathrm{s}$, $t_2 = 10\,\mathrm{s}$. Nariši tudi grafe pospeška, hitrosti in položaja v odvisnosti od časa.

   Rešitev: $x_1 = \frac{1}{2}a_1 t_1^2$, $a_2 = -\frac{a_1 t_1(2t_2 - t_1)}{(t_2 - t_1)^2}$, $t_3 = \frac{(a_2 - a_1)t_1}{a_2}$, $x_{\max} = \frac{a_1 t_1 t_2^2}{2(2t_2 - t_1)}$.



Slika 1.3: Pospešek, hitrost in polžaj.

1.2 Dinamika točke

1.2.1 Rešene naloge

1. Obravnavaj prosti pad:

   (a) brez upoštevanja upora zraka;

   (b) z upoštevanjem upora zraka.

Rešitev: Postavimo os x v smeri sile teže z izhodiščem v začetnem položaju. Če točka v začetnem trenutku nima komponente brzine pravokotne na smer navpičnice, je gibanje premočrtno in lahko namesto vektorske oblike Newtonove enačbe uporabimo skalarno enačbo $m\ddot{x} = f$, kjer je f rezultanta vseh sil. V našem primeru točko spustimo v prosti pad. Začetna hitrost je enaka nič in gibanje je premočrtno.

(a) V primeru braz upoštevanja sile upora deluje na materialno točko samo sila teže $f = mg$. Newtonova enačba je se tako glasi $m\ddot{x} = mg$ oziroma $\ddot{x} = g$. Potem je $\dot{x} = gt + C_1$, kjer je C_1 integracijska konstanta, ki jo določa začetni pogoj. Ker je $\dot{x}(t = 0) = 0$, je $C_1 = 0$. Položaj dobimo še z eno integracijo. Dobimo $x = \frac{1}{2}gt^2 + C_2$. Ker je $x(t = 0) = 0$, je $C_2 = 0$ in tako $x = \frac{1}{2}gt^2$. Vidimo, da je gibanje natanko določeno z Newtonovo enačbo in začetnima pogojema, ki določata integracijski konstanti C_1 in C_2. Iz dobljene enačbe gibanja sledi, da hitrost narašča brez meje, saj je $\dot{x} = gt$.

(b) Sedaj obravnavajmo gibanje z uporom zraka. Ker točko spustimo, je začetna hitrost nič in zato uporabimo linearen zakon upora $F_{\mathrm{u}} = -k\dot{x}$, kjer je k koeficient upora. Njegova enota je kg/s. Enačba gibanja je $m\ddot{x} = mg - k\dot{x}$. Enačbo delimo z m in označimo $\gamma = k/m$. Tako dobimo $\ddot{x} = g - \gamma\dot{x}$, oziroma

$$\dot{v} = g - \gamma v, \tag{1.1}$$

kjer je $v = \dot{x}$. Dobili smo linearno diferencialno enačbo prvega reda za v. Iščemo njeno splošno rešitev, ki bo odvisna od dveh integracijskih konstant. Posebno, pravimo ji tudi partikularna rešitev, rešitev enačbe (1.1) znamo poiskati. Vprašajmo se, ali konstantna funkcija $v = v_1$ reši (1.1)? Vidimo, da jo reši, če je $v_1 = g/\gamma$. Pišimo $v_0 = v - v_1$ in poglejmo kakšni enačbi zadošča v_0, če v reši (1.1). Izračunajmo

$$\dot{v} = \dot{v}_0 + \dot{v}_1 = \dot{v}_0 = g - \gamma v = g - \gamma v_0 - \gamma v_1 = \gamma v_0.$$

Vidimo, da je $v = v_0 + v_1$ rešitev (1.1), če je v_0 rešitev enačbe

$$\dot{v}_0 = -\gamma v_0.$$

Dobljeno enačbo znamo rešiti. Rešitev je $v_0 = C_1\,\mathrm{e}^{-\gamma t}$ in tako

$$v = v_0 + v_1 = C_1\,\mathrm{e}^{-\gamma t} + g/\gamma.$$

Iz začetnega pogoja $v(0) = 0$ sledi, da je $C_1 = -g/\gamma$ in tako

$$v = \frac{g}{\gamma}\left(1 - \mathrm{e}^{-\gamma t}\right). \tag{1.2}$$

V primeru z uporom zraka hitrost ne narašča več linearno. Še več hitrost ne narašča brez meja, je navzgor omejena z $\frac{g}{\gamma}$, saj je $\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-\gamma t} = 0$. Položaj dobimo z integracijo brzine. Iz (1.2) sledi

$$x = \frac{g}{\gamma}t + \frac{g}{\gamma^2}\,\mathrm{e}^{-\gamma t} + C_2.$$

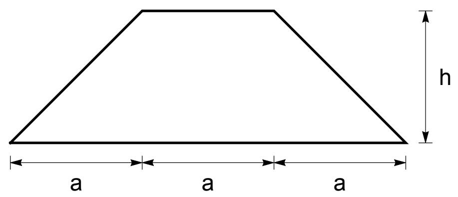
Konstanto C_2 določa začetni pogoj $x(t = 0) = 0$. Od tof $C_2 = -g/\gamma^2$ in

$$x = \frac{g}{\gamma}t + \frac{g}{\gamma^2}\left(\mathrm{e}^{-\gamma t} - 1\right).$$

1.3 Masno središče

1.3.1 Rešene naloge

1. Določi masno središče trapeza na skici.



Slika 1.4: Trapez.

(a) Trapez obravnavaj kot sestavljen lik iz dveh trikotnikov in pravokotnika.

(b) Trapez obravnavaj kot trikotnik brez vršnega trikotnika.

Rešitev:

(a) Lik je sestavljen iz treh likov, levi trikotnik, pravokotnik in desni trikotnik. Koordinatno os x postavimo v smeri osnovnice, koordinatno središče pa tako, da je os y os zrcalne simetrije. Potem je očitno $x_* = 0$, y_* pa izračunamo s pomočjo tabele

Lik	A	y_*
Levi trikotnik	$\frac{1}{2}ah$	$\frac{1}{3}h$
Pravokotnik	ah	$\frac{1}{2}h$
Desni trikotnik	$\frac{1}{2}ah$	$\frac{1}{3}h$

Ploščina trapeza je potem vsota ploščin $A = 2ah$, masno središče pa je

$$y_* = \frac{1}{2ah}\left(\frac{1}{6}ah^2 + \frac{1}{2}ah^2 + \frac{1}{6}ah^2\right) = \frac{5}{12}h.$$

(b) Stranici trapeza podaljšamo do skupnega presečišča. Tako dobimo trikotnik z višino $\frac{3}{2}h$, trapez pa je dan kot razlika tega trikotnika in trikotnika na trapezu. Sestavimo tabelo

Lik	A	y_*
Veliki trikotnik	$\frac{9}{4}ah$	$\frac{1}{2}h$
Mali trikotnik	$\frac{1}{4}ah$	$\frac{7}{6}h$

Ploščina trapeza je potem razlika ploščin, torej $A = \frac{9}{4}ah - \frac{1}{4}ah = 2ah$, masno središče pa je

$$y_* = \frac{1}{2ah}\left(\frac{9}{8}ah^2 - \frac{7}{24}ah^2\right) = \frac{h}{16}\left(9 - \frac{7}{3}\right) = \frac{5}{12}h.$$

Poglavje 2

Sistem sil

2.1 Ravninski sistem sil

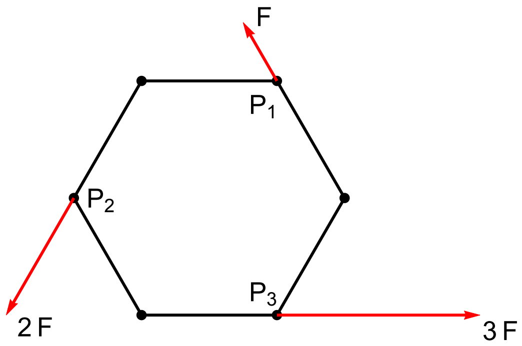
2.1.1 Rešene naloge

1. Pravilni šestkotnik z dolžino stranice a je obremenjen tako kot kaže slika.

   (a) Zapiši sistem sil $\mathcal{F}$.

   (b) Izračunaj rezultanto sil $\vec{R}(\mathcal{F})$ in navorov $\vec{N}(\mathcal{F}, O)$ s polom O v središču mnogokotnika.

   (c) Določi os sistema.



Rešitev:

(a) Postavimo izhodišče koordinatnega sistema v središče mnogokotnika. Prijemališča sil so potem $P_1(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2})$, $P_2(-a, 0)$ in $P_3(\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}a}{2})$, sile pa so $\vec{F}_1 = F(-\frac{1}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath})$, $\vec{F}_2 = -F(\vec{\imath} + \sqrt{3}\vec{\jmath})$ in $\vec{F}_3 = 3F\vec{\imath}$.

(b) Rezultanta sil je

$$\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = F\left(\frac{3}{2}\vec{\imath} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}\right),$$

rezultanta navorov pa je

$$\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \sum_{i=1}^{3} \vec{OP_i} \times \vec{F}_i = aF\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\vec{k} = 3\sqrt{3}aF\vec{k}.$$

Navore lahko izračunamo tudi elementarno brez uporabe vektorskega produkta. Po polznosti sile lahko vse sile pomaknemo do sredine stranic. Potem je ročica pravokotna na silo in tako

$$N = \frac{a\sqrt{3}}{2}(F + 2F + 3F) = 3\sqrt{3}aF.$$

(c) Krajevni vektor do točke P_0 na osi sistema izračunamo po formuli

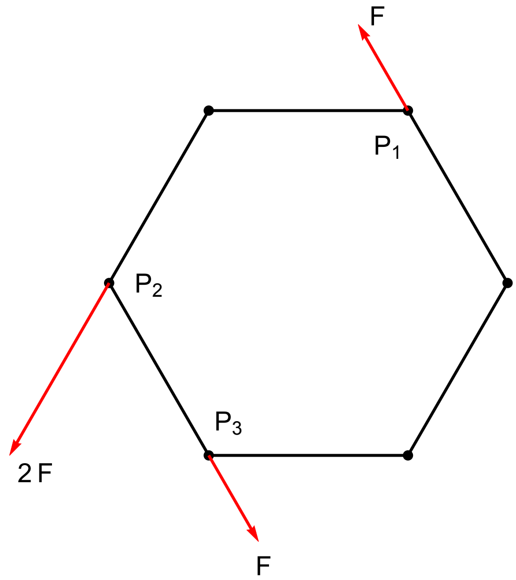
$$\vec{OP}_0 = \frac{\vec{R}(\mathcal{F}) \times \vec{N}(\mathcal{F}, O)}{\vec{R}(\mathcal{F}).\vec{R}(\mathcal{F})} = -\frac{3a}{2}\left(\vec{\imath} + \sqrt{3}\vec{\jmath}\right).$$

2. Pravilni šestkotnik z dolžino stranice a je obremenjen tako kot kaže slika.

   (a) Zapiši sistem sil $\mathcal{F}$.

   (b) Izračunaj rezultanto sil $\vec{R}(\mathcal{F})$ in navorov $\vec{N}(\mathcal{F}, O)$ s polom O v središču mnogokotnika.

   (c) Določi os sistema.



Rešitev:

(a) Postavimo izhodišče koordinatnega sistema v središče mnogokotnika. Prijemališča sil so potem $P_1(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2})$, $P_2(-a, 0)$ in $P_3(-\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}a}{2})$, sile pa so $\vec{F}_1 = F(-\frac{1}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath})$, $\vec{F}_2 = -F(\vec{\imath} + \sqrt{3}\vec{\jmath})$ in $\vec{F}_3 = F(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

(b) Rezultanta sil je

$$\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = F\left(-\vec{\imath} - \sqrt{3}\vec{\jmath}\right),$$

rezultanta navorov pa je

$$\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \sum_{i=1}^{3} \vec{OP}_i \times \vec{F}_i = aF\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3}aF\vec{k}.$$

(c) Krajevni vektor do točke P_0 na osi sistema izračunamo po formuli

$$\vec{OP}_0 = \frac{\vec{R}(\mathcal{F}) \times \vec{N}(\mathcal{F}, O)}{\vec{R}(\mathcal{F}).\vec{R}(\mathcal{F})} = a\left(-\frac{3}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}\right).$$

2.2 Prostorski sistem sil

2.2.1 Rešene naloge

1. Podan je prostorski sistem sil $\vec{F}_1 = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$, $\vec{F}_2 = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$, $\vec{F}_3 = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$, s prijemališči v točkah $P_1(1, 2, 1)$, $P_2(-1, 0, 1)$, $P_3(1, -1, 0)$.

(a) Izračunaj rezultanto sistema sil.

(b) Izračunaj rezultanto navora sistema sil glede na pol v koordinatnem izhodišču.

(c) Izračunaj invarianto sistema sil.

(d) Določi os sistema.

Rešitev:

(a) Rezultanta sistema sil je $\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 2\vec{\imath} + 2\vec{k}$.

(b) Izračunajmo

$$\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \sum_{i=1}^{3} \vec{OP_i} \times \vec{F_i} = (\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 3\vec{k}) + (\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + \vec{k}) + (-\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}) = \vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - \vec{k}.$$

(c) Invarianta sistema sil je $I(\mathcal{F}) = \vec{R}(\mathcal{F}) \cdot \vec{N}(\mathcal{F}, O) = 0$. Ker je $I(\mathcal{F}) = 0$ in $\vec{R}(\mathcal{F}) \neq \vec{0}$, ima sistem sil skupno prijemališče, ki leži na osi sistema.

(d) Os sistema je premica v smeri $\vec{R}(\mathcal{F})$, ki gre skozi točko P_0 dano s krajevnim vektorjem

$$\vec{OP_0} = \frac{\vec{R}(\mathcal{F}) \times \vec{N}(\mathcal{F}, O)}{\vec{R}(\mathcal{F}).\vec{R}(\mathcal{F})} = -\frac{3}{4}\vec{\imath} + \frac{1}{2}\vec{\jmath} + \frac{3}{4}\vec{k}.$$

Kratek račun

$$\vec{N}(\mathcal{F}, P_0) = \vec{P_0O} \times \vec{R}(\mathcal{F})$$

potrdi, da je P_0 res skupno prijemališče sil.

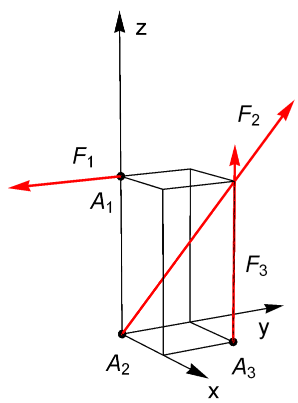
2. Za prostorski sistem sil podan na sliki s silami v smereh stranic in diagonale kvadra dimenzije $1\text{m} \times 1\text{m} \times 2\text{m}$:

(a) določi sile in njihova prijemališča;

(b) izračunaj rezultanto sil in navora glede na pol A_2;

(c) določi os sistema.

Velikosti sil so $F_1 = 1\,\text{kN}$, $F_2 = 2/\sqrt{6}\,\text{kN}$, $F_3 = 1\,\text{kN}$.



Rešitev:

(a) Prijemališča sil imajo koordiante $A_1(0,0,2)$, $A_2(0,0,0)$ in $A_3(1,1,0)$, sile pa so $\vec{F}_1 = -\vec{\jmath}\,\text{kN}$, $\vec{F}_2 = \frac{1}{3}(\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k})\,\text{kN}$ in $\vec{F}_3 = \vec{k}\,\text{kN}$. Točka A_2 se sovpada s koordinatnim izhodiščem, zato pišimo v nadaljevanju O namesto A_2.

(b) Rezultanta sil je

$$\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \frac{1}{3}\left(\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 5\vec{k}\right)\ \text{kN},$$

rezultatnta navorov pa

$$\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \vec{OA_1} \times \vec{F}_1 + \vec{OA_2} \times \vec{F}_2 + \vec{OA_3} \times \vec{F}_3 = (3\vec{\imath} - \vec{\jmath})\ \text{kNm}.$$

Invarianta sistema je $I(\mathcal{F}) = \vec{R}(\mathcal{F}) \cdot \vec{N}(\mathcal{F}, O) = \frac{5}{3}$. Ker je invarianta različna od nič, sistem sil nima skupnega prijemališča.

(c) Os sistema je taka premica, da je navor s polom v poljubni točki P_0 na tej premici vzporeden rezultanti si. Dobimo jo s formulo

$$\vec{OP_0} = \frac{\vec{R}(\mathcal{F}) \times \vec{N}(\mathcal{F}, O)}{|\vec{R}(\mathcal{F})|^2}.$$

Po krajšem računu tako

$$\vec{OP_0} = \frac{1}{2}(\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + \vec{k})\,\mathrm{m}.$$

2.2.2 Dodatne naloge

1. Podan je prostorski sistem sil $\vec{F_1} = \vec{\imath} - \vec{k}$, $\vec{F_2} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k}$, $\vec{F_3} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$, s prijemališči v točkah $P_1(1, -2, 1)$, $P_2(-1, 0, 2)$, $P_3(1, 0, -1)$.

   (a) Izračunaj rezultanto sistema sil.

   (b) Izračunaj rezultanto navora sistema sil glede na pol v koordinatnem izhodišču.

   (c) Izračunaj invarianto sistema sil.

   (d) Določi os sistema.

   Rešitev: $\vec{R}(\mathcal{F}) = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 3\vec{k}$, $\vec{N}(\mathcal{F}, O) = 2\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} + 3\vec{k}$, $I(\mathcal{F}) = 10$, $\vec{OP_0} = \frac{1}{11}(12\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} + 2\vec{k})$.

Poglavje 3

Statika togega telesa

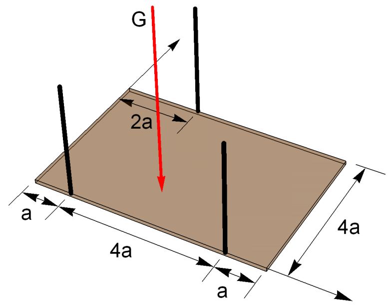
3.1 Ravninske naloge

3.1.1 Rešene naloge

3.2 Prostorske naloge

3.2.1 Rešene naloge

1. Pravokotna plošča dimenzije $4a \times 6a$ je vodoravno obešena na tri žice, tako kot kaže skica. Določi točko obremenitve plošče, da bodo sile žic enake.



Rešitev: Postavimo koordinatni sistem tako, da plošča leži v ravnini xy. Prijemališča žic na plošči so $P_1(a,0,0)$, $P_2(5a,0,0)$ in $P_3(2a,4a,0)$, sile žic pa so $\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = \vec{F}_3 = F\vec{k}$. Prijemališče obremenitve označmo s $P(x,y,0)$. Sila obremenitve je $\vec{G} = -G\vec{k}$. Iz ravnovesja sil dobimo takoj, da je velikost sil žic enaka $G/3$. Prijemališče obremenitve določa momentna enačba

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{3} \vec{OP_i} \times \vec{F_i} + \vec{OP} \times \vec{G} = \sum_{i=1}^{3} \vec{OP_i} \times F\vec{k} + (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}) \times G\vec{k} = (4F - yG)\vec{\imath} + (-8F + xG)\vec{\jmath}.$$

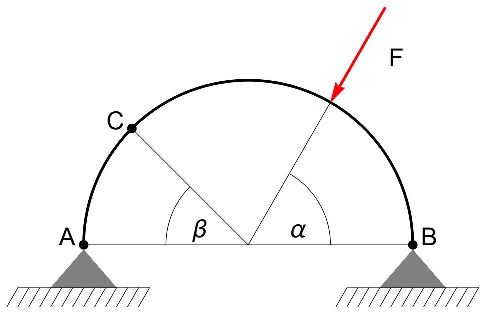
Upoštevajmo, da je $F = G/3$. Tako dobimo $x = \frac{8}{3}$ in $y = \frac{4}{3}$.

Poglavje 4

Statika sistema togih teles

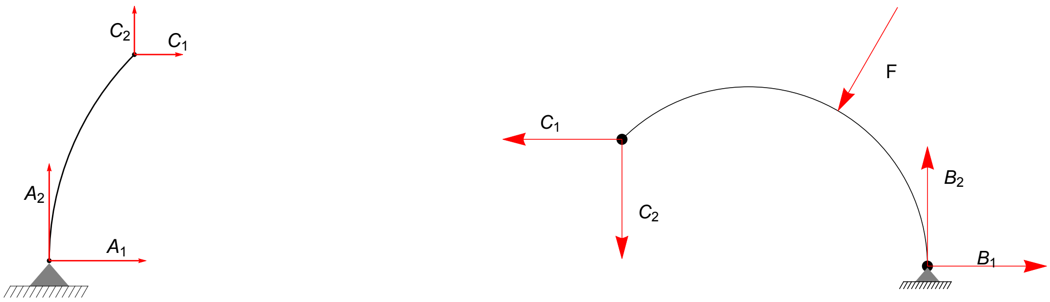
4.1 Rešene naloge

1. Točleni lok s polmerom R sestavljen iz lokov AC in CB je obremenjen tako kot kaže skica. Določi sile podpor.



Rešitev: Lok razdelimo na dva loka, glej skico. Za vsak lok veljajo ravnotežne enačbe. Za levi velja

$$\begin{aligned}0 &= A_1 + C_1,\\ 0 &= A_2 + C_2,\\ 0 &= R(1-\cos\beta)C_2 - R\sin\beta C_1.\end{aligned}$$



Slika 4.1: Sile na levi in desni lok.

Drugi sklop enačb so ravnotežne enačbe za desni lok. Namesto le teh pa raje zapišimo ravnovesne enačbe za celotni točleni lok, saj če so izpolnjene ravnovesne enačbe za levi lok in celotni točleni lok, so izpolnjene tudi za desni lok. Ravnovesne enačbe za celotni točleni lok so namreč nekoliko enostavnejše kot enačbe za desni lok.

$$\begin{aligned}0 &= A_1 + B_1 - F\cos\alpha,\\ 0 &= A_2 + B_2 - F\sin\alpha,\\ 0 &= -RA_2 + RB_2.\end{aligned}$$

Tu smo uporabili momentno enačbo s polom v središču loka. Sistem rešimo. Prvo dobimo, da je $A_2 = B_2$ in od tod $A_2 = B_2 = \frac{1}{2}F\sin\alpha$. Nadalje je

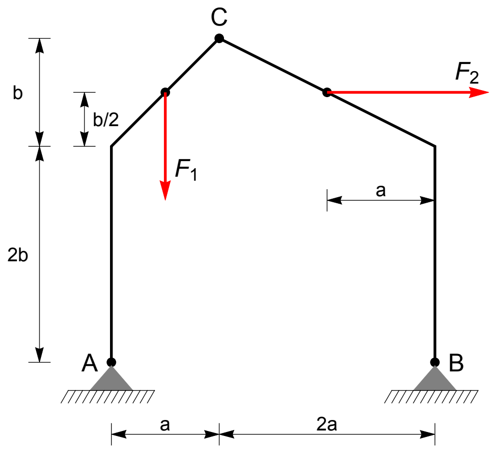
$$C_1 = \frac{1-\cos\beta}{\sin\beta}C_2 = \tan\frac{1}{2}\beta\, C_2 = -\frac{1}{2}\sin\alpha\tan\frac{1}{2}\beta\, F.$$

Tako dobimo še

$$A_1 = -C_1 = \frac{1}{2}\sin\alpha\tan\frac{1}{2}\beta\, F \quad B_1 = F\cos\alpha - A_1 = \left(\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha\tan\frac{1}{2}\beta\right)F.$$

Dobljena formula sil v podporah velja tudi, če je tročleni lok obremenjen v členku. V tem primeru lahko silo obremenitve $\vec{F}$ zapišemo v obliki $\vec{F} = \lambda\vec{F} + (1-\lambda)\vec{F}$ in nato pri razdelitvi tročlenega loka na levi in desni lok upoštevamo, da je levi lok obremenjen v spojnem členku s silo $\lambda\vec{F}$, desni pa z $(1-\lambda)\vec{F}$. Rezultat izračuna sil v podporah je neodvisen od števila λ, sila v spojnem členku pa je, vendar to ni pomembno, saj je v okviru statike pomembno samo to, da je vsota vseh sil na členek enaka nič.

2. Tročleni okvir sestavljen iz levega dela AC in desnega CB je členkasto nepomično podprt v A in B, glej skico. Izračunaj sile v podporah za primer $F_1 = F$, $F_2 = 2F$ in $a = b$.



Rešitev: Izhodišče koordinatnega sistema postavimo v A, osj x v vodoravni smeri, os y pa v navpični smeri. Na okvir deluje sistem sil, sila leve podpore $\vec{A} = A_1\vec{\imath} + A_2\vec{\jmath}$, desne podpore $\vec{B} = B_1\vec{\imath} + B_2\vec{\jmath}$, obremenitev na levi lok $\vec{F}_1 = -F\vec{\jmath}$ in desni lok $\vec{F}_2 = 2F\vec{\imath}$. Prijemališča sil so točke $A(0,0)$, $B(3a,0)$, $P_1(a, 5a/2)$ in $P_2(2a, 5a/2)$. Tu smo s P_1 in P_2 označili prijemališči sil F_1 in F_2.

Sedaj okvir razstavimo na levi in desni del, ki sta spojena v členku C. Označimo z $\vec{C} = C_1\vec{\imath} + C_2\vec{\jmath}$ silo levega dela na desni del. Ravnovesne enačbe za levi del so tako

$$A_1 + C_1 = 0, \quad A_2 + C_2 - F = 0, \quad -\frac{a}{2}F - 3aC_1 + aC_2 = 0, \tag{4.1}$$

kjer je zadnja enačba momentna enačba s polom v A. Sedaj zapišimo še ravnovesne enačbe za celotni okvir

$$A_1 + B_1 + 2F = 0, \quad A_2 + B_2 - F = 0, \quad -\frac{a}{2}F - \frac{5a}{2}2F + 3aB_2 = 0. \tag{4.2}$$

Tudi tokrat smo zapisali momentno enačbo s polom v A. Dobili smo sistem šestih enačb s šestimi neznankami A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 in C_2. Rešimo ga. Iz enačbe (4.2) dobimo takoj $B_2 = \frac{11}{6}F$ in nato iz (4.1) $A_2 = -\frac{5}{6}F$. Če odštejemo drugo enačbo (4.2) od druge enačbe (4.1) dobimo še $C_2 = B_2$. Potem iz tretje enačbe (4.2) sledi $C_1 = \frac{4}{9}F$ in nato končno

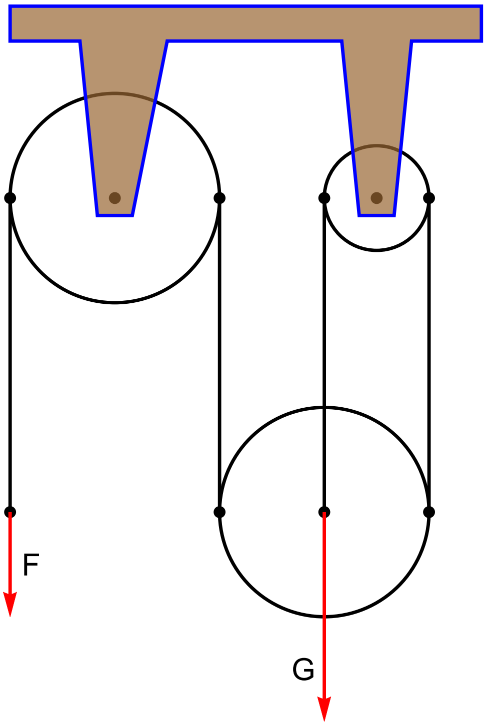
$$A_1 = -C_1 = \frac{4}{9}F \quad \text{in} \quad B_1 = -2F - A_1 = -\frac{14}{9}F.$$

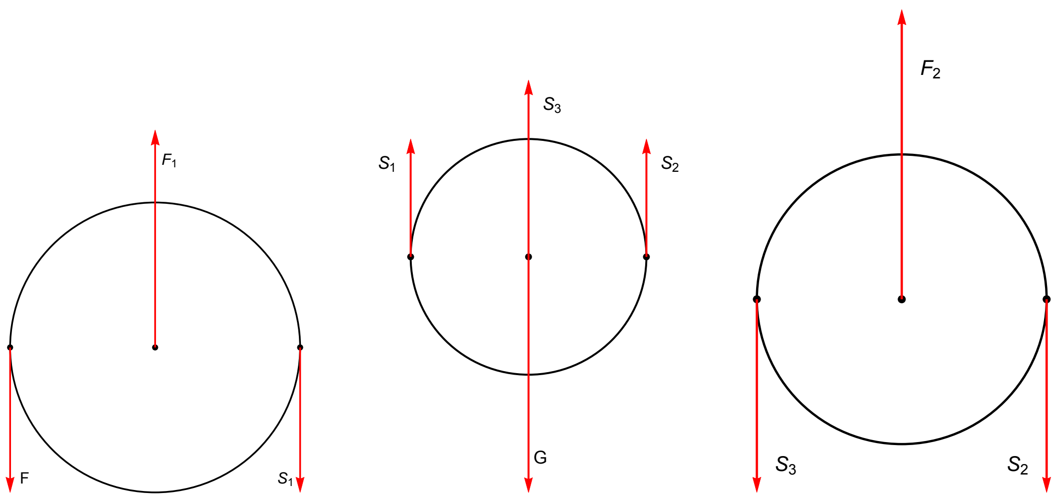
3. Za škripec na skici določi silo F potrebno za enakomerno dvigovanje bremena s težo G. Trenje v ležajih škripca zanemari.

   Rešitev: Škripec je sestavljen iz treh kolutov, ki jih povezujejo vrvi, glej skico razčlenitve na prosta telesa. Polmere kolutov označimo z r_1, r_2 in r_3. Za vsak kolut posebej veljajo ravnotežne enačbe. Ker nas ne zanimajo sile v ležajih, je dovolj za vpeta koluta napisati samo momentno enačbo. Ravnovesne momentne enačbe so tako $r_1F - rS_1 = 0$ za levi zgornji kolut, $-r_2S_1 + r_2S_2 = 0$ za spodnji kolut in $r_3S_3 - r_3S_2 = 0$ za desni zgornji kolut. Iz teh enačb sledi $S_1 = S_2 = S_3 = F$. Zapišimo sedaj ravnotežno enačbo za sile za spodnji kolut. Enačba je

$$S_1 + S_2 + S_3 - G = 0.$$

   Od tod sledi $3F = G$. Sila F, ki zagotavlja enakomerno dvigovanje(spuščanje) bremena je tako $G/3$.

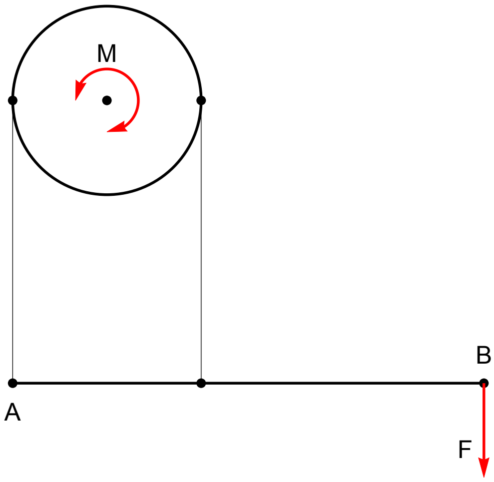


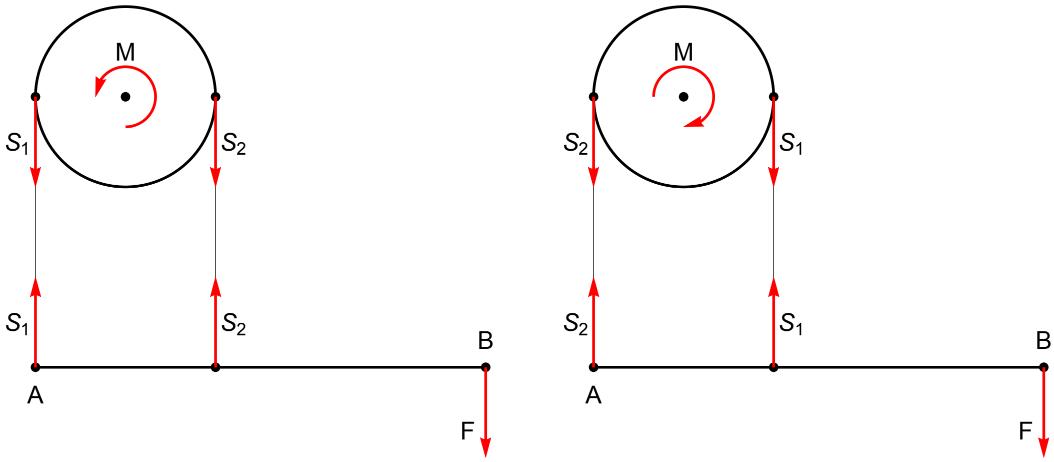


Slika 4.2: Diagram sil na kolute škripca, levi, spodnji, desni kolut.

4. Za tračno zavoro na skici, z ročico AB dolžine l in polmerom koluta r, določi silo F na ročico, ki bo uravnovesila navor M na kolut. Ločeno obravnavaj primera sournega in protiurnega delovanja navora M.

   Rešitev: Tračna zavora je sestavljena iz ročice, koluta in vrvi, ki drsi po kolutu. Sila trenja vrvi na kolutu je $S_2 = S_1\, e^{k\varphi}$, kjer je k koeficient trenja vrvi na kolutu, φ pa je ovojni kot vrvi na kolutu. Pri tem sila S_2 kaže v smer drsenja vrvi. To pomeni, da moramo ločiti primera sournega in protiurnega vrtenja koluta.





Slika 4.3: Tračna zavora, protiurna in sourna rotacija koluta.

Poglejmo prvo primer protiurnega vrtenja. Ker ne bomo računali sil na ležaj koluta in ročice, je dovolj, da uporabimo samo momentno enačbo za kolut in ročico. Momentna enačba za kolut je $M + rS_1 - rS_2 = 0$. Od tod, z upoštevanjem sile trenja na kolutu sledi

$$M = rS_1 \left(e^{k\pi} - 1\right). \tag{4.1}$$

Momentna enačba za ročico je $-lF + 2rS_2 = 0$. Potem z upoštevanjem zgornje enačbe

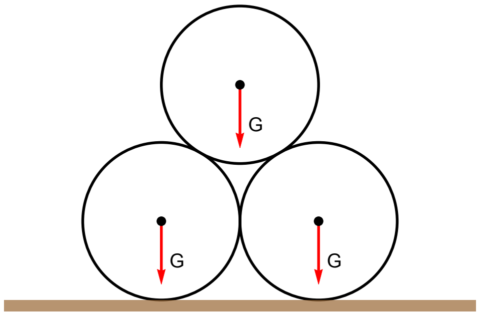
$$F = \frac{2R}{l} S_2 = \frac{2R}{l} S_1\, e^{k\pi} = \frac{2M\, e^{k\pi}}{l\,(e^{k\pi} - 1)}.$$

V primeru sournega vrtenja dobimo ponovno (4.1), za ročico pa $-lF + 2rS_1 = 0$. Potem

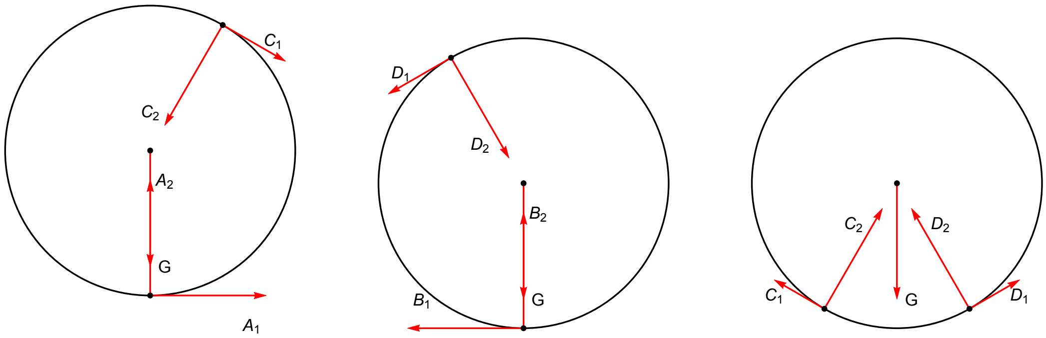
$$F = \frac{2R}{l} S_1 = \frac{2M}{l\,(e^{k\pi} - 1)}.$$

Vidimo, da je v tem primeru sila ročice potrebna za faktor $e^{k\pi}$ manjša sila.

5. Trije enaki valji so naloženi drug na drugega tako kot kaže skica. Določi koeficient lepenja med valji in valji in tlemi, ki zagotavlja ravnovesje. Kaj se zgodi, če obodna sila na valju preseže maksimalno dopustno vrednost?



Rešitev: Koeficient trenja označimo s k. nalogo bomo rešili na dva načina. Poglejmo prvega. Sistem je sestavljen iz treh valjev. Za vsak valj posebej narišimo diagram sil, glej skico.



Slika 4.4: Diagram sil na prosta telesa, levi, desni in zgornji valj.

Na levi spodnji valj delujejo sila tal $\vec{A} = A_1\vec{\imath} + A_2\vec{\jmath}$, sila zgornjega valja $\vec{C} = -C_1\vec{e}_\varphi(\pi/3) - C_2\vec{e}_r(\pi/3)$ in sila teže $\vec{G} = -G\vec{\jmath}$. Tu sta $\vec{e}_r(\alpha) = \cos\alpha\vec{\imath} + \sin\alpha\vec{\jmath}$ radialni, $\vec{e}_\varphi(\alpha) = -\sin\alpha\vec{\imath} + \cos\alpha\vec{\jmath}$ pa obodni bazni vektor, ki oklepa kot α s osjo x. Silo $\vec{C}$ smo namenoma zapisali po komponentah v radialni in obodni smeri, da bomo kasneje lažje določili pogoj na koeficient trenja. Sile na desni spodnji valj so sila tal $\vec{B} = B_1\vec{\imath} + B_2\vec{\jmath}$, sila zgornjega valja $\vec{D} = -D_1\vec{e}_r(2\pi/3) + D_2\vec{e}_\varphi(2\pi/3)$ in sila teže $\vec{G}$. Na zgornji valj delujeta sili spodnjih valjev $-\vec{C}$, $-\vec{D}$ in sila teže $\vec{G}$. Ravnovesne enačbe so

$$0 = A_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_1 - \frac{1}{2}C_2, \quad 0 = A_2 - \frac{1}{2}C_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}C_2 - G, \quad 0 = rA_1 - rC_1,$$

za levi valj,

$$0 = -B_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}D_1 + \frac{1}{2}D_2, \quad 0 = B_2 - \frac{1}{2}D_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}D_2 - G, \quad 0 = -rB_1 + rD_1,$$

za desni valj in

$$0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}C_1 + \frac{1}{2}C_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}D_1 - \frac{1}{2}D_2, \quad 0 = \frac{1}{2}C_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_2 + \frac{1}{2}D_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}D_2 - G, \quad 0 = -rC_1 + rD_1$$

za zgornji valj. Imamo sistem devetih enačb z osmimi neznankami. Sistem sil na zgornji valj ima ne glede na velikosti sil vedno skupno prijemališče, zato je momentna enačba odveč. Kljub temu pa jo bomo uporabili, saj je nismo zapisali s polom v prijemaliču sil in zato ni trivialna. V nadaljevanju pa bomo videli, da je ena enačba odveč. Iz momentnih enačb sledi takoj, da je $A_1 = B_1 = C_1 = D_1$. Potem

$$0 = (1 + \frac{\sqrt{3}}{2})A_1 - \frac{1}{2}C_2, \quad 0 = A_2 - \frac{1}{2}A_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}C_2 - G,$$

$$0 = -(1+\frac{\sqrt{3}}{2})A_1 + \frac{1}{2}D_2, \quad 0 = B_2 - \frac{1}{2}A_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}D_2 - G,$$
$$0 = \frac{1}{2}C_2 - \frac{1}{2}D_2, \quad 0 = A_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}D_2 - G.$$

Vidimo, in to na dva načina, da je $C_2 = D_2 = (2+\sqrt{3})A_1$. Ostane nam sistem

$$0 = -\sqrt{3}A_1 + A_2 - G, \quad 0 = B_2 - (2+\sqrt{3})A_1 - G, \quad 0 = 2(2+\sqrt{3})A_1 - G.$$

Rešitev je

$$A_1 = B_1 = C_1 = D_1 = \frac{G}{2(2+\sqrt{3})}, \quad A_2 = B_2 = \frac{3}{2}G, \quad C_2 = D_2 = \frac{G}{2}.$$

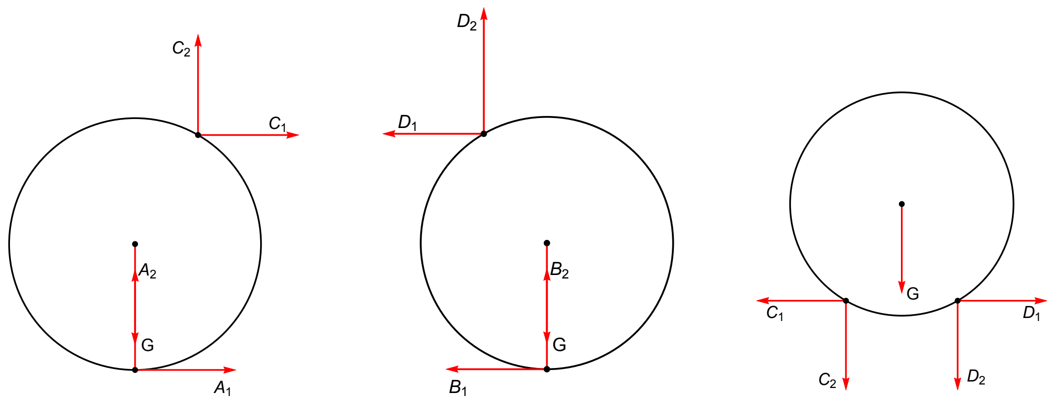
Tvorimo sedaj kvociente

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \doteq 0.089$$

in

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} \doteq 0.268.$$

Da ne pride do zdrsa mora biti tako med valji koeficient lepenja večji od $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$, med valjem in tlemi pa večji od $\frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}$. Če pogoja nista izpolnjena, sistem ni v ravnovesju in se prične gibati.



Slika 4.5: Diagram sil na prosta telesa, levi, desni in zgornji valj.

Sedaj bomo nalogo rešili še na drugi način. Sistem razstavimo na prosta telesa tako kot kaže skica. Opazimo, da smo sedaj sile medsebojnega vpliva med valji razstavili na horinzotalno in vertikalno komponento. Začnimo z zgornjim valjem. Ravnovesne enačbe so

$$C_1 - D_1 = 0, \quad C_2 + D_2 + G = 0, \quad rD_2 - rC_2 = 0.$$

Rešitev je $D_1 = C_1$ in $D_2 = C_2 = -G/2$. Za levi valj se ravnotežne enačbe glasijo

$$A_1 + C_1 = 0, \quad A_2 + C_2 - G = 0, \quad \frac{1}{2}rC_2 - r(1+\frac{\sqrt{3}}{2})C_1 = 0.$$

Tako dobimo

$$A_1 = \frac{G}{2(2+\sqrt{3})}, \quad A_2 = \frac{3G}{2}, \quad C_1 = \frac{C_2}{2+\sqrt{3}} = -\frac{G}{2(2+\sqrt{3})}.$$

Za A_1 in A_2 smo dobili enak rezultat kot prej. Pogoj, da ne pride do zdrsa zgornjega valja je, da je tangentna komponenta sile $\vec{C}$ po absolutni vrednosti manjša od absolutne vrednosti normalne komponente krat koeficient trenja. Torej

$$(C_1\vec{\imath} + C_2\vec{\jmath}) \cdot \vec{t} < k(C_1\vec{\imath} + C_2\vec{\jmath}) \cdot \vec{n},$$

kjer je $\vec{t} = \cos\pi/6\vec{\imath} - \sin\pi/6\vec{\jmath}$ enotski tangentni vektor v obodni smeri v točki C, $\vec{n} = -\cos\pi/3\vec{\imath} - \sin\pi/3\vec{\jmath}$ enotski vektor v smeri normale. Izračunamo posebej

$$C_t = (C_1\vec{\imath} + C_2\vec{\jmath}) \cdot \vec{t} = \left(-\frac{G}{2(2+\sqrt{3})}\vec{\imath} - \frac{G}{2}\vec{\jmath}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\imath} - \frac{1}{2}\vec{\jmath}\right) = \frac{G}{2(2+\sqrt{3})}$$

in

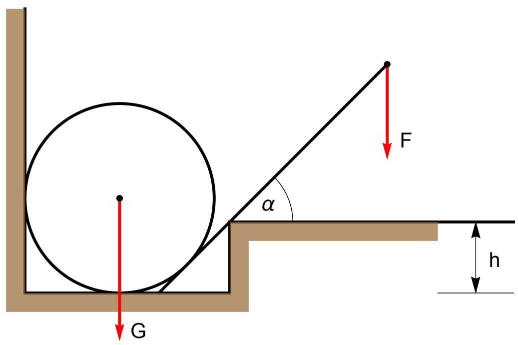
$$C_n = (C_1\vec{\imath} + C_2\vec{\jmath}) \cdot \vec{t} = \left(-\frac{G}{2(2+\sqrt{3})}\vec{\imath} - \frac{G}{2}\vec{\jmath}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\vec{\imath} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}\right) = -\frac{G}{2}.$$

Tako dobimo

$$\frac{C_t}{C_n} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} < k$$

kar se seveda ujema s pogojem, ki smo ga dobili pri reševanju naloge na prvi način.

6. V kanalu z višino h leži krogla s polmerom r, ki jo poskušamo dvigniti z vzvodom dolžine l, glej skico. Določi silo F, ki dvigne kroglo. Vzvod modeliraj kot tanko gladko palico. Dobljeni rezultat poenostavi za primer $r = h$ in $\alpha = \pi/4$.



Rešitev: Imamo sistem dveh togih teles, krogla in palica. Vsako telo posebej obravnavamo kot togo telo v statičnem ravnovesju. Na kroglo deluje sila stene $\vec{A}$ v vodoravni smeri, sila tal $\vec{B}$, sila palice $\vec{C}$ in sila teže $\vec{G}$, glej skico. Če postavimo koordinatni sistem z osjo x v vodoravni smeri in osjo y navpično navzgor je vektorski zapis sil $\vec{A} = A\vec{\imath}$, $\vec{B} = B\vec{\jmath}$, $\vec{C} = C(-\cos(\pi/2-\alpha)\vec{\imath} + \sin(\pi/2-\alpha)\vec{\jmath}) = C(-\sin\alpha\,\vec{\imath} + \cos\alpha\,\vec{\jmath})$ in $\vec{G} = -G\vec{\jmath}$. Sistem sil na kroglo ima skupno prijemališče v središcu krogle. Ravnovesni enačbi sta tako

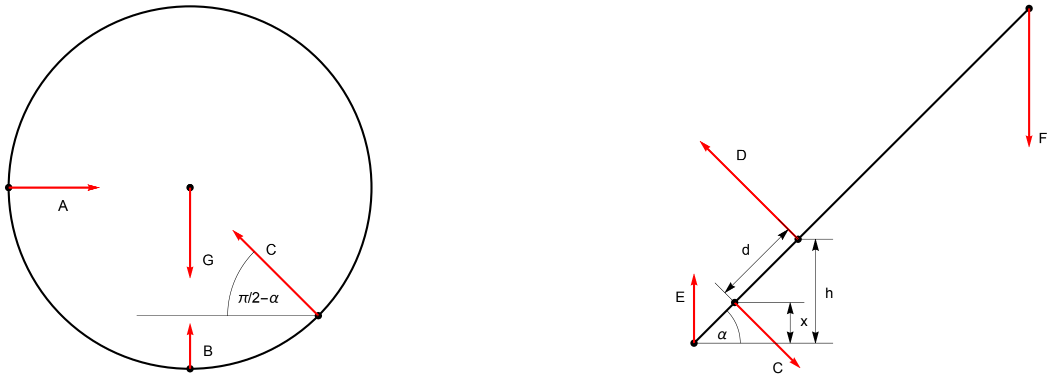
$$A - \sin\alpha C = 0, \qquad B + \cos\alpha C - G = 0.$$

Poglejmo sedaj vzvod. Ker s silo $\vec{F}$ potiskamo navzdol, deluje na vzvod sila tal $\vec{D}$. Delujeta še sili robnika kanala $\vec{D}$ in sila krogle na palico $-\vec{C}$. Iz diagrama sil takoj vidimo, da je $E = F$ in $C = D$. Iz ravnovesja momentov sledi, da je dvojica sil $\{\vec{D}, \vec{F}\}$ nasprotno enaka $\{\vec{C}, \vec{D}\}$. Od tod sledi

$$l\cos\alpha F = dD,$$

kjer je d razdalja med prijemališčema sil $\vec{C}$ in $\vec{D}$. Iz slike vidimo, da je $\sin\alpha = (h-x)/d$ in $x = r(1-\cos\alpha)$. Tako dobimo

$$d = \frac{h - r(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha}$$



Slika 4.6: Diagram sil na prosti telesi.

in

$$D = \frac{l}{d}\cos\alpha F = \frac{l\sin\alpha\cos\alpha}{h - r(1-\cos\alpha)}F.$$

Potem je

$$B = G - \cos\alpha C = G - \cos\alpha D = G - \frac{l\sin\alpha\cos^2\alpha}{h - r(1-\cos\alpha)}F.$$

V trenutku dviga je sila tal $\vec{B}$ na kroglo enaka nič. Sila na vzvod, ki dvigne palico je tako enaka

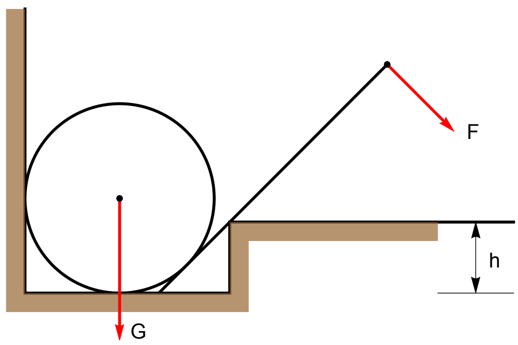
$$F = \frac{h - r(1-\cos\alpha)}{l\sin\alpha\cos^2\alpha}G.$$

Za $r = h$ potem sledi

$$F = \frac{2r}{l\sin 2\alpha}G$$

in za $\alpha = \pi/4$ je $F = \frac{2r}{l}G$.

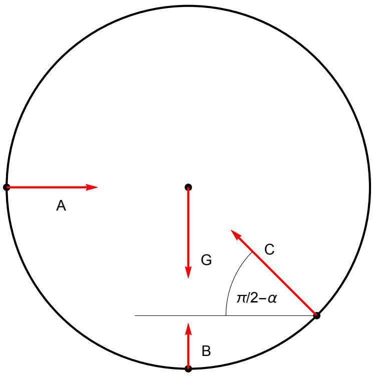
7. Podobno kot v predhodni nalogi tudi sedaj dvigujemo kroglo iz kanala, z razliko, da je tokrat sila $\vec{F}$ pravokotna na vzvod, glej skico. Določi silo F, ki dvigne kroglo. Dobljeni rezultat poenostavi za primer $r = h$ in $\alpha = \pi/4$.

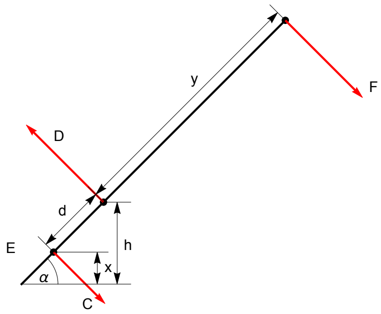


Rešitev: Sistem sil na kroglo je enak kot v predhodni nalogi, sistem sil na drog pa se razlikuje, saj tokrat vzvoda ne potiskamo navzdol in tako ne deluje sila tal na drog, glej skico. Ravnovesni enačbi sta $D - F - C = 0$ in $dC - yF = 0$, kjer je y razdalja med prijemališčema sil $\vec{D}$ in $\vec{F}$. Tako dobimo $C = \frac{y}{d}F$. S pomočjo skice vidimo, da je $y = l - h/\sin\alpha$.

Potem je z upoštevanjem ravnovesnih enačb za kroglo in znanih izrazov za d in y sledi

$$B = G - \cos\alpha C = G - \cos\alpha\frac{y}{d}F = G - \cos\alpha\frac{l\sin\alpha - h}{h - r(1-\cos\alpha)}F.$$





Slika 4.7: Diagram sil na prosti telesi.

V trenutku dviga je sila tal $\vec{B}$ na kroglo enaka nič. Sila na vzvod, ki dvigne palico je tako enaka

$$F = \frac{h - r(1 - \cos\alpha)}{(l\sin\alpha - h)\cos\alpha} G.$$

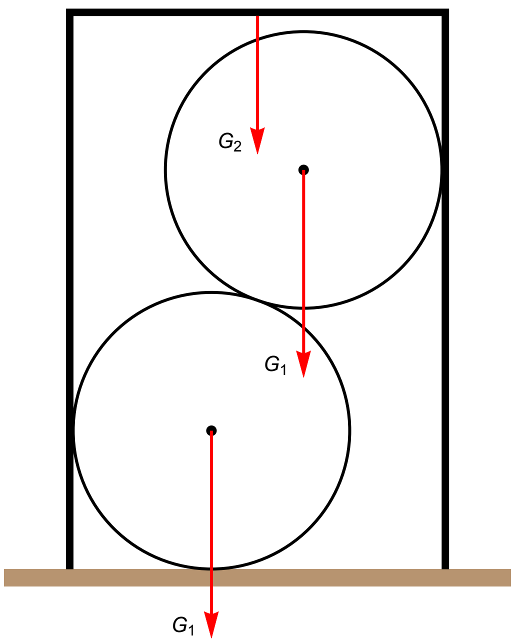
Za $r = h$ potem sledi

$$F = \frac{r}{l\sin\alpha - r} G$$

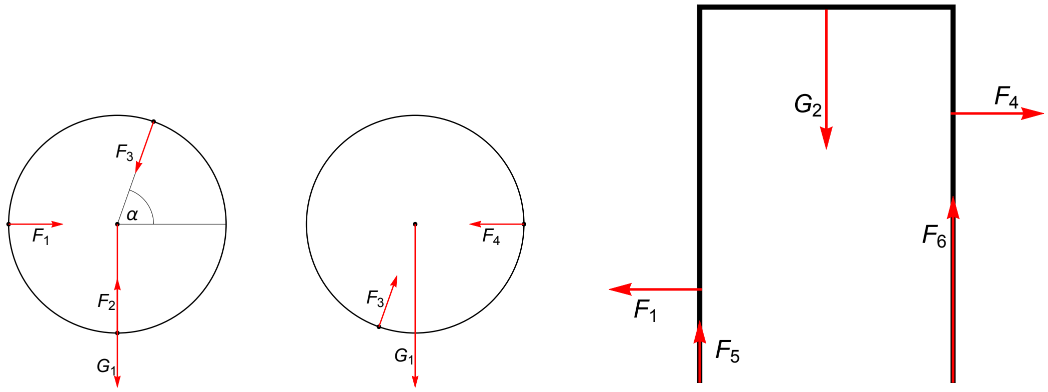
in za $\alpha = \pi/4$ je $F = \frac{r}{l/\sqrt{2} - r} G$. Če primerjamo rešitvi, vidimo, da je za visok robnik primernejši prvi način dviga, za nizek pa drugi.

8. Dve enaki krogli s polmerom r in težo G_1 pokrijemo z valjem s polmerom $R (r < R < 2r)$ in težo G_2, glej skico. Določi težo valja, da se valj ne prevrne.

   Rešitev: Sistem je sestavljen iz treh togih teles, dveh krogel in valja. Narišimo digram sil prostih teles, glej skico. Na spodnjo kroglo delujejo sila leve stene $\vec{F}_1$, sila tal $\vec{F}_2$, sila teže $\vec{G}_1$ in sila zgornje krogle $\vec{F}_3$. Na zgornjo kroglo delujejo sila spodnje krogle $-\vec{F}_3$, sila desne stene $\vec{F}_4$ in sila teže $\vec{G}_1$. Na valjasto posodo pa sili tal $\vec{F}_5$ in $\vec{F}_6$, sili krogel $-\vec{F}_1$ in $-\vec{F}_4$ in sila teže $\vec{G}_2$. Za vektorski zapis sile postavimo koordinatni sistem z osjo x v vodoravni smeri in osjo y v navpični smeri. Kot ki ga oklepa os x z zveznico med središčema krogel označimo z α. Vektorski zapis sil je potem



$$\vec{F}_1 = F_1\vec{\imath}, \quad \vec{F}_2 = F_2\vec{\jmath}, \quad \vec{F}_3 = -F_3(\cos\alpha\vec{\imath} + \sin\alpha\vec{\jmath}), \quad \vec{F}_4 = -F_4\vec{\imath}, \quad \vec{F}_5 = F_5\vec{\jmath}, \quad \vec{F}_6 = F_6\vec{\jmath}.$$



Slika 4.8: Diagram sil na prosta telesa.

Na krogli deluje sistem sil s skupnim prijemališčem, zato je ravnovesna momentna enačba trivialno izpolnjena. Ravnovesna pogoja sta tako $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{G}_1 = \vec{0}$ za prvo kroglo in $-\vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \vec{G}_1 = \vec{0}$ za drugo. Komponentni zapis je

$$F_1 - F_3 \cos\alpha = 0 \quad F_2 - F_3 \sin\alpha - G_1 = 0, \quad F_3 \cos\alpha - F_4 = 0, \quad F_3 \sin\alpha - G_1 = 0.$$

Sistem ima štiri neznanke in štiri enačbe. Rešitev je

$$F_1 = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} G_1, \quad F_2 = 2G_1, \quad F_3 = \frac{1}{\sin\alpha} G_1, \quad F_4 = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} G_1.$$

Pri ravnovesju valja moramo upoštevati tudi momentno enačbo. Za pol si izberimo točko na tleh, ki leži na simetrali valja. Tako za izračun navora potrebujemo y koordinati y_1 in y_4 prijemališč sil $-\vec{F}_1$ in $-\vec{F}_4$ na valj. Očitno je $y_1 = r$, za y_4 pa iz definicije kota α vidimo, da je $y_4 = r(1 + 2\cos\alpha)$. Ravnovesne enačbe za valj se tako v komponentnem zapisu glasijo

$$F_5 + F_6 - G_2 = 0, \quad -F_1 + F_4 = 0, \quad -RF_5 + RF_6 + rF_1 - r(1 + 2\sin\alpha)F_4 = 0.$$

Druga enačba je že izpolnjena. Iz prve enačbe dobimo $F_6 = G_2 - F_5$ in to vstavimo v tretjo in upoštevajmo že izračunane vrednosti za F_1 in F_4. Potem

$$0 = R(G_2 - 2F_5) - 2rG_1 \cos\alpha.$$

in od tod

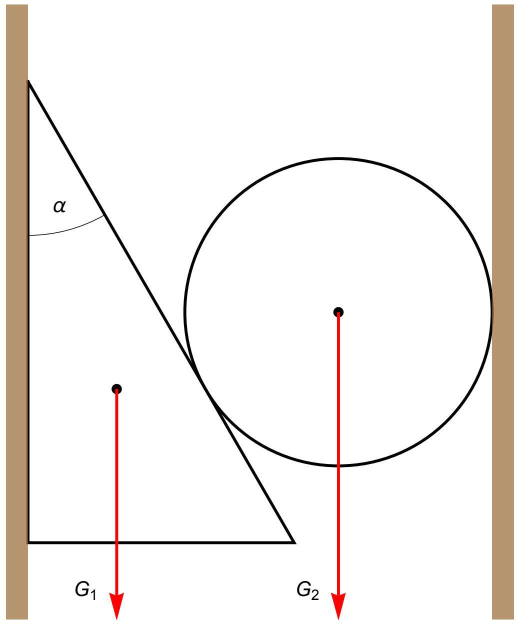
$$F_5 = \frac{1}{2} G_2 - \frac{r}{R} G_1 \cos\alpha.$$

Določimo sedaj kot α. Iz slike vidimo, da je $2R = r + 2r\cos\alpha + r$. Torej $\cos\alpha = (R - r)/r$. Vstavimo to v izraz za F_5 in dobimo

$$F_5 = \frac{1}{2} G_2 - G_1(1 - r/R).$$

Valj se ne prevrne, če je $F_5 \geq 0$. Pogoj, da se valj ne preverne je tako $G_2 \geq 2(1 - r/R)G_1$.

9. Med dvema vzporednima stenama sta zagozdena zagozda in valj, glej skico. Naklonski kot zagozde je α, polmer valja je r, teža zagozde G_1, valja pa G_2. Med zagozdo in valjem ni trenja, koeficient lepenja med steno in zagozdo oziroma valjem pa je k. Določi najmanjšo težo valja, ki drži zaporo.



Rešitev: Sistem je sestavljen iz dveh togih teles, zagozde in valja. Narišimo digram sil prostih teles, glej skico. Na zagozdo deluje sila stene $\vec{A} = A_1\vec{\imath} + A_2\vec{\jmath}$, sila teže $\vec{G}_1$ in sila valja na zagozdo $\vec{B} = -B(\cos\alpha\vec{\imath} + \sin\alpha\vec{\jmath})$. Tu smo kot običajmo postavili koordinatni sistem z osjo x v vodoravni smeri in y v navpični. Prijemališče sile stene določa momentni ravnovesni pogoj. Ker za našo nalogo to ni pomembno, ga ne bomo določili in tako tudi ne bomo uporabili momentno enačbo.

Ravnovesni enačbi za zagozdo sta

$$A_1 - B\cos\alpha = 0, \qquad A_2 - G_1 - B\sin\alpha = 0.$$

Poglejmo sedaj kroglo na katero delujejo sile $-\vec{B} = B(\cos\alpha\vec{\imath} + \sin\alpha\vec{\jmath})$,$\vec{G}_2$ in $\vec{C} = C_1\vec{\imath} + C_2\vec{\jmath}$. Ravnovesne enačbe so

$$-C1 + B\cos\alpha = 0, \quad C_2 + B\sin\alpha - G_2 = 0, \quad rC_2 = 0.$$

Od tod sledi

$$C_2 = 0, \quad B = \frac{1}{\sin\alpha}G_2, \quad C_1 = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}G_2.$$

Iz ravnovesnih enačb za zagozdo potem sledi

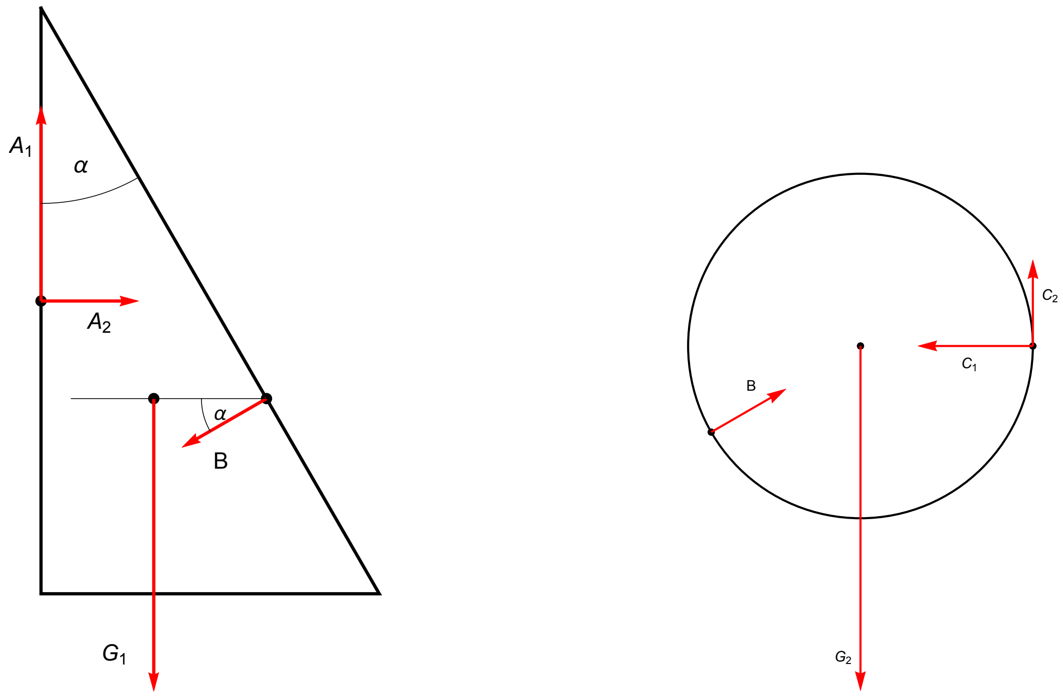
$$A_1 = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}G_2, \quad A_2 = G_1 + B\sin\alpha = G_1 + G_2.$$

Pogoj, da klada ne zdrsne je $A_2 < kA_1$. Vstavimo izračunane vrednosti. Potem

$$G_1 + G_2 < k\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}G_2.$$

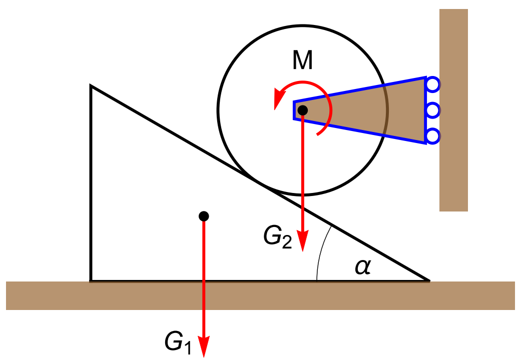
Od tod dobimo pogoj

$$\frac{\sin\alpha G_1}{k\cos\alpha - \sin\alpha} < G_2.$$



Slika 4.9: Diagram sil na prosta telesa.

10. Valj s polmerom r in težo G_2, ki je vertikalno prosto gibljiv, drsi po podstavljeni zagozdi s težo G_1, glej skico. Vrtenje valja poganja navor M. Koeficient trenja med tlemi in zagozdo je k_1, med zagozdo in valjem pa k_2. Določi navor M in zvezo med koeficientoma, da bo vrtenje valja enakomerno pomikalo zagozdo proti desni.



Rešitev: Sistem je sestavljen iz dveh togih teles, zagozde in valja. Narišimo digram sil prostih teles, glej skico.

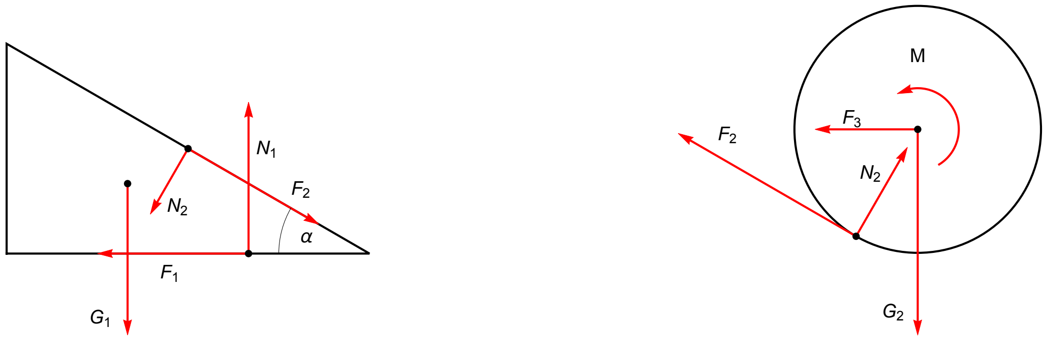
Na zagozdo deluje sila teže $\vec{G}_1 = -G_1\vec{\jmath}$, sila tal $F_1\vec{\imath} + N_1\vec{\jmath}$ in sila valja $F_2\vec{e}_1 + N_2\vec{e}_2$, kjer je $vece_1$ v smeri strmine zagozde, torej $\vec{e}_1 = \cos\alpha\vec{\imath} - \sin\alpha\vec{\jmath}$, $\vec{e}_2$ pa je pravokoten na strmino, $\vec{e}_2 = -\sin\alpha\vec{\imath} - \cos\alpha\vec{\jmath}$. Na valj delujejo sila teže $\vec{G}_2 = -G_2\vec{\jmath}$, sila zagozde na valj $-F_2\vec{e}_1 - N_2\vec{e}_2$ in sila ležaja $-F_3\vec{\imath}$.

Ravnovesni enačbi za zagozdo sta

$$F_2\cos\alpha - F_1 - N_2\sin\alpha = 0, \quad -F_2\sin\alpha - G_1 - N_2\cos\alpha + N_1 = 0. \tag{4.1}$$

Tu smo upoštevali samo ravnovesje sil, saj prijemališča sile podlage ne poznamo. Ravnovesne enačbe za valj pa so

$$-F_2\cos\alpha - F_3 + N_2\sin\alpha = 0, \quad F_2\sin\alpha - G_2 + N_2\cos\alpha = 0, \quad M - F_2 r = 0. \tag{4.2}$$



Slika 4.10: Diagram sil na prosti telesi, zagozda in valj.

Pri drsenju zagozde in valja velja $F_1 = k_1 N_1$ in $F_2 = k_2 N_2$. Vstavimo to v prvi dve enačbi (4.1). Tako dobimo dve enačbe za neznanki N_1 in N_2. Rešitev je

$$N_1 = \frac{G_1 (\sin\alpha - k_2 \cos\alpha)}{\sin\alpha + k_1 k_2 \sin\alpha + (k_1 - k_2)\cos\alpha}, \tag{4.3}$$

$$N_2 = -\frac{G_1 k_1}{\sin\alpha + k_1 k_2 \sin\alpha + (k_1 - k_2)\cos\alpha}. \tag{4.4}$$

Drugo enačbo v (4.2) preoblikujemo v

$$N_2(\cos\alpha + k_2 \sin\alpha) = G_2.$$

Upoštevajmo sedaj izraz za N_2. Tako dobimo enačbo, ki povezuje koeficienta trenja k_1 in k_2. Če jo rešimo na k_2, dobimo

$$k_2 = \frac{\tan\alpha + (1 + G_1/G_2)\, k_1}{1 - (1 + G_1/G_2)\, k_1 \tan\alpha}.$$

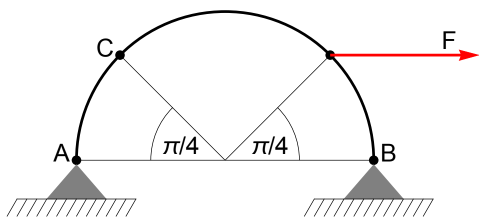
Za konec izračunajmo še navor M. Iz tretje enačbe (4.2) sledi

$$M = rF_2 = rk_2 N_2 = r\left(G_2 \sin\alpha + (G_1 + G_2)\, k_1 \cos\alpha\right).$$

4.2 Dodatne naloge

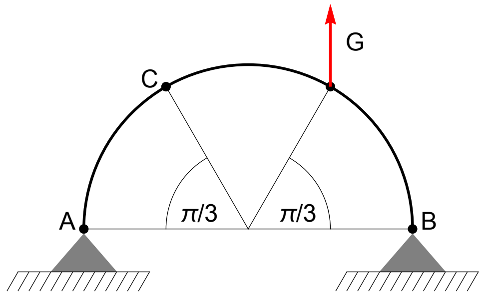
1. Tročleni lok s polmerom R sestavljen iz lokov AC in CB je obremenjen tako kot kaže skica. Določi sile podpor.

   Rešitev: $A_1 = \frac{1}{4}(-2 + \sqrt{2})F$, $A_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}F$, $B_1 = -\frac{1}{4}(2 + \sqrt{2})F$, $B_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}F$.



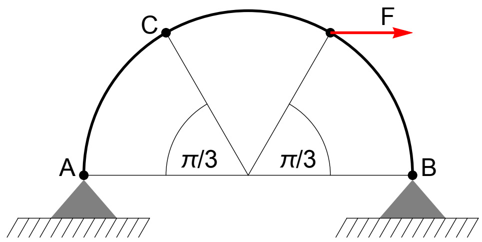
2. Tročleni lok s polmerom R sestavljen iz lokov AC in CB je obremenjen tako kot kaže skica. Določi sile podpor.

   Rešitev: $A_1 = -\frac{1}{4\sqrt{3}}G$, $A_2 = -\frac{1}{4}G$, $B_1 = \frac{1}{4\sqrt{3}}G$, $B_2 = -\frac{3}{4}G$.



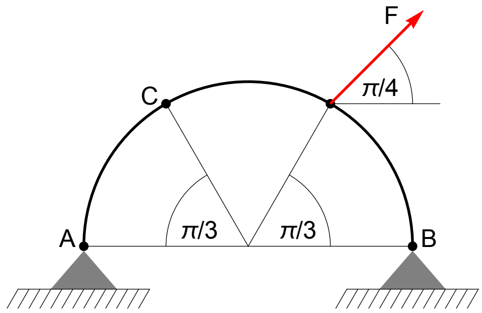
3. Tročleni lok s polmerom R sestavljen iz lokov AC in CB je obremenjen tako kot kaže skica. Določi sile podpor.

   Rešitev: $A_1 = -\frac{1}{4}F$, $A_2 = -\frac{\sqrt{3}}{4}F$, $B_1 = -\frac{3}{4}F$, $B_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}F$.



4. Tročleni lok s polmerom R sestavljen iz lokov AC in CB je obremenjen tako kot kaže skica. Določi sile podpor in pokaži, da lahko nalogo rešiš tudi s kombinacijo rešitev prdhodnih nalog.

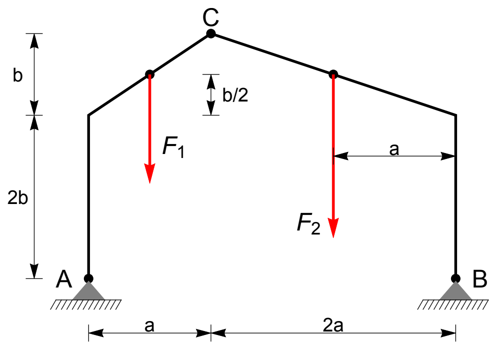
   Rešitev: $A_1 = -\frac{(3+\sqrt{3})F}{12\sqrt{2}}$, $A_2 = -\frac{1}{4}\sqrt{2+\sqrt{3}}F$, $B_1 = \frac{(-9+\sqrt{3})F}{12\sqrt{2}}$, $B_2 = \frac{(-3+\sqrt{3})F}{4\sqrt{2}}$.



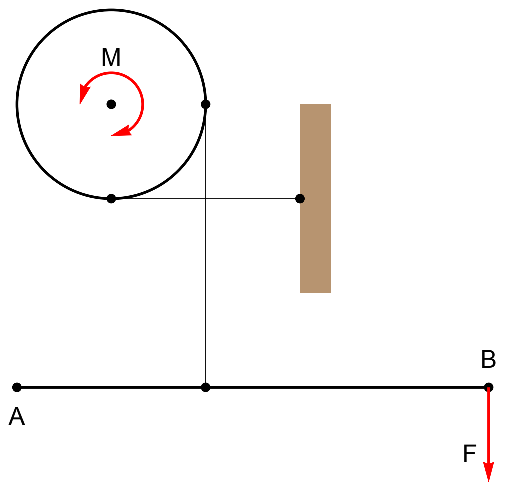
5. Tročleni okvir sestavljen iz levega dela AC in desnega CB je členkasto nepomično podprt v A in B, glej skico. Izračunaj sile v podporah za primer $F_1 = F$, $F_2 = 2F$.

   Rešitev:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \frac{aF}{3b}, \quad A_2 = \frac{3F}{2}, \\
B_1 &= -\frac{aF}{3b}, \quad B_2 = \frac{3F}{2}A_1.
\end{aligned}
$$



6. Za tračno zavoro na skici, z ročico AB dolžine l in polmerom koluta r, določi silo F na ročico, ki bo uravnovesila navor M na kolut. Ločeno obravnavaj primera sournega in protiurnega delovanja navora M.



Rešitev: Protiurno vrtenje

$$F = \frac{2M\,\mathrm{e}^{3k\pi/2}}{l\left(\mathrm{e}^{3k\pi/2} - 1\right)},$$

sourno

$$F = \frac{2M}{l\left(\mathrm{e}^{3k\pi/2} - 1\right)}.$$

7. Tri enake krogle s polmerom r in težo G_1 pokrijemo z valjem s polmerom $R(r < R < 2r)$ in težo G_2, glej skico za primer dveh krogel. Določi težo valja, da se valj ne prevrne.

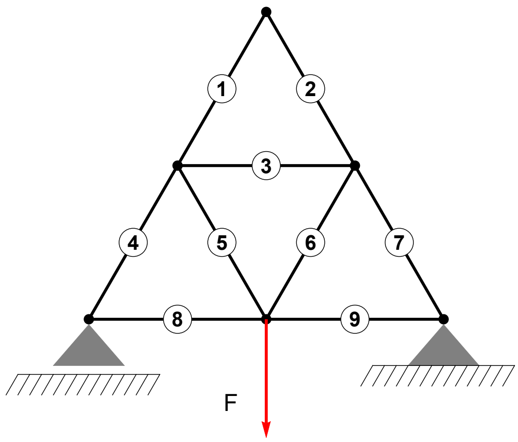
Rešitev: Velja enak pogoj kot za dve krogli.

Poglavje 5

Paličje

5.1 Rešene naloge

1. Za paličje sestavljeno iz enakostraničnih trikotnikov na sliki izračunaj sile palic.



Rešitev: Označimo levo podporo z A, desno z B in postavimo koordinatni sistem z osjo x v vodoravni smeri in osjo y v navpični. Sili podpor sta $\vec{A} = A\vec{\jmath}$ in $\vec{B} = B_1\vec{\imath} + B_2\vec{\jmath}$. Iz simetrije naloge takoj sledi $B_1 = 0$ in $A = B_2 = F/2$. Ker je vrh paličja neobremenjen, sta sili palic v vrhu enaki nič, $F_1 = F_2 = 0$. Nadalje zaradi simetrije sledi, da je $F_4 = F_7$, $F_5 = F_6$ in $F_8 = F_9$. Sile F_3, F_6, F_7 in F_9 določimo z vozliščno metodo. Iz ravnovesja sil v desni podpori

$$\frac{1}{2}F + \frac{\sqrt{3}}{2}F_7 = 0, \qquad -F_9 - \frac{1}{2}F_7 = 0$$

sledi

$$F_7 = -\frac{1}{\sqrt{3}}F, \qquad F_9 = \frac{1}{2\sqrt{3}}F.$$

Iz ravnovesja v presečišču palic 2, 3, 6 in 7

$$-F_3 - \frac{1}{2}F_6 + \frac{1}{2}F_7 = 0, \qquad -\frac{\sqrt{3}}{2}F_6 - \frac{\sqrt{3}}{2}F_7 = 0$$

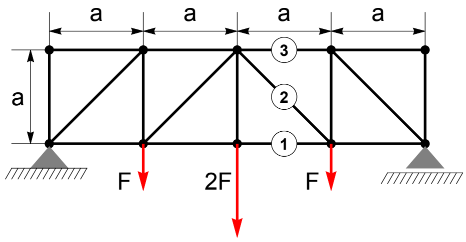
dobimo

$$F_6 = \frac{1}{\sqrt{3}}F, \qquad F_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}F.$$

2. Za paličje na sliki izračunaj:

   (a) sile v podporah A in B;

   (b) sile označenih palic $1, 2, 3$.

   Rešitev: Prvo določimo sile podpor. Sili podpor v vertikalni smeri označimo z A in B. Momentna enačba s polom v A je

$$4aB - F(a + 4a + 3a) = 0.$$

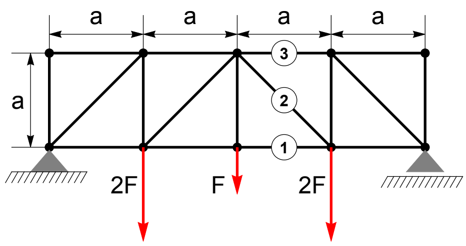
Od tod $B = 2F$ in zaradi simetrije problema $A = B = 2F$. Horizontalna komponenta v podpori je enaka nič.

Sile palic bomo izračunali s prerezno metodo. Zapisali bomo ravnovesne enačbe za desni del paličja. Momentna enačba v presečišču prve in druge palice je $aF_3 + aF - 2aA = 0$. Potem $F_3 = 3F$. Momentna enačba v presečišču druge in tretje palice je $-aF_1 - aA = 0$. Od tod $F_1 = -2F$. Silo F_2 druge palice dobimo iz ravnovesja sil v navpični smeri. Velja $A - F + \frac{1}{\sqrt{2}} F_2 = 0$ in tako $F_2 = -\sqrt{2}F$.

3. Za paličje na sliki izračunaj:

   (a) sile v podporah A in B;

   (b) sile označenih palic $1, 2, 3$.

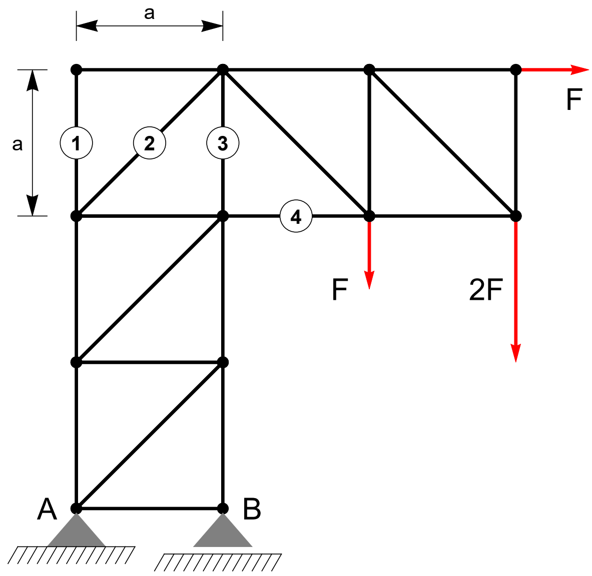
   Rešitev: Prvo določimo sile podpor. Sili podpor v vertikalni smeri označimo z A in B. Momentna enačba s polom v A je

$$-4aB + F(2a + 2a + 6a) = 0.$$

Od tod $B = \frac{5}{2}F$ in zaradi simetrije $A = B = \frac{5}{2}F$. Horizontalna komponenta v podpori je enaka nič.

Sile palic bomo izračunali s prerezno metodo. Zapisali bomo ravnovesne enačbe za desni del paličja. Momentna enačba v presečišču prve in druge palice je $aF_3 - aA = 0$. Potem $F_3 = \frac{5}{2}F$. Momentna enačba v presečišču druge in tretje palice je $aF_1 + 2aA - 2aF = 0$. Od tod $F_1 = -3F$. Silo F_2 druge palice dobimo iz ravnovesja sil v navpični smeri. Velja $A - 2F - \frac{1}{\sqrt{2}} F_2 = 0$ in tako $F_2 = -\sqrt{2}F$.

4. Za dano paličje na skici določi sile označenih palic.



Rešitev: Prvo izračunamo sili podpor. Silo podpore v A označimo z $\vec{A} = A_1\vec{\imath} + A_2\vec{\jmath}$, v B pa z $\vec{B} = B_2\vec{\jmath}$. Iz ravnovesne enačbe v vodoravni smeri sledi $A_1 = -F$. Momentna enačba s polom v A je

$$a \times B_2 - 2a \times F - 3a \times 2F - 3a \times F = 0$$

in tako $B_2 = 11F$. Momentna enačba s polom v B pa je

$$-a \times A_2 - a \times F - 2a \times 2F - 3a \times F = 0.$$

Rešitev je $A_2 = -8F$. Preizkus $A_2 + B_2 = -3F$ potrdi pravilnost izračuna.

Sledi izračun sil palic. Prvo opazimo, da je $F_1 = 0$, saj je levo zgornje vozliče, ki je povezano z dvema palicama neobremenjeno. To pomeni, da lahko sile palic izračunamo s prerezno metodo, ki navidezno prereže paličje skozi palice 2, 3 in 4. Zapisali bomo ravnovesne enačbe za zgornji del paličja. Momentna enačba s polom v presečišču 2. in 3. palice je

$$-a \times F_4 - a \times F - 2a \times 2F = 0 \quad \Longrightarrow F_4 = -5F,$$

momentna enačba s polom v presečišču 2. in 4. palice je

$$-a \times F_3 - 2a \times F - 3a \times 2F - a \times F = 0 \quad \Longrightarrow F_3 = -9F,$$

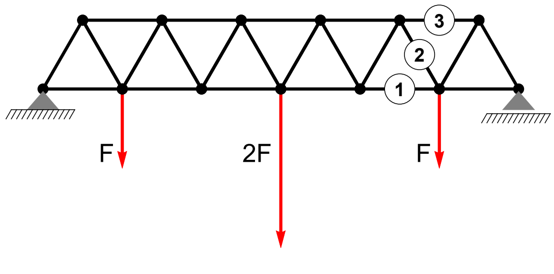
momentna enačba s polom v presečišču 3. in 4. palice pa je

$$\frac{a}{\sqrt{2}} \times F_2 - a \times F - 2a \times 2F - a \times F = 0 \quad \Longrightarrow F_2 = 6\sqrt{2}F.$$

5. Podano je paličje sestavljeno iz enakostraničnih trikotnikov.

   (a) Določi sile v podporah.

   (b) Izračunaj označene sile palic.



Rešitev:

(a) Označimo z a dolžino stranice trikotnika, z A levo in z B desno podporo. Ker so obremenitve samo v navpični smeri, sta sili podpor tudi samo v navpični smeri. Iz momentne enačbe s polom v A sledi

$$-aF - 3a \times 2F - 5aF + 6aB = 0.$$

Od tod $B = 2F$. Iz momente enačbe s polom v B pa dobimo

$$-6aA + 5aF + 3a \times 2F + aF = 0 \Longrightarrow A = 2F.$$

Za kontrolo $A + B - 4F = 0$. Sili podpor lahko dobimo tudi takoj z upoštevanjem simetrije problema.

(b) Sile določimo s prerezno metodo. Sile palic bomo določili s pomočjo ravnovesnih enačb za desni del paličja. Iz momentne enačbe s polom v presečišču prve in druge palice sledi

$$\frac{\sqrt{3}}{2}aF_3 + aB = 0 \Longrightarrow F_3 = -\frac{2}{\sqrt{3}}B = -\frac{4}{\sqrt{3}}F.$$

Iz momentne enačbe s polom v presečišču druge in tretje palice sledi

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}aF_1 - \frac{1}{2}aF + \frac{3}{2}aB = 0 \Longrightarrow F_1 = \frac{5}{\sqrt{3}}F.$$

Silo druge palice določimo z upoštevanjem ravnovesne enačbe v vodoravni smeri. Imamo

$$\frac{1}{2}F_2 + F_1 + F_3 = 0 \Longrightarrow F_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}}F.$$

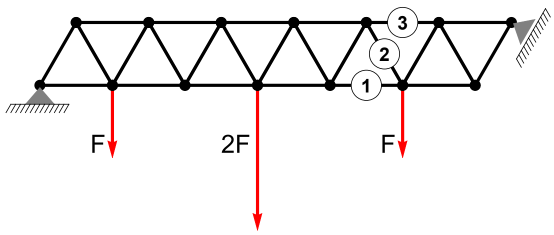
Za kontrolo

$$\frac{\sqrt{3}}{2}F_2 - F + B = 0.$$

6. Podano je paličje sestavljeno iz enakostraničnih trikotnikov.

   (a) Določi sile v podporah.

   (b) Izračunaj označene sile palic.



Rešitev:

(a) Označimo z a dolžino stranice trikotnika, z A levo in z B desno podporo. Postavimo koordinatni sistem z izhodiščem v A in usmerimo os x v vodoravno smer os y pa v navpično. Sila leve podpore je $\vec{A} = A_1\vec{\imath} + A_2\vec{\jmath}$, desne podpore pa $\vec{B} = B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\imath} + \frac{1}{2}\vec{\jmath}\right)$.
Primejališče sile desne podpore je točka B s koordinatami $a\left(\frac{13}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
Silo desne podpore dobimo iz momentne enačba ravnovesja s polom v točki A. Moment sile podpore je

$$a\left(\frac{13}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}\right) \times B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\imath} + \frac{1}{2}\vec{\jmath}\right) = 4aB\vec{k}.$$

Momentna enačba v semri osi z se tako glasi

$$0 = -aF - 6aF - 5aF + 4aB.$$

Od tod $B = 3F$ in

$$\vec{B} = 3F\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\imath} + \frac{1}{2}\vec{\jmath}\right).$$

Silo podpore A dobimo iz ravnovesja sil v vodoravni in navpični smeri. Rešitev je

$$\vec{A} = F\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\vec{\imath}, \frac{5}{2}\vec{\jmath}\right).$$

(b) Sile določimo s prerezno metodo. Sile palic bomo določili s pomočjo ravnovesnih enačb za levi del paličja. Iz momentne enačbe s polom v presečišču prve in druge palice dobimo silo tretje palice

$$F_3 = -3\sqrt{3}F.$$

Momentna enačba s polom v presečišču druge in tretje palice nam da silo prve palice

$$F_1 = \frac{5}{\sqrt{3}}F.$$

Silo druge palice

$$\vec{F_2} = F_2\left(\frac{1}{2}\vec{\imath} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}\right)$$

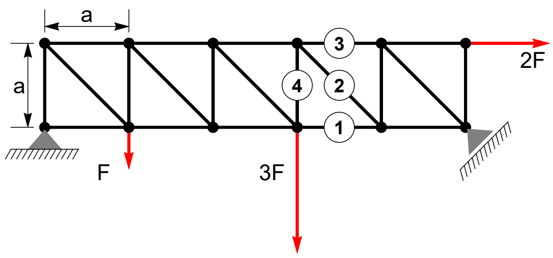
določimo iz ravnovesja sil. Po krajšem računu dobimo

$$F_2 = -\frac{F}{\sqrt{3}}.$$

7. Za podano paličje na sliki, desna podpora je drsna pod kotom $\pi/4$:

   (a) določi sile v podporah;

   (b) izračunaj označene sile palic.



Rešitev:

(a) Silo desne podpore zapišemo v obliki $\vec{B} = B(-\vec{\imath} + \vec{\jmath})/\sqrt{2}$, sila leve podpore pa je $\vec{A} = A_1\vec{\imath} + A_2\vec{\jmath}$. Momentna enačba s polom v levi podpori se glasi

$$-aF - 9aF + \frac{5aB}{\sqrt{2}} - 2aF = 0 \Rightarrow B = \frac{12\sqrt{2}F}{5},$$

momentna enačba s polom v desni podpori pa

$$-5aA_2 + 4aF + 6aF - 2aF = 0 \Rightarrow A_2 = \frac{8F}{5}.$$

Ravnovesna enačba sil v vodoravni smeri je

$$A_1 - \frac{B}{\sqrt{2}} + 2F = 0 \Rightarrow A_1 = \frac{2F}{5}.$$

(b) Sile palic 1,2 in 3 dobimo s prerezno metodo. Zapišimo ravnovesne pogoje za desni del paličja. Ravnovesje momentov s polom v presečišču palice 2 in 3 je

$$aF_1 + 2aF + aA_1 - 3aA_2 \Rightarrow F_1 = \frac{12F}{5}.$$

Ravnovesje momentov s polom v presečišču palice 1 in 2 je

$$-aF_3 + 3aF + 3aF - 4aA_2 \Rightarrow F_3 = -\frac{2F}{5}.$$

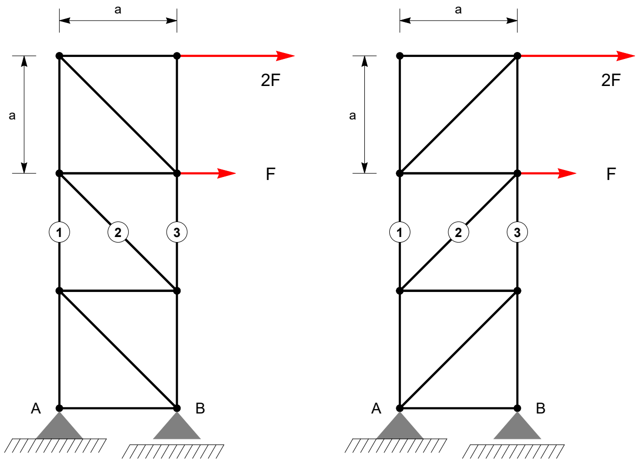
Iz ravnovesja sil v navpični smeri potem sledi

$$F_2 = -\frac{12F\sqrt{2}}{5}.$$

Sedaj, ko poznamo v presečišču palice 2 in 3 sili F_2 in F_3 lahko določimo tudi F_4.

$$F_4 + \frac{1}{\sqrt{2}}F_2 = 0 \Rightarrow F_4 = \frac{12F}{5}.$$

8. Podani sta dve paličji, glej skico.
   (a) Izračunaj sile v podporah.
   (b) Določi sile označenih palic.
   (c) Ugotovi, katero paličje ima manjše kompresibilne sile označenih palic.



Rešitev:

(a) Prvo izračunamo sile podpor. Ker sta obe paličji enako obremenjeni, imata enake sile podpor. Sila v levi podpori je $\vec{A} = A_1\vec{\imath} + A_2\vec{\jmath}$, v desni pa $\vec{B} = B_2\vec{\jmath}$. Vsota sil v vodoravni smeri je nič. Potem $A_1 = -3F$. Iz momentne enačbe s polom v B sledi $-a \times A_2 - 2a \times F - 3a \times 2F = 0$ in od tod $A_2 = -8F$. Nadalje velja $A_2 + B_2 = 0$ in tako $B_2 = -A_2 = 8F$.

(b) Izračunajmo sedaj sile označenih palic levega paličja. Paličje navidezno prerežemo skozi označene palice. Zgornji odrezani del je pod vplivom označenih palic v ravnovesju. Postavimo pol momentne enačbe v presek prve in druge palice. Potem $0 = -a \times F_3 - a \times 2F$ in tako $F_3 = -2F$. Sedaj pol momentne enačbe v presek druge in tretje palice. Potem $0 = a \times F_1 - a \times F - 2a \times 2F$ in $F_1 = 5F$. Vsota sil v vodoravni smeri mora biti enaka nič. Torej $0 = F_2/\sqrt{2} + F + 2F$ in $F_2 = -3\sqrt{2}F$. Za kontrolo preverimo, če je vsota v navpični smeri tudi enaka nič. Izračunajmo $-F_1 - F_2/\sqrt{2} - F_3 = -5F + 3F + 2F = 0$. Tako smo za levo paličje dobili

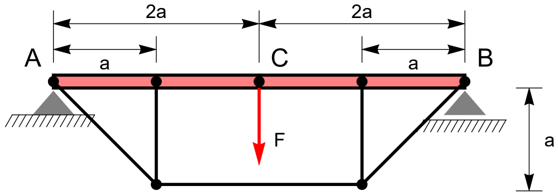
$$F_1 = 5F, \quad F_2 = -3\sqrt{2}F, \quad F_3 = -2F.$$

Poglejmo sedaj še drugo paličje. Postavimo pol v presečišče prve in druge palice. Potem $0 = -a \times F_3 - a \times F - 2a \times 2F$ in $F_3 = -5F$.Za presečišče druge in tretje palice velja $0 = a \times F_1 - a \times 2F$. Torej $F_1 = 2F$. Ravnovesna enačba v vodoravni smeri je $0 = -F/\sqrt{2} + F + 2F$ in tako $F_2 = 3\sqrt{2}F$. Za kontrolo $-F_1 - F_2/\sqrt{2} - F_3 = -2F - 3F + 5F = 0$. Sile desnega paličja so

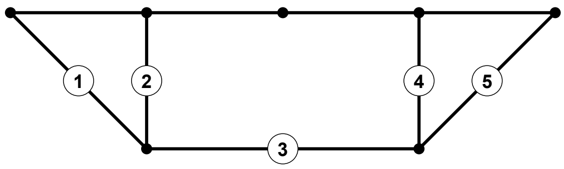
$$F_1 = 2F, \quad F_2 = 3\sqrt{2}F, \quad F_3 = -5F.$$

(c) Ker je $-5 < -3\sqrt{2}$, ima desno paličje večje kompresibilne sile označenih palic, zato je leva postavitev boljša.

9. Dva nosilca sta členkasto speta v točki C, enostavno podprta na svojih krajiščih in spojena s paličjem tako kot kaže skica. Izračunaj sile palic.



Rešitev: Prvo izračunamo sili podpor. Iz simetrije naloge takoj sledi, da sta sili podpor enaki $A = B = F/2$.
Za izračun sil palic, palice prvo označimo, tako kot kaže skica. Palico 3 navidezno prerežemo s prerezom skozi točko C. Na desni del konstrukcije deluje sila desne podpore, levi del konstrukcije s silo $\vec{C}$ v točki C, obtežba $\vec{F}$ in sila palice $\vec{F}_3$.



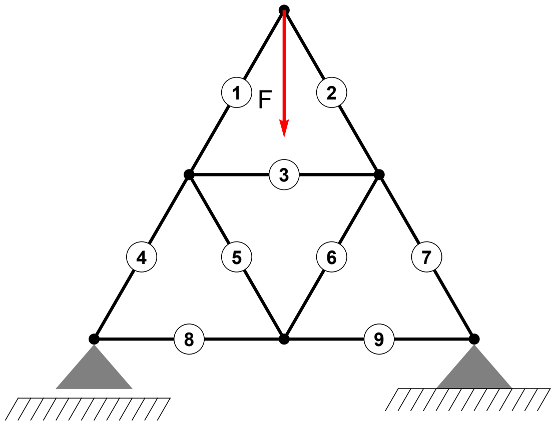
Obtežbo $\vec{F}$ lahko v celoti pripišemo levemu ali desnemu delu, lahko pa jo tudi proporcionalno razdelimo med deloma. Kot bomo kmalu videli, kako obtežbo razdelimo, ne vpliva na sile palic. Ravnotežna enačba momenta s polom v točki C je $\frac{3}{4}aF - aF_3 = 0$ in tako $F_3 = \frac{3}{4}F$. V spoju palic 3, 4 in 5 je vsota sil palic enaka nič. Iz ravnovesja v vodoravni smeri dobimo $F_5 = \frac{3\sqrt{2}}{4}F$ in nato še v navpični $F_4 = -\frac{3}{4}F$. Zaradi simetrije so sile palic na levi in desni enake, velja $F_1 = F_5$ in $F_2 = F_4$.

5.2 Dodatne naloge

1. Za paličje sestavljeno iz enakostraničnih trikotnikov na sliki izračunaj sile palic.

   Rešitev:

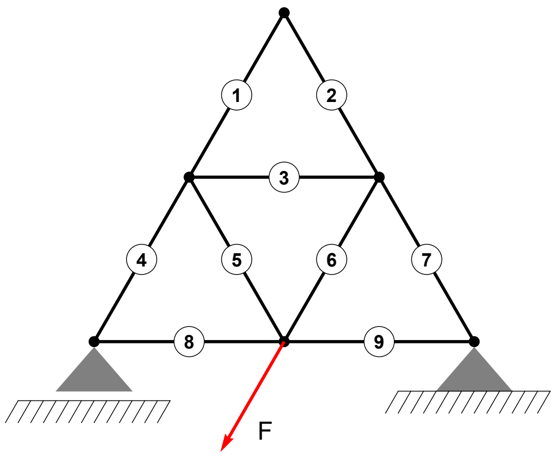
   $F_1 = -F/\sqrt{3}$, $F_2 = -F/\sqrt{3}$,
   $F_3 = 0$, $F_4 = -F/\sqrt{3}$,
   $F_5 = 0$, $F_6 = 0$,
   $F_7 = -F/\sqrt{3}$, $F_8 = F/2\sqrt{3}$,
   $F_9 = F/2\sqrt{3}$, $A = F/2$,
   $B_1 = 0$, $B_2 = F/2$.



2. Za paličje sestavljeno iz enakostraničnih trikotnikov na sliki izračunaj sile palic.

   Rešitev:

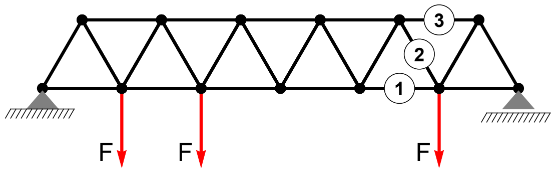
   $F_1 = 0$, $F_2 = 0$,
   $F_3 = -F/2$, $F_4 = -F/2$,
   $F_5 = F/2$, $F_6 = F/2$,
   $F_7 = -F/2$, $F_8 = F/4$,
   $F_9 = 3F/4$, $A = \sqrt{3}F/4$,
   $B_1 = F/2$, $B_2 = \sqrt{3}F/4$.



3. Za paličje sestavljeno iz enakostraničnih trikotnikov izračunaj sile označenih palic.

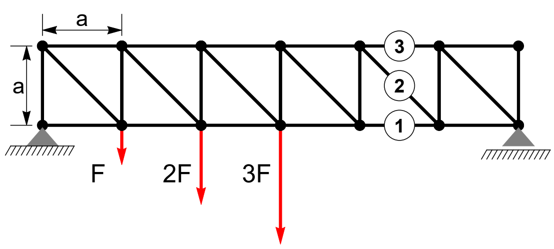
   Rešitev:

   $F_1 = \sqrt{3}F$, $F_2 = -2F/3\sqrt{3}$,
   $F_3 = -8F/3\sqrt{3}$.



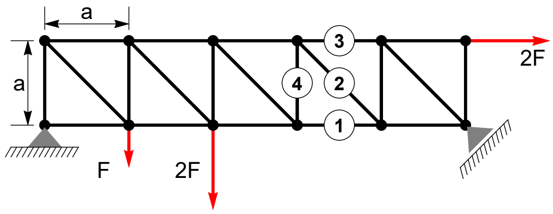
4. Za podano paličje na sliki izračunaj sile označenih palic.

   Rešitev:
   $F_1 = 14/3F$, $F_2 = -7\sqrt{2}/3F$,
   $F_3 = -7/3F$.



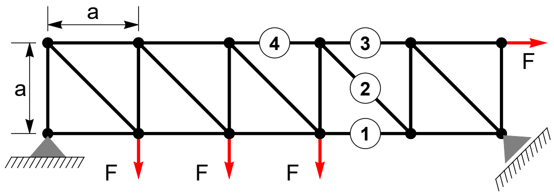
5. Za podano paličje na sliki izračunaj sile označenih palic. Desna podpora je pod kotom $\pi/4$.

   Rešitev:
   $F_1 = 7F/5$, $F_2 = -7\sqrt{2}F/5$,
   $F_3 = 3F/5$, $F_4 = -4F/5$.



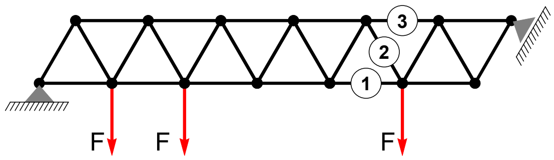
6. Za podano paličje na sliki izračunaj sile označenih palic. Desna podpora je pod kotom $\pi/4$.

   Rešitev:
   $F_1 = 7F/5$, $F_2 = -7\sqrt{2}F/5$,
   $F_3 = -2F/5$, $F_4 = -9F/5$.



7. Za podano paličje na sliki izračunaj sile označenih palic.

   Rešitev:
   $F_1 = \sqrt{3}F$, $F_2 = 0$, $F_3 = -2\sqrt{3}F$.



Poglavje 6

Nosilci

6.1 Enostavno podprti nosilec

Enostavno podprti nosilec dolžine l je točkovno obremenjen v točkah a_i, $i = 1, \ldots, n$ s silami $\vec{F}_i$.

1. Skiciraj potek prečne sile.
2. Skiciraj potek upogibnega momenta.

Rešitev: Nalogo rešimo v treh korakih. Prvo določimo sile podpor, nato potek prečne sile in na koncu še potek upogibnega momenta.

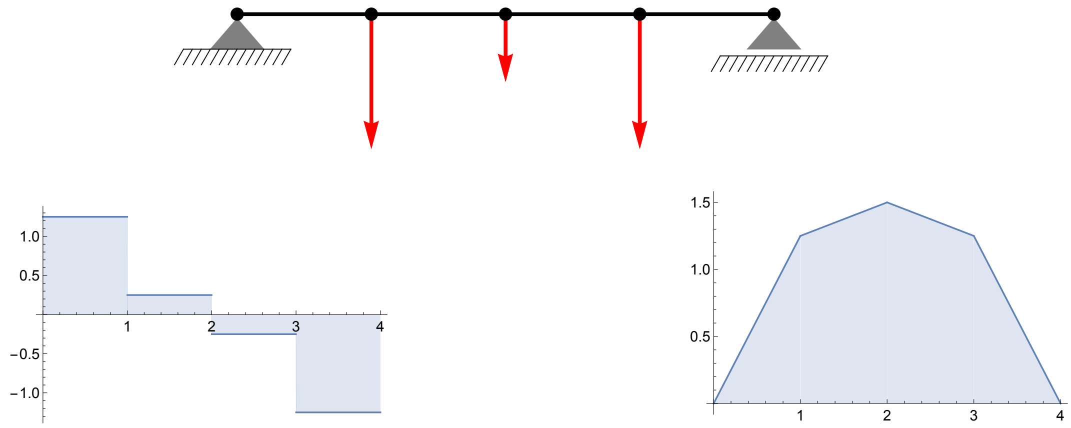
1. Podporo v levem krajišču označimo z A, v desnem z B. Določimo jih iz enačbe ravnovesja navorov. Velja $\sum_{i=1}^{n} a_i F_i = lB$ in $\sum_{i=1}^{n}(l - a_i)F_i = lA$. Tako dobimo:
$$A = \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{n}(l - a_i)F_i \qquad B = \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{n} a_i F_i$$
2. Za enostavno podprti nosilec vemo, da je prečna sila Q v levem krajišču enaka sili podpore A, v desnem pa $-B$. Nadalje je prečna sila odsekoma konstantna s skoki v točkah obremenitve, ki so enaki obremenitvam.
3. Upogibni moment M je pri enostavno podprtem nosilcu v krajiščih enak nič, med točkami obremenitve pa poteka linearno. Iz enačbe $\frac{dM}{dt} = Q$ sledi, da je strmina enaka vrednosti prečne sile.

6.1.1 Konkretni primeri

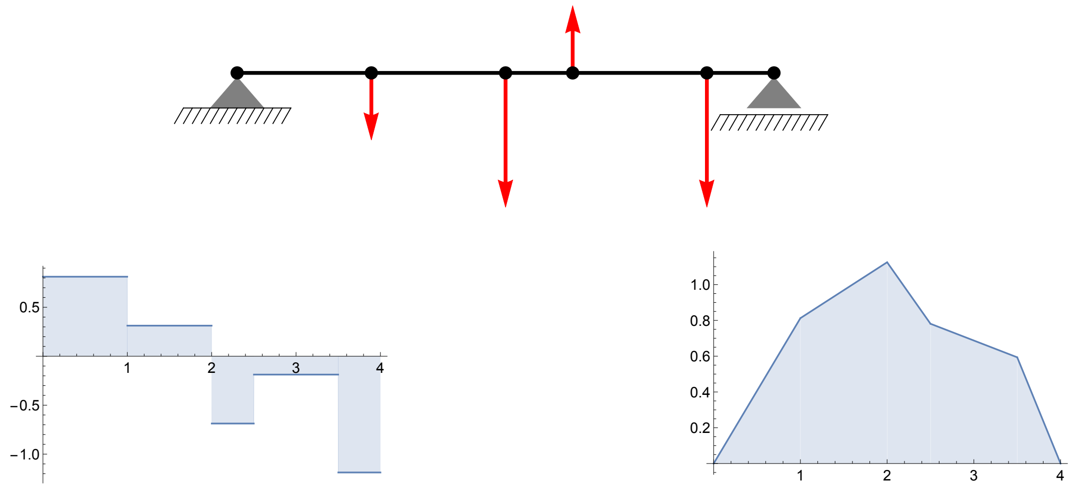
1. $n = 3$, $l = 4\,\mathrm{m}$, $a_1 = 1\,\mathrm{m}$, $a_2 = 2\,\mathrm{m}$, $a_3 = 3\,\mathrm{m}$, $\vec{F}_i = F_i\vec{k}$, $F_1 = 1\,\mathrm{kN}$, $F_2 = 1/2\,\mathrm{kN}$, $F_3 = 1\,\mathrm{kN}$. Glej sliko 6.1.
2. $n = 4$, $l = 4\,\mathrm{m}$, $a_1 = 1\,\mathrm{m}$, $a_2 = 2\,\mathrm{m}$, $a_3 = 5/2\,\mathrm{m}$, $a_4 = 7/2\,\mathrm{m}$, $\vec{F}_i = F_i\vec{k}$, $F_1 = 1/2\,\mathrm{kN}$, $F_2 = 1\,\mathrm{kN}$, $F_3 = -1/2\,\mathrm{kN}$, $F_4 = 1\,\mathrm{kN}$. Glej sliko 6.2.

6.2 Previsni nosilec

Previsni nosilec dolžine l je podprt na levem krajišču in v oddaljenosti d od levega krajišča. Nosilec je točkovno obremenjen v točkah a_i, $i = 1, \ldots, n$ s silami $\vec{F}_i$.



Slika 6.1: Primer a: nosilec z obremenitvami, potek prečne sile in upogibnega momenta.



Slika 6.2: Primer b: nosilec z obremenitvami, potek prečne sile in upogibnega momenta.

1. Skiciraj potek prečne sile.
2. Skiciraj potek upogibnega momenta.

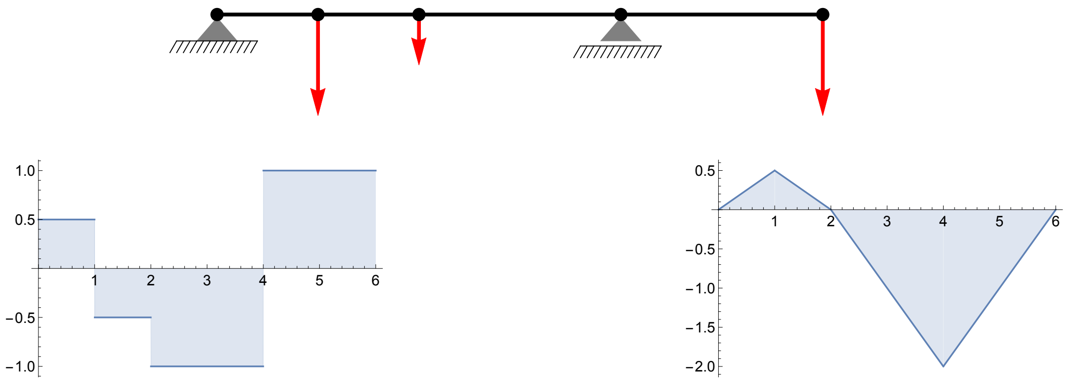
Rešitev: Nalogo rešimo v treh korakih. Prvo določimo sile podpor, nato potek prečne sile in na koncu še potek upogibnega momenta.

1. Podporo v levem krajišču označimo z A, v desnem z B. Določimo jih iz enačbe ravnovesja navorov. Velja $\sum_{i=1}^{n} a_i F_i = dB$ in $\sum_{i=1}^{n}(d-a_i)F_i = dA$. Tako dobimo:
$$A = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{n}(d-a_i)F_i \qquad B = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{n} a_i F_i$$
2. Za previsni nosilec vemo, da je prečna sila Q v levem krajišču enaka sili podpore A, nato pa ima v vsaki točki obremenitve skok, ki je enak obremenitvi. Tu moramo kot točkovno obremenitev upoštevati tudi desno podporo, kjer ima prečna sila skok podpore.

3. Upogibni moment M je na krajiščih enak nič, med točkami obremenitve pa poteka linearno. Iz enačbe $\frac{dM}{dt} = Q$ sledi, da je strmina enaka vrednosti prečne sile.

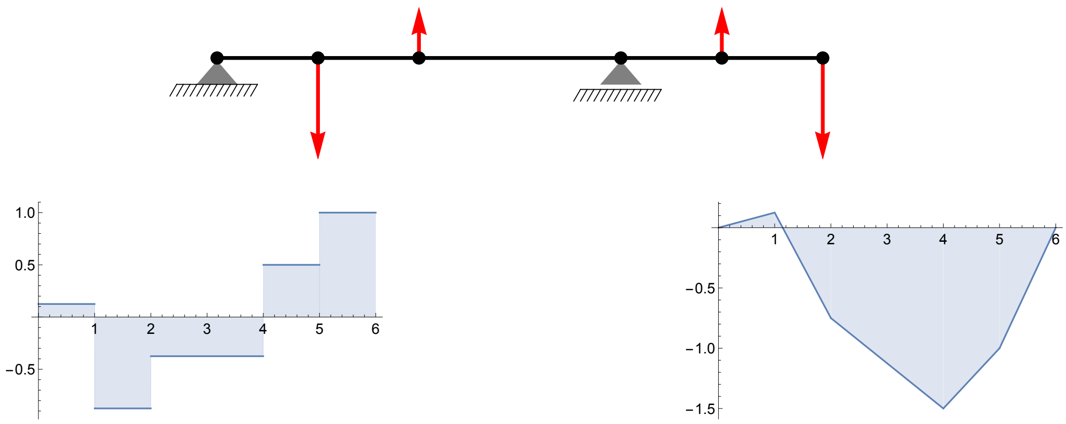
6.2.1 Konkretni primeri

1. $n = 3$, $l = 6\,\mathrm{m}$, $d = 4\,\mathrm{m}$, $a_1 = 1\,\mathrm{m}$, $a_2 = 2\,\mathrm{m}$, $a_3 = 6\,\mathrm{m}$, $\vec{F_i} = F_i\vec{k}$, $F_1 = 1\,\mathrm{kN}$, $F_2 = 1/2\,\mathrm{kN}$, $F_3 = 1\,\mathrm{kN}$. Glej sliko 6.3.



Slika 6.3: Primer a: previsni nosilec z obremenitvami, potek prečne sile in upogibnega momenta.

2. $n = 4$, $l = 6\,\mathrm{m}$, $d = 4\,\mathrm{m}$, $a_1 = 1\,\mathrm{m}$, $a_2 = 2\,\mathrm{m}$, $a_3 = 5\,\mathrm{m}$, $a_4 = 6\,\mathrm{m}$, $\vec{F_i} = F_i\vec{k}$, $F_1 = 1\,\mathrm{kN}$, $F_2 = -1/2\,\mathrm{kN}$, $F_3 = -1/2\,\mathrm{kN}$, $F_4 = 1\,\mathrm{kN}$. Glej sliko 6.4.



Slika 6.4: Primer b: previsni nosilec z obremenitvami, potek prečne sile in upogibnega momenta.

6.3 Konzolni nosilec

Konzolni nosilec dolžine l je konzolno vpet v levem krajišču in je točkovno obremenjen v točkah a_i, $i = 1, \ldots, n$ s silami $\vec{F_i}$.

1. Skiciraj potek prečne sile.

2. Skiciraj potek upogibnega momenta.

Rešitev: Nalogo rešimo v treh korakih. Prvo določimo sile in navor v konzolnem vpetju, nato potek prečne sile in na koncu še potek upogibnega momenta.

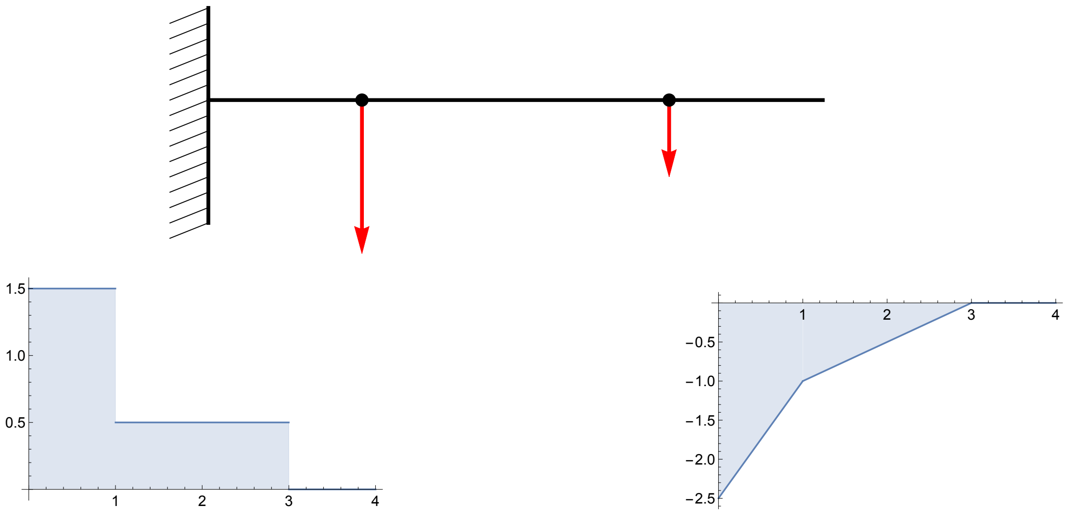
1. Levo podporo označimo z A. Reakcijo v podpori določimo iz ravnovesja sil in navorov. Velja $A = \sum_{i=1}^{n} F_i$ in $M_A = \sum_{i=1}^{n} a_i F_i$.

2. Prečna sila Q je v levem krajišču enaka sili podpore A, nato pa ima v vsaki točki obremenitve skok, ki je enak obremenitvi.

3. Upogibni moment M je v levem krajišču enak $-M_A$, nato pa med točkami obremenitve pa poteka linearno. Iz enačbe $\frac{dM}{dt} = Q$ sledi, da je strmina enaka vrednosti prečne sile.

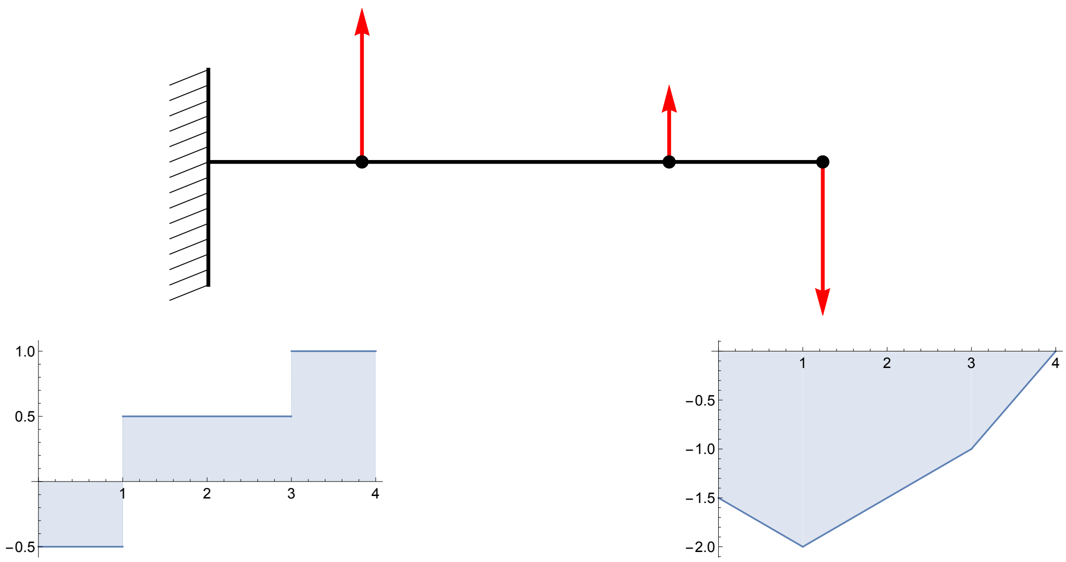
6.3.1 Konkretni primeri

1. $n = 2$, $l = 4\,\mathrm{m}$, $a_1 = 1\,\mathrm{m}$, $a_2 = 3\,\mathrm{m}$, $\vec{F_i} = F_i\vec{k}$, $F_1 = 1\,\mathrm{kN}$, $F_2 = 1/2\,\mathrm{kN}$. Glej sliko 6.5.



Slika 6.5: Primer a: konzolni nosilec z obremenitvami, potek prečne sile in upogibnega momenta.

2. $n = 3$, $l = 4\,\mathrm{m}$, $a_1 = 1\,\mathrm{m}$, $a_2 = 3\,\mathrm{m}$, $a_3 = 4\,\mathrm{m}$, $\vec{F_i} = F_i\vec{k}$, $F_1 = -1\,\mathrm{kN}$, $F_2 = -1/2\,\mathrm{kN}$, $F_3 = 1\,\mathrm{kN}$. Glej sliko 6.6.



Slika 6.6: Primer b: konzolni nosilec z obremenitvami, potek prečne sile in upogibnega momenta.

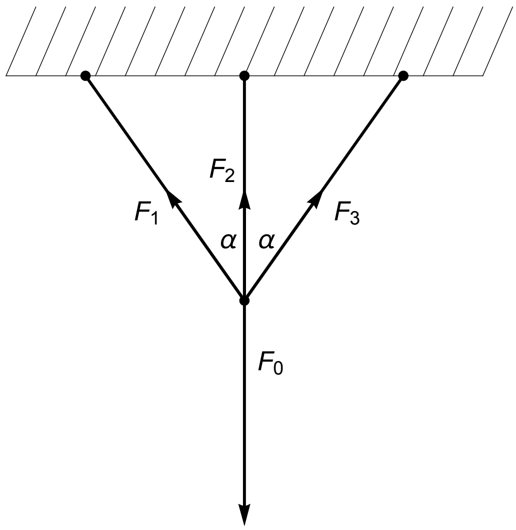
Poglavje 7

Enoosna deformacija in napetost

7.1 Statično nedoločene naloge

7.1.1 Rešene naloge

1. Paličje na sliki je sestavljeno iz treh elastičnih palic. Vse tri imajo enak presek A in Youngov modul E. Kot α je $\pi/4$, srednja palica pa ima dolžino $1\,\mathrm{m}$. Palice so pritrjene členkasto na stropu in so v spodnjem členku obremenjene s silo $F_0 = 15\,\mathrm{kN}$. Določi sile v palicah in izračunaj pomik spodnjega členka.



Rešitev: Sistem treh neznanih sil ima skupno prijemališče, zato je naloga statično nedoločena. Za določitev sil palic moramo upoštevati osne deformacije palic. Zaradi simetrije je $F_1 = F_3$. Ravnovesna enačba sil v navpični smeri je

$$2F_1 \cos\alpha + F_2 = F_0.$$

Po Hookovem zakonu je

$$F_1 = AE\frac{\Delta l_1}{l_1}, \qquad F_2 = AE\frac{\Delta l_2}{l_2},$$

kjer sta l_1 in l_2 dolžini leve in sredinske palice, Δl_1 in Δl_2 pa njuna osna pomika. Pri obtežitvi se paličje raztegne v navpični smeri. Po deformaciji velja

$$(l_1 + \Delta l_1)^2 = d^2 + (l_2 + \Delta l_2)^2.$$

Tu je d razdalja med pritrdiščema palic na stropu. Ker je $l_1^2 = d^2 + l_2^2$, sledi da je

$$2l_1\Delta l_1 + (\Delta l_1)^2 = 2l_2\Delta l_2 + (\Delta l_2)^2.$$

Pri predpostavki majhnih deformacij pri kateri velja Hookov zakon smemo zanemariti člena $(\Delta l_1)^2$ in $(\Delta l_2)^2$. Tako dobimo

$$l_1 \Delta l_1 = l_2 \Delta l_2.$$

oziroma $\Delta l_1 = \Delta l_2 l_2 / l_1$. Ravnovesna enačbe se potem glasi

$$F_0 = \frac{2AE\Delta l_2 l_2 \cos\alpha}{l_1^2} + \frac{AE\Delta l_2}{l_2} = \frac{2AE\Delta l_2 l_2^2}{l_1^3} + \frac{AE\Delta l_2}{l_2}.$$

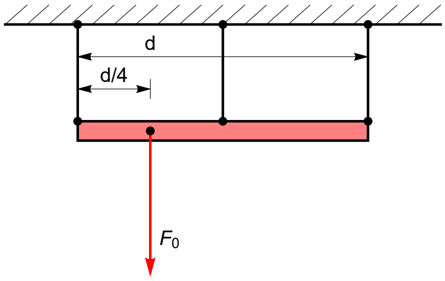
V zadnji enakosti smo upoštevali, da je $\cos\alpha = l_2/l_1$. Rešitev enačbe je

$$\Delta l_2 = \frac{F_0 l_1^3 l_2}{AE\,(l_1^3 + 2l_2^3)}.$$

Sili sta potem

$$F_1 = \frac{F_0 l_1 l_2^2}{l_1^3 + 2l_2^3} = \frac{F_0 \cos^2(\alpha)}{2\cos^3(\alpha) + 1} = 15(1 - 1/\sqrt{2})\text{kN},$$
$$F_2 = \frac{F_0 l_1^3}{l_1^3 + 2l_2^3} = \frac{F_0}{2\cos^3(\alpha) + 1} = 30(1 - 1/\sqrt{2})\text{kN}.$$

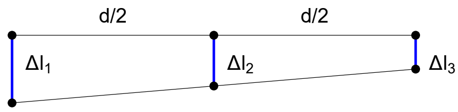
2. S stropa je na treh žici obešen togi nosilec dolžine d, glej sliko. Žice so enako dolge, imajo enak Youngov modul E in presek A. Za obremenitev na skici določi sile žic.



Rešitev: Sile žic označimo z F_1, F_2 in F_3. Sistem vzporednih sil ima skupno prijemališče, zato je sistem statično nedoločen. Ravnovesni enačbi, vsota sil v navpični smeri in ravnovesje momentov sta

$$0 = F_1 + F_2 + F_3 - F_0,$$
$$0 = -\frac{d}{4}F_0 + \frac{d}{2}F_2 + dF_3.$$

Sile žic so osne sile dane s Hookovim zakonom $F_i = AE\Delta l_1/l$, kjer je l nedeformirana dolžina žice, Δl_i pa njen raztezek, glej skico.



Ko obesimo nosilec, se žice raztegnejo in ker je nosilec tog, pritrdišča žic na nosilec ostanejo na isti premici. Smerni koeficient premice je določen s parom dveh točk. Ker je za oba para enak, sledi enačba

$$\frac{\Delta l_2 - \Delta l_1}{d} = \frac{\Delta l_3 - \Delta l_2}{d}.$$

oziroma

$$2\Delta l_2 = \Delta l_3 + \Delta l_2.$$

Vstavimo v ravnovesne enačbe še Hookov zakon. Tako dobimo sistem

$$F_0 = \frac{AE\Delta l_1}{l} + \frac{AE\Delta l_2}{l} + \frac{AE\Delta l_3}{l},$$
$$-\frac{d}{4}F_0 = \frac{AEd\Delta l_2}{2l} + \frac{AEd\Delta l_3}{l},$$
$$2\Delta l_2 = \Delta l_3 + \Delta l_2.$$

Rešitev sistema je

$$\Delta l_1 = \frac{7F_0 l}{12AE}, \quad \Delta l_2 = \frac{F_0 l}{3AE}, \quad \Delta l_3 = \frac{F_0 l}{12AE}.$$

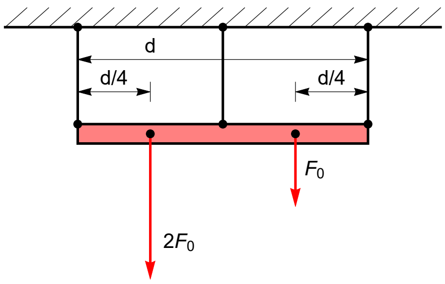
Iskane sile so

$$F_1 = \frac{7F_0}{12}, \quad F_2 = \frac{F_0}{3}, \quad F_3 = \frac{F_0}{12}.$$

7.1.2 Dodatne naloge

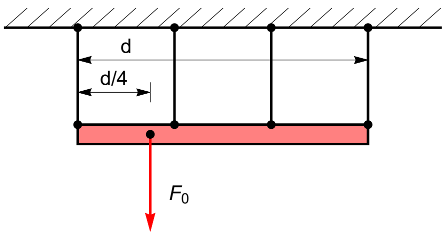
1. S stropa je na treh žici obešen togi nosilec dolžine d, glej sliko. Žice so enako dolge, imajo enak presek A, Youngovi moduli pa so $E_1 = E_0$, $E_2 = 2E_0$, $E_3 = E_0$. Za obremenitev na skici določi sile žic.

   Rešitev: $F_1 = F_0$, $F_2 = 3F_0/2$, $F_3 = F_0/2$.



2. S stropa je na štirih žicah obešen togi nosilec dolžine d, glej sliko. Žice so enako dolge, imajo enak presek A in Youngov modul E. Za obremenitev na skici določi sile žic.

   Rešitev: $F_1 = 19F_0/40$, $F_2 = 13F_0/40$, $F_3 = 7F_0/40$, $F_4 = F_0/40$.

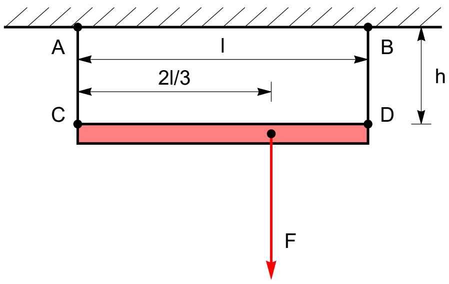


7.2 Statično določene naloge

1. S stropa je na dve žici obešen togi nosilec dolžine l, glej sliko. Žici s krožnim presekom sta enako dolgi, imata enak Youngov modul E, leva žica ima polmer preseka r_1, desna pa r_2. Za obremenitev na skici :

   (a) izračunaj sili žic;

   (b) določi polmer r_2 tako, da bo nosilec vodoraven.



Rešitev:

(a) Označimo z F_A silo leve žice, z F_B pa silo desne. Uporabimo momentno enačbo s polom v levem in desnem pritrdišču. Tako dobimo $F_\mathrm{A} = \frac{1}{3}F$ in $F_\mathrm{B} = \frac{2}{3}F$.

(b) Označimo z Δa deformacijo leve žice, z Δb pa desne. Po Hookovem zakonu je

$$\frac{\Delta a}{h} = \frac{1}{E}\frac{F_\mathrm{A}}{S_\mathrm{A}} = \frac{F}{3\pi E r_1^2}.$$

Podobna enačba velja za Δb. Ker nosilec po deformaciji ostane vodoraven, je $\Delta a = \Delta b$. Od tod potem sledi

$$\Delta a = \frac{Fh}{3\pi E r_1^2} = \frac{2Fh}{3\pi E r_2^2} = \Delta b$$

in od tod $r_2 = \sqrt{2}r_1$.

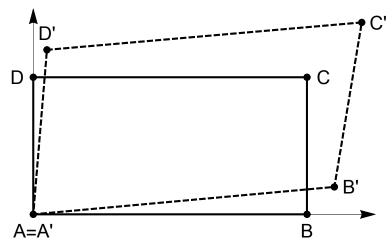
Poglavje 8

Deformacija

8.1 Ravninska deformacija

8.1.1 Rešene naloge

1. Pravokotnik $ABCD$ se homogeno deformira v četverokotnik $A'B'C'D'$ tako kot kaže skica. Dolžine stranic referenčnega pravokotnika sta $|AB| = 200\,\mathrm{mm}$ in $|AD| = 100\,\mathrm{mm}$, dolžine stranic deformiranega četverokotnika pa so $|AB'| = 200.5\,\mathrm{mm}$, $|AD'| = 100.3\,\mathrm{mm}$, kot $\angle B'AD'$ pa je $89.5°$.



   (a) Izračunaj infinitezimalni deformacijski tenzor.
   (b) Določi maksimalno osno deformacijo.
   (c) Določi osno deformacijo v smeri diagonale pravokotnika.

Rešitev:

(a) Komponente deformacijskega tenzorja dobimo po formulah

$$\epsilon_{11} = \frac{|A'B'|}{|AB|} - 1 = 2.5 \times 10^{-3},$$

$$\epsilon_{22} = \frac{|A'C'|}{|AD|} - 1 = 3 \times 10^{-3}$$

in

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{2}\gamma_{12} = \frac{1}{2}\frac{0.5°}{180°}\pi \doteq 4.4 \times 10^{-3}.$$

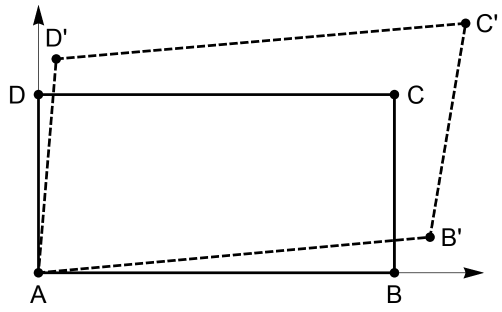
(b) Maksimalno osno deformacijo dobimo po formuli

$$\epsilon_{\max} = \frac{1}{2}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + \sqrt{\left(\frac{\epsilon_{11} - \epsilon_{22}}{2}\right)^2 + \epsilon_{12}^2} \doteq 7.2 \times 10^{-3}.$$

(c) Enotski vektor v smeri diagonale je $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\vec{\imath} + \vec{\jmath})$. Osna deformacija v smeri diagonale je tako

$$\vec{n}\cdot(\underline{\underline{\epsilon}}\vec{n}) = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot 10^{-3}\begin{bmatrix} 2.5 & 4.4 \\ 4.4 & 3 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{10^{-3}}{5}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 9.4 \\ 11.8 \end{bmatrix} \doteq 6.12\times 10^{-3}.$$

2. Pravokotnik $ABCD$ se deformira v četverokotnik $AB'C'D'$ tako kot kaže skica. Dolžine stranic referenčnega pravokotnika sta $|AB| = 20.0\,\mathrm{cm}$ in $|AD| = 10.0\,\mathrm{cm}$, dolžine stranic deformiranega četverokotnika pa so $|AB'| = 20.1\,\mathrm{cm}$, $|AD'| = 10.1\,\mathrm{cm}$, kot $\angle B'AD'$ pa je $87.5°$.



   (a) Izračunaj infinitezimalni deformacijski tenzor v A.

   (b) Določi maksimalno osno deformacijo v A. V kater smeri nastopi?

Rešitev:

(a) Osni deformaciji sta

$$\epsilon_{11} = \frac{|AB'| - |AB|}{|AB|} = \frac{20.1 - 20}{20} = 0.005$$

in

$$\epsilon_{22} = \frac{|AD'| - |AD|}{|AD|} = \frac{10.1 - 10}{10} = 0.01.$$

Sprememba kota je

$$\gamma_{12} = \frac{2.5°}{180°}\pi \doteq 0.0426.$$

Potem

$$\underline{\underline{\epsilon}} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 5 & 21.8 \\ 21.8 & 10 \end{bmatrix}.$$

(b) Maksimalno osno deformacijo dobimo po formuli

$$\epsilon^{\max} = \frac{1}{2}\left(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \sqrt{(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})^2 + \gamma_{12}^2}\right) \doteq \frac{1}{2}\left(15 + \sqrt{25 + (42.6)^2}\right) \doteq 29.4 \times 10^{-3}$$

(c) Ekstremalna smer je dana z

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\arctan\frac{\gamma_{12}}{\epsilon_{22} - \epsilon_{11}} \doteq 41.7°.$$

3. S tremi ekstenziometri, ki oklepajo medsebojni kot $45\,°$ smo izmerili osne deformacije: v vodoravni smeri $\epsilon_a = 10^{-3}$, v navpični smeri $\epsilon_b = -3 \times 10^{-3}$ in v diagonalni smeri $\epsilon_c = 10^{-3}$.

   (a) Določi pripadajoči deformacijski tenzor.

   (b) Določi maksimalno osno deformacijo.

Rešitev:

(a) Postavimo os x v vodoravni smer, os y pa v navpično. Deformacijskemu tenzorju pripada matrika

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} \end{bmatrix}.$$

Očitno je $\epsilon_{11} = \epsilon_a$ in $\epsilon_{22} = \epsilon_b$. Komponento ϵ_{12} določimo iz pogoja $\vec{n} \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \cdot \vec{n} = \epsilon_c$, kjer je $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath} + \vec{\jmath})$. Tako dobimo enačbo $\frac{1}{2}(\epsilon_{11} + 2\epsilon_{12} + \epsilon_{22}) = \epsilon_c$. Od tod $\epsilon_{12} = 2 \times 10^{-3}$ in

$$\underline{\underline{\epsilon}} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

(b) Uporabimo formulo

$$\epsilon_{\max} = \frac{1}{2}\left(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \sqrt{(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})^2 + 4\epsilon_{12}^2}\right).$$

Vstavimo izračunano in dobimo $\epsilon_{\max} = (-1 + 2\sqrt{2})10^{-3}$.

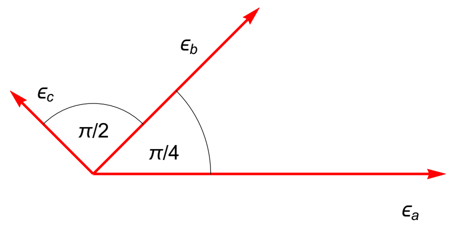
4. Z ekstenziometrom smo v označenih smereh na skici izmerili osne deformacije $\epsilon_{\mathrm{a}} = 0.003$, $\epsilon_{\mathrm{b}} = 0.002$ in $\epsilon_{\mathrm{c}} = 0.001$.

   (a) Določi infinitezimalni deformacijski tenzor.

   (b) Izračunaj ektremalni osni deformaciji in pripadajoči smeri.

   (c) V kateri smeri je osna deformacija največja?

   (d) Določi tudi ekstremalno strižno deformacijo.



Rešitev:

(a) Postavimo os x v smeri deformacije ϵ_a. Potem je

$$\underline{\underline{\epsilon}} = 10^{-3}\begin{bmatrix} \epsilon_a & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} \end{bmatrix}.$$

Uporabimo formulo za osno deformacijo

$$\epsilon(\varphi) = \frac{1}{2}(\epsilon_a + \epsilon_{22}) + \frac{1}{2}(\epsilon_a - \epsilon_{22})\cos 2\varphi + \epsilon_{12}\sin 2\varphi$$

enkrat za $\varphi = \pi/4$, drugič pa za $\varphi = 3\pi/4$. Tako dobimo enačbi

$$\epsilon_b = \frac{1}{2}(\epsilon_a + \epsilon_{22}) + \epsilon_{12}, \quad \epsilon_c = \frac{1}{2}(\epsilon_a + \epsilon_{22}) - \epsilon_{12}.$$

Enačbi seštejemo. Potem $\epsilon_b + \epsilon_c = \epsilon_a + \epsilon_{22}$ in $\epsilon_{22} = \epsilon_b + \epsilon_c - \epsilon_a = 0$. Če enačbi odštejemo, dobimo $\epsilon_b - \epsilon_c = 2\epsilon_{12}$ in tako $\epsilon_{12} = \frac{1}{2}10^{-3}$. Tako smo dobili

$$\underline{\underline{\epsilon}} = 10^{-3}\begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Ekstremalna osna deformacija je

$$\epsilon_{ext} = (3/2 \pm \sqrt{(3/2)^2 + (1/2)^2})10^{-3} = \frac{1}{2}\left(3 \pm \sqrt{10}\right)10^{-3}.$$

Pripadajoči ekstremalni smeri dobimo po formuli

$$\tan 2\varphi = \frac{2\epsilon_{12}}{\epsilon_{11} - \epsilon_{22}} = \frac{1}{3}.$$

Od tod

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{3}, \quad \varphi_2 = \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{3} + \frac{\pi}{2}.$$

(c) Iz skice Mohrove krožnce za deformacijo vidimo, da je maksimalna osna deformacija v smeri φ_1.

(d) Maksimalna strižna deformacija je

$$\gamma_{max} = \epsilon_{max} - \epsilon_{min} = \sqrt{10}\, 10^{-3}.$$

5. V danem koordinatnem sistemu ima deformacijski tenzor ravninskega deformacijskega stanja komponente $\epsilon_{11} = (2+\sqrt{3})\epsilon_0$, $\epsilon_{12} = \epsilon_0$ in $\epsilon_{22} = (2-\sqrt{3})\epsilon_0$. Poišči tak koordinatni sistem, da bo pripadajoča matrika komponent deformacijskega tenzorja diagonalna in izračunaj diagonalna elementa.

Rešitev: Pri rotaciji danega koordinatnega sistema za kot φ okrog osi $\vec{k}$ ima deformacijski tenzor komponente

$$\begin{aligned}
\epsilon'_{11} &= \frac{1}{2}(\epsilon_{11}+\epsilon_{22}) + \frac{1}{2}(\epsilon_{11}-\epsilon_{22})\cos 2\varphi + \epsilon_{12}\sin 2\varphi = \epsilon_0\left(\sin 2\phi + \sqrt{3}\cos 2\phi + 2\right)\\
\epsilon'_{22} &= \frac{1}{2}(\epsilon_{11}+\epsilon_{22}) - \frac{1}{2}(\epsilon_{11}-\epsilon_{22})\cos 2\varphi - \epsilon_{12}\sin 2\varphi = \epsilon_0\left(-\sin 2\phi - \sqrt{3}\cos 2\phi + 2\right)\\
\epsilon'_{12} &= -\frac{1}{2}(\epsilon_{11}-\epsilon_{22})\sin 2\varphi + \epsilon_{12}\cos 2\varphi = \epsilon_0\left(\cos 2\phi - \sqrt{3}\sin 2\phi\right).
\end{aligned}$$

Zahtevamo $\epsilon'_{12} = 0$. Od tod

$$\cos 2\phi - \sqrt{3}\sin 2\phi = 0.$$

Enačba ima dve rešitvi, $\varphi = -5\pi/12$ in $\varphi = \pi/12$. V prvem primeru je $\epsilon'_{11} = 0$ in $\epsilon'_{22} = 4\epsilon_0$, v drugem pa $\epsilon'_{11} = 4\epsilon_0$ in $\epsilon'_{22} = 0$.

6. Ravninska deformacija deformira pravokotni trikotnik z dolžinama katet a in b v trikotnik z oglišči v točkah $A = (x_0, y_0)$, $B = (x_0+a_{11}, y0+a_{12})$ in $C = (x_0+a_{21}, y0+a_{22})$. Spremembe dolžin so majhne.

(a) Določi deformacijski tenzor na geometrijski način.

(b) Zapiši deformacijo s pomikom.

(c) Izračunaj infinitezimalen deformacijski tenzor.

(d) Izračunaj deformacijski tenzor.

Rešitev:

(a) Postavimo os X v smeri katete z dolžino a in os Y v smer druge katete. Potem sta v koordinatnem sistemu XY diagonalna elementa deformacijskega tenzorja pri predpostavki majhne deformacije enaka relativni spremembi dolžin stranic. Tako velja

$$E_{11} = \frac{1}{a}\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2} - 1 = \sqrt{1 + \frac{a_{11}^2 + a_{12}^2 - a^2}{a^2}} - 1 \doteq \frac{1}{2}\frac{a_{11}^2 + a_{12}^2 - a^2}{a^2}$$

in

$$E_{22} = \frac{1}{b}\sqrt{a_{21}^2 + a_{22}^2} - 1 = \sqrt{1 + \frac{a_{21}^2 + a_{22}^2 - b^2}{b^2}} - 1 \doteq \frac{1}{2}\frac{a_{21}^2 + a_{22}^2 - b^2}{b^2}.$$

Pri izračunu smo upoštevali, da je deformacija majhna, zato se dolžina stranice AB le malo razlikuje od prvotne dolžine a. Z enačbo, velja

$$\left|\frac{a_{11}^2 + a_{12}^2 - a^2}{a^2}\right| << 1$$

in zato

$$\sqrt{1+\frac{a_{11}^2+a_{12}^2-a^2}{a^2}} \doteq 1+\frac{1}{2}\frac{a_{11}^2+a_{12}^2-a^2}{a^2}.$$

Nadalje je E_{12} enak poločni spremembi kota $\Delta\varphi = \pi/2-\varphi$ med katetama. Za kot φ med katetama deformiranega trikotnika velja

$$\cos\varphi = \frac{a_{11}a_{21}+a_{12}a_{21}}{\sqrt{a_{11}^2+a_{12}^2}\sqrt{a_{21}^2+a_{22}^2}}.$$

Potem

$$E_{12} = \frac{1}{2}\Delta\varphi \doteq \sin\frac{1}{2}\Delta\varphi = \frac{1}{2}\cos\varphi = \frac{1}{2}\frac{a_{11}a_{21}+a_{12}a_{21}}{\sqrt{a_{11}^2+a_{12}^2}\sqrt{a_{21}^2+a_{22}^2}}.$$

(b) Ker se trikotnik deformira v trikotnik, je deformacija afina. Splošna oblika afine preslikave med referenčnimi koordinatami X, Y in prostorskimi je

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1+\alpha_{11}X+\alpha_{21}Y, \\ y &= \alpha_2+\alpha_{12}X+\alpha_{22}Y. \end{aligned}$$

Ker se izhodišče $X=0$, $Y=0$ preslika v točko A, velja $\alpha_1 = x_0$ in $\alpha_2 = y_0$. Nadalje se par $X=a$, $Y=0$ preslika v točko B. Potem $x_0+a_{11} = x_0+\alpha_{11}a$ in $y_0+a_{12} = x_0+\alpha_{12}a$. Tako dobimo $\alpha_{11} = a_{11}/a$ in $\alpha_{12} = a_{12}/a$. Podobno $\alpha_{21} = a_{21}/b$ in $\alpha_{22} = a_{22}/b$. Iskana preslikava je tako

$$\begin{aligned} x &= x_0+\frac{a_{11}}{a}X+\frac{a_{21}}{b}Y, \\ y &= y_0+\frac{a_{12}}{a}X+\frac{a_{22}}{b}Y. \end{aligned}$$

Če deformacijo zapišemo s pomikom je

$$\begin{aligned} x = X+u_1(X,Y) &= x_0+\frac{a_{11}}{a}X+\frac{a_{21}}{b}Y, \\ y = Y+u_2(X,Y) &= y_0+\frac{a_{12}}{a}X+\frac{a_{22}}{b}Y. \end{aligned}$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned} u_1(X,Y) &= x_0+\frac{a_{11}}{a}X+\frac{a_{21}}{b}Y-X, \\ u_2(X,Y) &= y_0+\frac{a_{12}}{a}X+\frac{a_{22}}{b}Y-Y. \end{aligned}$$

(c) Gradient pomika je

$$\operatorname{Grad}\vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{a}-1 & \frac{a_{21}}{b} \\ \frac{a_{12}}{a} & \frac{a_{22}}{b}-1 \end{bmatrix}$$

Potem

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{Grad}\vec{u}+(\operatorname{Grad}\vec{u})^T\vec{u}\right) = \begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{a}-1 & \frac{1}{2}\left(\frac{a_{21}}{b}+\frac{a_{12}}{a}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{a_{21}}{b}+\frac{a_{12}}{a}\right) & \frac{a_{22}}{b}-1 \end{bmatrix}.$$

Če primerjamo $\underline{\underline{\epsilon}}$ z $\underline{\underline{E}}$, vidimo, da se v splošnem povsem razlikujeta.

(d) Izračunajmo sedaj še deformacijski tenzor $\underline{\underline{E}}$ po formuli

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{\epsilon}}+\frac{1}{2}(\operatorname{Grad}\vec{u})^T\operatorname{Grad}\vec{u} = \underline{\underline{\epsilon}}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \left(\frac{a_{11}}{a}-1\right)^2+\left(\frac{a_{12}}{a}\right)^2 & \left(\frac{a_{11}}{a}-1\right)\frac{a_{21}}{b}+\left(\frac{a_{22}}{b}-1\right)\frac{a_{12}}{a} \\ & \left(\frac{a_{22}}{b}-1\right)^2+\left(\frac{a_{21}}{b}\right)^2 \end{bmatrix}.$$

Po krajšem računu dobimo

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{a_{11}^2+a_{12}^2-a^2}{a^2} & \frac{a_{11}a_{21}+a_{12}a_{21}}{ab} \\ & \frac{a_{21}^2+a_{22}^2-b^2}{b^2} \end{bmatrix}.$$

Dobljeni rezultat se do prvega reda natankosti ujema z rezultatom, ki smo ga dobili po geometrijski poti.

7. Na primeru rotacije pokaži, da infinitezimalen deformacijski tenzor ni dobra mera deformacije pri velikih pomikih.

Rešitev: Postavimo koordinatno os Z v smeri osi rotacije. Potem rotaciji za kot θ pripada matrika

$$Q = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

deformacija, ki jo lahko obravnavamo kot ravninsko deformacijo, pa je dana z

$$\begin{aligned} x &= X\cos\theta - Y\sin\theta = X + X\cos\theta - Y\sin\theta - X, \\ y &= X\sin\theta + Y\cos\theta = Y + X\sin\theta + Y\cos\theta - Y. \end{aligned}$$

Od tod dobimo komponenti pomika

$$\begin{aligned} u_1 &= X\cos\theta - Y\sin\theta - X, \\ u_2 &= X\sin\theta + Y\cos\theta - Y. \end{aligned}$$

Gradient pomika je

$$\operatorname{Grad}\vec{u} = \begin{bmatrix} \cos\theta - 1 & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - 1 \end{bmatrix}.$$

Pripadajoči infinitezimalni deformacijski tenzor je tako

$$\underline{\epsilon} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{Grad}\vec{u} + (\operatorname{Grad}\vec{u})^T\right) = \begin{bmatrix} \cos\theta - 1 & 0 \\ 0 & \cos\theta - 1 \end{bmatrix}.$$

Rotacija ohranja razdalje, zato je prava mera rotacije enaka nič. Za $\theta = \pi/2$ pa dobimo $\underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ in potemtakem $\underline{\epsilon}$ ni prava mera za velike pomike. Prava mera je deformacijski tenzor

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\epsilon} + \frac{1}{2}(\operatorname{Grad}\vec{u})^T \operatorname{Grad}\vec{u}.$$

Po kratkem računu dobimo, da je $\underline{\underline{E}} = \underline{0}$.

8.1.2 Dodatne naloge

1. V danem koordinatnem sistemu ima deformacijski tenzor ravninskega deformacijskega stanja komponente $\epsilon_{11} = 3\epsilon_0$, $\epsilon_{12} = \epsilon_0\sqrt{3}$ in $\epsilon_{22} = \epsilon_0$. Poišči tak koordinatni sistem, da bo pripadajoča matrika komponent deformacijskega tenzorja diagonalna in izračunaj diagonalna elementa.

Rešitev: Kot $\varphi = \pi/6$ ali $\varphi = -2\pi/6$. Diagonalna elementa $4\epsilon_0$ in 0.

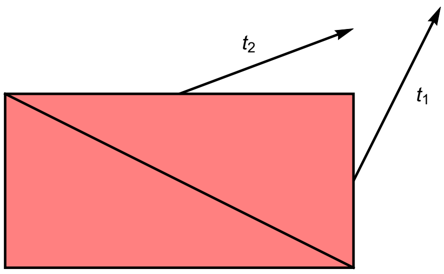
Poglavje 9

Napetost

9.1 Ravninska napetost

9.1.1 Rešene naloge

1. Pravokotnik s stranicami v razmerju 2 : 1, glej skico, ima na stranicah napetosti $\vec{t}_2 = \left(\frac{2}{3}\vec{\imath} + \frac{1}{4}\vec{\jmath}\right) 30\,\mathrm{MPa}$ in $\vec{t}_1$, ki ima velikost $10\sqrt{5}$MPa.



   (a) Dopolni sliko z vektorjema napetosti na preostalih dveh stranicah.

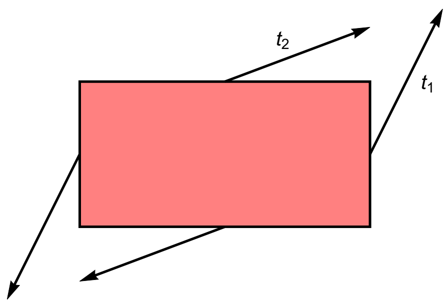
   (b) Določi $\vec{t}_1$ in pripadajoči napetostni tenzor.

   (c) Izračunaj polmer Mohrove krožnice.

   (d) Določi normalno in strižno napetost na označeno diagonalo pravokotnika.

   Rešitev:

   (a) Dopolnjena skica napetosti je



   (b) Ker je $\vec{t}_2 = \underline{\underline{t}}\,\vec{\jmath}$, je

$$\underline{\underline{t}} = \begin{bmatrix} t_{11} & 2/3 \\ 2/3 & 1/4 \end{bmatrix} 30\,\mathrm{MPa}.$$

   Potem je $\vec{t}_1 = \underline{\underline{t}}\,\vec{\imath} = \left(t_{11}\vec{\imath} + \frac{2}{3}\vec{\jmath}\right) 30\,\mathrm{MPa}$ in

$$|\vec{t}_1|^2 = \left(t_{11}^2 + \frac{4}{9}\right) 900\,\mathrm{MPa}^2 = 500\,\mathrm{MPa}^2$$

   in od tod $t_{11} = 10\,\mathrm{MPa}$.

   (c) Polmer Mohrove krožnice je

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}(t_{11} - t_{22})\right)^2 + t_{12}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{24}\right)^2 + \frac{4}{9}}\, 30\,\mathrm{MPa} = \frac{5}{4}\sqrt{257} = 20.04\,\mathrm{MPa}.$$

(d) Vektor v smeri diagonale je $2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$. Potem je normala na diagonalo $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-\vec{\imath} + 2\vec{\jmath})$. Vektor napetosti na ravnino v smeri diagonale je

$$\vec{t} = \underline{\underline{t}}\,\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} 30\,\mathrm{MPa} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 30 \\ -5 \end{bmatrix} \mathrm{MPa} = \sqrt{5} \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix} \mathrm{MPa}.$$

Normalna napetost je tako

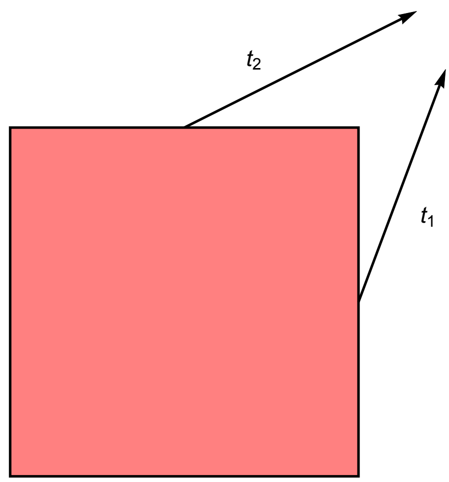
$$t_n = \vec{n} \cdot \vec{t} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 30 \\ -5 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} 30\,\mathrm{MPa} = -8\,\mathrm{MPa}.$$

Strižna napetost je $\tau = \sqrt{\left|\vec{t}\right|^2 - t_n^2}$. Izračunajmo posebej

$$\left|\vec{t}\right| = \sqrt{185}\mathrm{MPa}.$$

Potem $\tau = 11\,\mathrm{MPa}$.

2. Kvadrat na sliki ima na stranicah napetosti $\vec{t_2} = \left(\frac{2}{3}\vec{\imath} + \frac{1}{3}\vec{\jmath}\right)$ MPa in $\vec{t_1}$, ki ima velikost $\frac{\sqrt{73}}{12}$MPa.



   (a) Dopolni sliko z vektorjema napetosti na preostalih dveh stranicah.

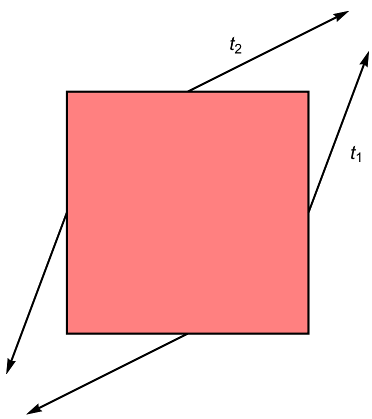
   (b) Določi $\vec{t_2}$ in pripadajoči napetostni tenzor.

   (c) Skiciraj Mohrovo krožnico.

   (d) Določi normalno in strižno napetost na diagonali kvadrata.

Rešitev:

(a) Dopolnjena slika je



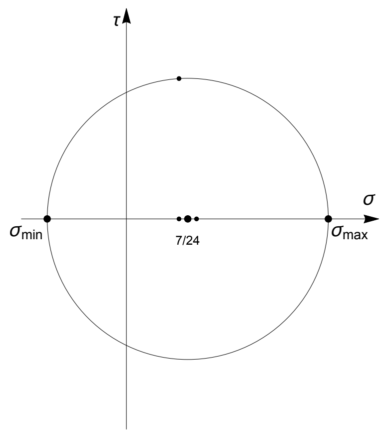
(b) Tenzor napetosti je oblike

$$\underline{\underline{t}} = \begin{bmatrix} t_{11} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Neznano komponento t_{11} dobimo iz pogoja, da je $|\underline{\underline{t}}\vec{\imath}| = \frac{\sqrt{73}}{12}$. Potem $t_{11}^2 + \frac{4}{9} = \frac{73}{144}$ in tako $t_{11} = \pm\frac{1}{4}$. Iz skice sledi, da je $t_{11} = \frac{1}{4}$. Potemtakem

$$\underline{\underline{t}} = \begin{bmatrix} 1/4 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

(c) Skica Mohrove krožnice je



(d) Na diagonali z normalo $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath}+\vec{\jmath})$ je vektor napetosti enak $\vec{t} = \underline{\underline{t}}\,\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{11}{12}\vec{\imath}+\vec{\jmath})$MPa. Normalna napetost je $t_n = \vec{t}\cdot\vec{n} = \frac{23}{24}$MPa. Strižna napetost pa $t_s = \sqrt{|\vec{t}|^2 - t_n^2} = \frac{1}{24}$MPa.

3. V danem koordinatnem sistemu ima napetostni tenzor ravninskega napetostnega stanja komponente $t_{11} = \sigma$, $t_{12} = \sqrt{3}\sigma$ in $t_{22} = 3\sigma$. Poišči tak koordinatni sistem, da bo pripadajoča matrika komponent napetostnega tenzorja diagonalna in izračunaj diagonalna elementa.

Rešitev: Pri rotaciji danega koordinatnega sistema za kot φ okrog osi $\vec{k}$ ima napetostni tenzor komponente

$$\begin{aligned}
t'_{11} &= \frac{1}{2}(t_{11}+t_{22}) + \frac{1}{2}(t_{11}-t_{22})\cos 2\varphi + t_{12}\sin 2\varphi = \sigma\left(\sqrt{3}\sin 2\phi - \cos 2\phi + 2\right)\\
t'_{22} &= \frac{1}{2}(t_{11}+t_{22}) - \frac{1}{2}(t_{11}-t_{22})\cos 2\varphi - t_{12}\sin 2\varphi = \sigma\left(-\sqrt{3}\sin 2\phi + \cos 2\phi + 2\right)\\
t'_{12} &= -\frac{1}{2}(t_{11}-t_{22})\sin 2\varphi + t_{12}\cos 2\varphi = \sigma\left(\sin 2\phi + \sqrt{3}\cos 2\phi\right).
\end{aligned}$$

Zahtevamo $t'_{12} = 0$. Od tod

$$\sin 2\phi + \sqrt{3}\cos 2\phi = 0.$$

Enačba ima dve rešitvi, $\varphi = -\pi/6$ in $\varphi = \pi/3$. V prvem primeru je $t'_{11} = 0$ in $t'_{22} = 4\sigma$, v drugem pa $t'_{11} = 4\sigma$ in $t'_{22} = 0$.

4. Pokaži, da je ravninsko napetostno stanje enoosno natanko takrat, ko je $\det\underline{\underline{t}} = 0$.

Rešitev: Napetostno stanje je enoosno, če obstaja tak koordinatni sistem, da so vse komponente, razen komponente t_{11} napetostnega tenzorja enake nič. Ker je napetostno stanje ravninsko, je $t_{13} = t_{23} = t_{33} = 0$. Nadalje, če usmerimo kordinatni sistem v smeri ekstremalnih normalnih napetosti, je $t_{12} = 0$, daigonalna elementa pa sta enaka ekstremalnima normalnima napetostima. Ekstremalni napetosti sta

$$\sigma_{\text{ext}} = \frac{1}{2}\left(t_{11} + t_{22} \pm \sqrt{(t_{11} - t_{22})^2 + 4t_{12}^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sl}\underline{\underline{t}} \pm \sqrt{\left(\operatorname{sl}\underline{\underline{t}}\right)^2 - 4\det\underline{\underline{t}}}\right).$$

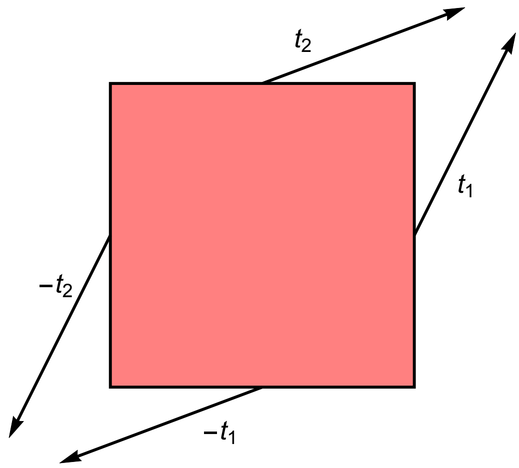
Privzemimo $\operatorname{sl}\underline{\underline{t}} \geq 0$. Potem je $\sigma_{min} = 0$ natanko tedaj, ko je $\det\underline{\underline{t}} = 0$ in $\sigma_{max} = \operatorname{sl}\underline{\underline{t}}$. V primeru $\operatorname{sl}\underline{\underline{t}} \leq 0$ pa $\sigma_{\min} = \operatorname{sl}\underline{\underline{t}}$ in $\sigma_{max} = 0$.

9.1.2 Dodatne naloge

1. Kvadrat na sliki ima na stranicah napetosti $\vec{t}_1 = \left(\frac{1}{3}\vec{\imath} + \frac{2}{3}\vec{\jmath}\right)$ MPa in $\vec{t}_2$, ki ima velikost $\frac{\sqrt{5}}{3}$MPa.

   (a) Določi $\vec{t}_2$ in pripadajoči napetostni tenzor.

   (b) Določi normalno in strižno napetost na obeh diagonalah kvadrata.



   Rešitev:

   (a) $\vec{t}_2 = \left(\frac{2}{3}\vec{\imath} + \frac{1}{3}\vec{\jmath}\right)$ MPa, $\underline{\underline{t}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ MPa.

   (b) Normalni napetosti sta 1 MPa in $-\frac{1}{3}$MPa, strižni pa sta obe enaki nič.

2. V danem koordinatnem sistemu ima napetostni tenzor ravninskega napetostnega stanja komponente $t_{11} = \sigma$, $t_{12} = \sigma$ in $t_{22} = \sigma$. Poišči tak koordinatni sistem, da bo pripadajoča matrika komponent napetostnega tenzorja diagonalna in izračunaj diagonalna elementa.

   Rešitev: Kot $\varphi = \pi/4$, diagonalna elementa pa sta 2σ in 0.

Poglavje 10

Hookov zakon

10.1 Zveza med napetostjo in deformacijo

10.1.1 Rešene naloge

1. Ravninska deformacija deformira pravokotnik dimenzije $2\,\mathrm{cm} \times 1\,\mathrm{cm}$ v romboid dimenzije $2.05\,\mathrm{cm} \times 0.98\,\mathrm{cm}$ z diagonalo, ki je za $\sqrt{5}/50\,\mathrm{cm}$ daljša od prvotne diagonale pravokotnika.

   (a) Določi deformacijski tenzor.

   (b) Izračunaj ekstremalni osni deformaciji in skiciraj Mohrovo krožnico. V kateri smeri je osna deformacija največja?

   (c) Za izotropični material z $\nu = 1/5$ in $E = 120\,\mathrm{GPa}$ z uporabo Hookovega zakona določi pripadajoči napetostni tenzor.

   Rešitev:

   (a) Postavimo koordinatni sistem v smeri stranic pravokotnika in izračunajmo osni deformaciji. $\epsilon_{11} = \frac{\Delta a}{a} = 0.025 = 1/40$ in $\epsilon_{22} = \frac{\Delta b}{b} = -0.02 = -1/50$. Za izračun ϵ_{12} bomo upoštevali deformacijo v smeri diagonale, ki je

   $$\epsilon_d = \frac{d + \Delta d - d}{d} = \frac{1}{50} = 0.02.$$

   Uporabimo sedaj formulo

   $$\epsilon_d = \frac{1}{2}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + \frac{1}{2}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22}) \cos 2\varphi + \epsilon_{12} \sin 2\varphi,$$

   kjer je φ kot med osjo x in diagonalo pravokotnika. Potem $\cos\varphi = 2/\sqrt{5}$ in $\sin\varphi = 1/\sqrt{5}$. Od tod $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = 3/5$ in $\sin 2\varphi = 2 \sin\varphi \cos\varphi = 4/5$. Tako dobimo enačbo

   $$\frac{1}{50} = \frac{1}{400} + \frac{27}{1000} + \epsilon_{12} \frac{4}{5}$$

   in od tod $\epsilon_{12} = 1/20 = 0.05$. Deformacijski tenzor je tako enak

   $$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} 1/40 & 1/200 \\ 1/200 & -1/50 \end{bmatrix}.$$

(b) Ekstremalni deformaciji sta po formuli

$$\epsilon_{\text{ext}} = \frac{1}{2}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})\right)^2 + \epsilon_{12}^2}$$

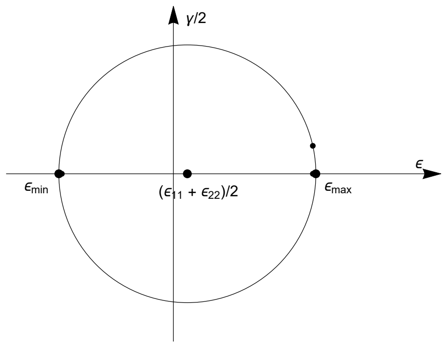
enaki

$$\epsilon_{\max} = \frac{1}{400}(1 + \sqrt{85}) \doteq 0.0255 \quad \epsilon_{\min} = \frac{1}{400}(1 - \sqrt{85}) \doteq -0.0206.$$

Smer maksimalne osne deformacije dobimo po formuli

$$\tan 2\varphi = \frac{2\epsilon_{12}}{\epsilon_{11} - \epsilon_{22}} = \frac{2}{9}.$$

Potem $\varphi = 6.26°$. Iz skice Mohrove krožnice vidimo, da je to smer ekstremalne osne deformacije.



Slika 10.1: Slika Mohrove krožnice.

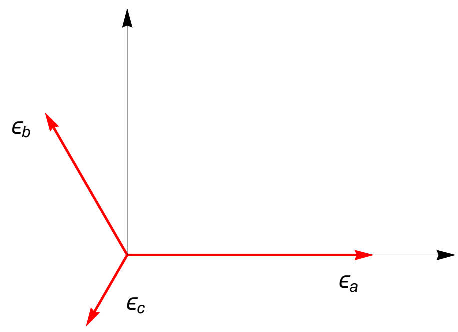
(c) Napetostni tenzor je

$$\underline{\underline{t}} = 2\mu\underline{\underline{\epsilon}} + \lambda\,\mathrm{sl}\left(\underline{\underline{\epsilon}}\right)\,\underline{\underline{I}},$$

kjer sta μ in λ Lamejeva koeficienta dana z $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ in $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$. Njuni vrednosti sta $\mu = 50\,\text{GPa}$ in $\lambda = 100/3\,\text{GPa}$. Potem

$$\underline{\underline{t}} = \begin{bmatrix} 8/3 & 1/2 \\ 1/2 & -11/6 \end{bmatrix} \text{GPa}.$$

2. Z ekstenziometrom smo v smereh, ki med seboj oklepajo kot $2\pi/3$, glej skico, izmerili osne deformacije $\epsilon_\mathrm{a} = 0.003$, $\epsilon_\mathrm{b} = 0.002$ in $\epsilon_\mathrm{c} = 0.001$.



   (a) Določi infinitezimalni deformacijski tenzor.

   (b) Naj bo deformiran material izotropičen z Youngovim modulom $E = 210\,\mathrm{GPa}$ in Poissonovim količnikom $\nu = 0.2$. Za po prvi točki izračunano ravninsko deformacijo določi pripadajoči napetostni tenzor. Tu upoštevaj, da je

$$\underline{\underline{t}} = \frac{E}{1+\nu}\underline{\underline{\epsilon}} + \frac{\nu E\,\mathrm{sl}\left(\underline{\underline{\epsilon}}\right)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\underline{\underline{I}}.$$

Rešitev:

(a) Ker je osna napetost v smeri osi x enaka ϵ_a, je $\epsilon_{11} = 2\times 10^{-3}$. Enotski vektor v smer osne deformacije ϵ_b je $\vec{e}_\mathrm{b} = \cos 2\pi/3\vec{\imath} + \sin 2\pi/3\vec{\jmath} = -\frac{1}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}$, v smeri ϵ_c pa $\vec{e}_\mathrm{c} = -\frac{1}{2}\vec{\imath} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}$. Zapišimo tenzor deformacije

$$\underline{\underline{\epsilon}} = 10^{-3}\begin{bmatrix} 3 & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix}.$$

Neznanki β in γ določimo iz pogojev

$$\vec{e}_\mathrm{b}\cdot\left(\underline{\underline{\epsilon}}\vec{e}_\mathrm{b}\right) = \epsilon_\mathrm{b} \qquad \vec{e}_\mathrm{c}\cdot\left(\underline{\underline{\epsilon}}\vec{e}_\mathrm{c}\right) = \epsilon_\mathrm{c}.$$

Tako dobimo enačbi

$$2\sqrt{3}\beta - 3\gamma = -5 \qquad 2\sqrt{3}\beta + 3\gamma = 1.$$

Rešitvi sta $\beta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ in $\gamma = 1$. Potemtakem je

$$\underline{\underline{\epsilon}} = 10^{-3}\begin{bmatrix} 3 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Uporabimo dano formulo. Izrčunajmo posebej

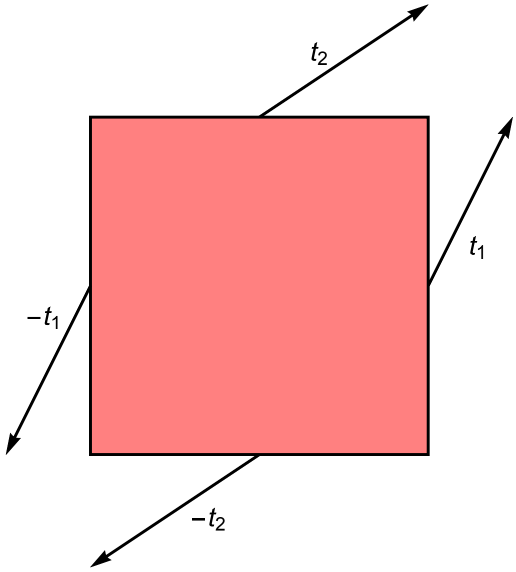
$$\frac{E}{1+\nu} = 175\,\mathrm{GPa},$$

$$\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{175}{3}\mathrm{GPa},$$

in $\mathrm{sl}\left(\underline{\underline{\epsilon}}\right) = 4\times 10^{-3}$. Tako dobimo

$$\underline{\underline{t}} = 175\,\mathrm{MPa}\left(\begin{bmatrix} 3 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{4}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 175\,\mathrm{MPa}\begin{bmatrix} \frac{13}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{7}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

3. Kvadrat na sliki ima na stranicah napetosti $\vec{t_1}$, ki ima velikost $\frac{\sqrt{5}}{4}$MPa in $\vec{t_2} = \left(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j}\right)$ MPa.



   (a) Določi $\vec{t_1}$ in pripadajoči napetostni tenzor.

   (b) Privzemi, da se kvadrat elastično deformira. Izračunaj pripadajoči deformacijski tenzor, če je iz izotropičnega materiala in je $E = 120\,\text{GPa}$ in $\nu = 1/3$.

   (c) Določi pripadajoče ekstremalne osne deformacije.

Rešitev:

(a) Vektor $\vec{t_2}$ je drugi stolpec matrike napetostnega tenzorja. Ker je simetričen, je oblike

$$\underline{\underline{t}} = \begin{bmatrix} x & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix} \text{MPa}.$$

Določiti moramo še x. Vektor napetosti $\vec{t_1}$ je prvi stolpec napetostnega tenzorja. Torej $\vec{t_1} = \left(x\vec{i} + \frac{1}{4}\vec{j}\right)$ MPa. Ker je $|\vec{t_1}| = \frac{\sqrt{5}}{4}$MPa, je $x^2 + \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$ in tako $x = \frac{1}{4}$. Torej

$$\underline{\underline{t}} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix} \text{MPa}.$$

(b) Deformacija je dana s Hookovim zakonom

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{t}} - \frac{\nu}{E}\text{Sl}(\underline{\underline{t}})\underline{\underline{I}} = \left(\frac{1}{90}\begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix} - \frac{1}{360}\frac{7}{12}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\frac{\text{MPa}}{\text{GPa}}$$

Od tod po krajšem računu

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} 1.16 & 5.56 \\ 5.56 & 2.08 \end{bmatrix} 10^{-6}$$

(c) Ekstremalne osne deformacije dobimo po formuli

$$\epsilon^{\max,\min} = \frac{1}{2}\left(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} \pm \sqrt{(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})^2 + \gamma_{12}^2}\right) = \frac{1}{2}\left(3.24 \pm \sqrt{0.92^2 + 11.12^2}\right) 10^{-6}$$

Tako dobimo $\epsilon^{\max} = 7.2010^{-6}$ in $\epsilon^{\min} = -3.95010^{-6}$.

4. Pokaži, da se za izotropičen material smeri ekstremalne osne deformacije ujemajo s smermi ekstremalnih normalnih napetosti. Privzemi, da je deformacija ali napetost ravninska.

Rešitev: Privzemimo ravninsko deformacijo. Smer ekstremalne osne deformacije je dana s formulo

$$\varphi^1 = \frac{1}{2}\arctan\frac{2\epsilon_{12}}{\epsilon_{11} - \epsilon_{22}}, \qquad \varphi^2 = \varphi^1 + \pi/2.$$

Po Hookovem zakonu

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{E}t_{11} - \frac{\nu}{E}t_{22}, \quad \epsilon_{22} = -\frac{\nu}{E}t_{11} + \frac{1}{E}t_{22}, \quad \epsilon_{12} = \frac{1}{2G}t_{12}.$$

Potem

$$\epsilon_{11} - \epsilon_{22} = \frac{1+\nu}{E}\left(t_{11} - t_{22}\right).$$

Upoštevajmo še, da je $G = E/(2(1+\nu))$. Potem

$$\frac{1}{2}\arctan\frac{2\epsilon_{12}}{\epsilon_{11} - \epsilon_{22}} = \frac{1}{2}\arctan\frac{2t_{12}}{t_{11} - t_{22}}$$

in ekstremalne smeri se res ujemajo.

5. V treh smereh, ki oklepajo medsebojni kot $\pi/4$ izmerimo osne deformacije $\epsilon_{\mathrm{a}} = 10^{-3}$, $\epsilon_{\mathrm{b}} = -3/2 \times 10^{-3}$ in $\epsilon_{\mathrm{c}} = 2 \times 10^{-3}$ in pripadajoči normalni napetosti $\sigma_{\mathrm{a}} = 240\mathrm{MPa}$ in $\sigma_{\mathrm{b}} = 0\mathrm{MPa}$. Material je izotropičen, deformacija pa je ravninska. Določi E, ν in μ.

Rešitev: V prvem koraku iz podatkov določimo deformacijski tenzor. Postavimo koordinatni sistem tako, da se smeri podane osne deformacije ujemata s koordinatnima osema, tretja pa je v smeri diagonale. Potem je

$$\underline{\underline{\epsilon}} = 10^{-3}\begin{bmatrix} 1 & x \\ x & 2 \end{bmatrix}\mathrm{MPa},$$

kjer je x še neznano število. V smeri diagonale je

$$-3/2 \times 10^{-3} = \epsilon_{\mathrm{b}} = \frac{1}{2}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + \frac{1}{2}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})\cos\pi/2 + \epsilon_{12}\sin\pi/2 = 10^{-3}\left(3/2 + x\right).$$

Tako dobimo $\epsilon_{12} = -3 \times 10^{-3}$.

Napetostni tenzor je dan s Hookovim zakonom

$$\underline{\underline{t}} = 2\mu\underline{\underline{\epsilon}} + \lambda\,\mathrm{sl}(\underline{\underline{\epsilon}})\underline{\underline{I}} = 10^{-3}\begin{bmatrix} 2\mu + 3\lambda & -6\mu \\ -6\mu & 4\mu + 3\lambda \end{bmatrix}\mathrm{MPa}.$$

Podani normalni napetosti sta v smereh $\vec{\imath}$ in $\vec{\imath} + \vec{\jmath}$. Potem je

$$\begin{aligned} 240\mathrm{MPa} &= \sigma_{\mathrm{a}} = 10^{-3}\left(2\mu + 3\lambda\right) \\ 0\mathrm{MPa} &= \sigma_{\mathrm{b}} = 3 \times 10^{-3}\left(\lambda - \mu\right). \end{aligned}$$

Od tod sledi $\lambda = \mu = 48\,\mathrm{GPa}$. Iz formul

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \qquad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

tako dobimo

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \qquad \nu = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

in od tod $E = 120\,\mathrm{GPa}$ in $\nu = 1/4$.

Poglavje 11

Termoelastičnost

11.1 Osna termoelastičnost

11.1.1 Rešene naloge

1. Dana je kompozitna palica s konstantnim presekom $A = 1\,\mathrm{cm}^2$. Dolžina levega dela palice je 1.0 m, desnega 0.5 m. Levi del palice ima Youngov modul $E_1 = 70\,\mathrm{GPa}$, desni $E_2 = 120\,\mathrm{GPa}$, koeficient termalnega raztezka levega je $\alpha_1 = 23 \times 10^{-6}\,\mathrm{m/°C}$, desnega pa $\alpha_2 = 17 \times 10^{-6}\,\mathrm{m/°C}$.

   (a) Palico segrejemo za 10 °C. Izračunaj njen raztezek.

   (b) Nato palico tlačno obremenimo v osni smeri. Kakšna naj bo sila, da se bo palica skrčila na prvotno dolžino?

   Rešitev:

   (a) Raztezek palice je dan s formulo $\Delta l = \alpha l \Delta T$. Potem

   $$\Delta l_1 = \alpha_1 l_1 \Delta T = 0.23\,\mathrm{mm} \qquad \text{in} \qquad \Delta l_2 = \alpha_2 l_2 \Delta T = 0.085\,\mathrm{mm}.$$

   Palica se podaljša za $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = 0.315\,\mathrm{mm}$.

   (b) Pri dani deformaciji je osna napetost dana s formulo $\sigma = E\frac{\Delta l}{l}$. Potem $\Delta l_1 = \sigma\frac{l_1}{E_1}$ in $\Delta l_2 = \sigma\frac{l_2}{E_2}$. Od tod

   $$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \sigma\left(\frac{l_1}{E_1} + \frac{l_2}{E_2}\right) \Longrightarrow \sigma = \frac{\Delta l}{l_1/E_1 + l_2/E_2}.$$

   Vstavimo vrednosti in dobimo

   $$\sigma = -\frac{315 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}}{1.845 \times 10^{-11}\,\mathrm{mPa}^{-1}} = -17.1\,\mathrm{MPa}.$$

   Sila je enaka

   $$F = A\sigma = -10^{-4}\,\mathrm{m}^2 \times 17.1 \times 10^6\,\mathrm{Pa} = -1.7\,\mathrm{kN}.$$

11.2 Prostorska termoelastičnost

11.2.1 Rešene naloge

1. V togi matriki krogelni elastičen vključek segrejemo za ΔT. Določi napetost.

   Rešitev: Celotna deformacija $\underline{\underline{\epsilon}}$ je vsota elastične $\underline{\underline{\epsilon}}^{\mathrm{e}}$ in termalne $\underline{\underline{\epsilon}}^{\mathrm{t}}$ deformacije. Ker je vključek v togi matriki, je celotna deformacija enaka nič. Velja torej

   $$\underline{\underline{\epsilon}}^{\mathrm{e}} = -\underline{\underline{\epsilon}}^{\mathrm{t}} = -\alpha\Delta T\underline{\underline{I}}.$$

   Po Hookovem zakonu za izotropičen material je potemtakem napetostno stanje hidrostatično, $\underline{\underline{t}} = -p\underline{\underline{I}}$. Potem

   $$\underline{\underline{\epsilon}}^{\mathrm{e}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{t}} - \frac{\nu}{E}\,\mathrm{sl}(\underline{\underline{t}})\underline{\underline{I}} = -\frac{1-2\nu}{E}p\underline{\underline{I}}.$$

   Iz dobljenih enačb potem sledi

   $$\alpha\Delta T = \frac{1-2\nu}{E}p$$

   in

   $$p = \frac{E}{1-2\nu}\alpha\Delta T = 3\kappa\alpha\Delta T,$$

   kjer je κ kompresibilni modul.

2. V togo kotanjo v obliki kvadra s kvadratno osnovno ploskvijo dimenzije $a \times a$ in dano višino h vložimo elastični kvader enakih dimenzij. Kvader segrejemo za ΔT.

   (a) Določi napetostno stanje.

   (b) Za koliko zgornja ploskev pogleda iz kotanje?

   (c) Kocko želimo potisniti nazaj v kotanjo. Določi silo.

   Rešitev:

   (a) Postavimo koordinatni sistem z osmi v smereh kvadra, os z pa naj bo v smeri stranice z dolžino h. Celotna deformacija je vsota elastične in termalne,

   $$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}}^{\mathrm{e}} + \alpha\Delta T.$$

   Ker je kotanja toga, je $0 = \epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{23} = \epsilon_{13} = \epsilon_{12}$ in ker je zgoraj odprta $0 = t_{33}$. Potem z uporabo Hookovega zakona sledi

   $$\begin{aligned} 0 = \epsilon_{11} &= \alpha\Delta T + \frac{1}{E}t_{11} - \frac{\nu}{E}t_{22}, \\ 0 = \epsilon_{22} &= \alpha\Delta T - \frac{\nu}{E}t_{11} + \frac{1}{E}t_{22}, \\ \epsilon_{33} &= \alpha\Delta T - \frac{\nu}{E}t_{11} - \frac{\nu}{E}t_{22}, \\ 0 = \epsilon_{23} &= \frac{1}{2G}t_{23}, \quad 0 = \epsilon_{13} = \frac{1}{2G}t_{13}, \quad 0 = \epsilon_{12} = \frac{1}{2G}t_{12}. \end{aligned}$$

   Sistem zgornjih treh enačb rešimo na t_{11}, t_{22} in ϵ_{33}. Rešitev je

   $$t_{11} = t_{22} = -\frac{\alpha\Delta TE}{1-\nu}$$

   in

   $$\epsilon_{33} = \frac{\alpha\Delta T(\nu+1)}{1-\nu}.$$

(b) Zgornja ploskev pogleda iz kotanje za

$$\Delta h = \epsilon_{33} h = \frac{\alpha h \Delta T(\nu + 1)}{1 - \nu}.$$

(c) Sedaj želimo kocko potisniti nazaj v kotanjo. Vemo, da se je v smeri osi z deformirala za $\epsilon = \Delta h/h$. Potisna sila $F = \sigma a^2 = Ea^2 \Delta h/h$ kocko, ki je ob strani prosta, skrči za predpisan Δh. Vendar je kocka v kotanji, njene stranske ploskve niso proste, zato tako dobljena sila

$$F' = \frac{\alpha E a^2 \Delta T(\nu + 1)}{1 - \nu}$$

ni prava. Pravo silo dobimo z naslednjim razmislekom. Privzemimo, da kotanjo pred termalnim razteskom pokrijemo s pokrovom in na pokrov delujemo s silo, ki prepreči, da kocka po segretju pogleda iz kotanje. Ta sila je dejansko tista sila s katero kocko stisnemo nazaj v kotanjo. Naj bo torej kotanja zaprta. Potem je

$$\underline{\underline{0}} = \underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}}^{\mathrm{e}} + \alpha \Delta T.$$

oziroma

$$\begin{aligned}
0 = \epsilon_{11} &= \alpha \Delta T + \frac{1}{E} t_{11} - \frac{\nu}{E} t_{22} - \frac{\nu}{E} t_{33}, \\
0 = \epsilon_{22} &= \alpha \Delta T - \frac{\nu}{E} t_{11} + \frac{1}{E} t_{22} - \frac{\nu}{E} t_{33}, \\
0 = \epsilon_{33} &= \alpha \Delta T - \frac{\nu}{E} t_{11} - \frac{\nu}{E} t_{22} - \frac{1}{E} t_{33}, \\
0 = \epsilon_{23} &= \frac{1}{2G} t_{23}, \quad 0 = \epsilon_{13} = \frac{1}{2G} t_{13}, \quad 0 = \epsilon_{12} = \frac{1}{2G} t_{12}.
\end{aligned}$$

Sistem rešimo in dobimo

$$t_{11} = t_{22} = t_{33} = -\frac{\alpha \Delta T E}{1 - 2\nu}.$$

Sila s katero kocko nazaj potisnemo v kotanjo je tako enaka

$$F = \frac{\alpha E a^2 \Delta T}{1 - 2\nu}.$$

Vidimo, da je ta sila večja kot F', saj je

$$F - F' = \alpha E a^2 \Delta T \frac{2\nu^2}{(1 - \nu)(1 - 2\nu)}.$$

3. V togo kotanjo v obliki kvadra s kvadratno osnovno ploskvijo dimenzije $a \times a$ in dano višino h vložimo elastični kvader enakih dimenzij.

(a) Kvader potisnemo s silo F. Določi napetostno stanje in izračunaj za koliko se zgornja ploskev pogrezne v kotanjo.

(b) Za koliko moramo kvader nato segreti, da pogleda iz kotanje.

Rešitev:

(a) Postavimo koordinatni sistem z osmi v smereh kvadra, os z pa naj bo v smeri stranice z dolžino h. Ker je kotanja toga, je edina neničelna komponenta deformacijskega tenzorja

ϵ_{33}. Po drugi strani pa je v smeri osi z je podana napetost $t_{33} = -F/a^2$. Po Hookovem zakonu tako velja

$$\begin{aligned}
0 = \epsilon_{11} &= \frac{1}{E}t_{11} - \frac{\nu}{E}t_{22} - \frac{\nu}{E}t_{33}, \\
0 = \epsilon_{22} &= -\frac{\nu}{E}t_{11} + \frac{1}{E}t_{22} - \frac{\nu}{E}t_{33}, \\
\epsilon_{33} &= -\frac{\nu}{E}t_{11} - \frac{\nu}{E}t_{22} + \frac{1}{E}t_{33}, \\
0 = \epsilon_{23} &= \frac{1}{2G}t_{23}, \quad 0 = \epsilon_{13} = \frac{1}{2G}t_{13}, \quad 0 = \epsilon_{12} = \frac{1}{2G}t_{12}.
\end{aligned}$$

Strižne komponente napetostnega tenzorja so enake nič. Sistem rešimo še za t_{11} in t_{22}. Dobimo

$$t_{11} = t_{22} = \frac{\nu}{1-\nu}t_{33} = -\frac{\nu F}{(1-\nu)a^2}.$$

Potem je

$$\epsilon_{33} = -\frac{(1-\nu-2\nu^2)F}{(1-\nu)Ea^2}.$$

Zgornja ploskev se pogrezne za

$$\Delta h = \frac{(1-\nu-2\nu^2)Fh}{(1-\nu)Ea^2}.$$

(b) V drugem koraku pogreznjeni kvader segrejemo. Nova celotna deformacija je $\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}}^{\mathrm{e}} + \underline{\underline{\epsilon}}^{\mathrm{t}} = \underline{\underline{\epsilon}}^{\mathrm{e}} - \alpha\Delta T\underline{\underline{I}}$. Po Hookovem zakonu potem

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \alpha\Delta T\underline{\underline{I}} + \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{t}} - \frac{\nu}{E}\,\mathrm{sl}(\underline{\underline{t}})\underline{\underline{I}}.$$

Tu je $\underline{\underline{t}}$ napetost v kvadru na drugem koraku. Komponenta deformacije je ϵ_{33} je enaka $\Delta h/h$, vse ostale pa so enake nič. Komponenta napetosti t_{33} pa je enaka nič, saj je v tem drugem delu naloge zgornji rob prost. Tako dobimo sistem

$$\begin{aligned}
0 = \epsilon_{11} &= \alpha\Delta T + \frac{1}{E}t_{11} - \frac{\nu}{E}t_{22}, \\
0 = \epsilon_{22} &= \alpha\Delta T - \frac{\nu}{E}t_{11} + \frac{1}{E}t_{22}, \\
\frac{\Delta h}{h} = \epsilon_{33} &= \alpha\Delta T - \frac{\nu}{E}t_{11} - \frac{\nu}{E}t_{22}, \\
0 = \epsilon_{23} &= \frac{1}{2G}t_{23}, \quad 0 = \epsilon_{13} = \frac{1}{2G}t_{13}, \quad 0 = \epsilon_{12} = \frac{1}{2G}t_{12}.
\end{aligned}$$

za neznane komponente napetostnega tenzorja in ΔT. Rešitev sistema je

$$\begin{aligned}
t_{11} = t_{22} &= -\frac{\Delta h E}{h(1+\nu)}, \\
t_{23} = t_{13} &= t_{12} = 0, \\
\Delta T &= \frac{\Delta h(1-\nu)}{\alpha h(\nu+1)}.
\end{aligned}$$

4. V togi matriki je elastični vključek v obliki kocke. Polovico kocke segrejemo za ΔT_1, drugo pa za ΔT_2.

   (a) Določi napetostno stanje.

(b) Izračunaj relativno spremembo volumna ene in druge polovice kocke.

Rešitev:

(a) Postavimo koordinatni sistem v smereh stranic kocke z izhodiščem v njenem središču. Privzemimo, da smo polovico kocke na negativni strani osi x segreli za ΔT_1, na pozitivni pa za ΔT_2. Deformacijo in napetost na negativni strani osi x oznaqčimo z $\underline{\underline{\epsilon}}_1$ in $\underline{\underline{t}}_1$ na desni pa z $\underline{\underline{\epsilon}}_2$ in $\underline{\underline{t}}_2$. Za obe polovici, $p = 1, 2$ velja

$$\begin{aligned}
\epsilon_{p,11} &= \frac{1}{E} t_{p,11} - \frac{\nu}{E} t_{p,22} - \frac{\nu}{E} t_{p,33} + \alpha_p \Delta T_p, \\
0 = \epsilon_{p,22} &= -\frac{\nu}{E} t_{p,11} + \frac{1}{E} t_{p,22} - \frac{\nu}{E} t_{p,33} + \alpha_p \Delta T_p, \\
0 = \epsilon_{p,33} &= -\frac{\nu}{E} t_{p,11} - \frac{\nu}{E} t_{p,22} + \frac{1}{E} t_{p,33} + \alpha_p \Delta T_p, \\
0 = \epsilon_{p,23} &= \frac{1}{2G} t_{p,23}, \quad 0 = \epsilon_{p,13} = \frac{1}{2G} t_{p,13}, \quad 0 = \epsilon_{p,12} = \frac{1}{2G} t_{p,12}.
\end{aligned}$$

Tu smo upoštevali, da se koti ohranijo, in da se mejna ploskev med polovicama zaradi različne temperature pomakne, zato $\epsilon_{p,11} \neq 0$. Iz enačb vidimo, da so vsi izvendiagonalni elementi enaki nič. Upoštevajmo, da se celotni volumen kocke ne spremeni. Potem

$$0 = \mathrm{sl}\left(\underline{\underline{\epsilon}}_1\right) + \mathrm{sl}\left(\underline{\underline{\epsilon}}_2\right) = \epsilon_{1,11} + \epsilon_{2,11}.$$

Nadalje je mejna ploskev v ravnovesju. Velja

$$\underline{\underline{t}}_1 \cdot \vec{\imath} = \underline{\underline{t}}_2 \cdot \vec{\imath}$$

oziroma $t_{1,11} = t_{2,11}$.
Dobili smo sistem enačb za neznanke $\epsilon_{p,11}$, $t_{p,11}$, $t_{p,22}$,$t_{p,33}$ za $p = 1, 2$. Iz simetrije naloge sledi $t_{p,22} = t_{p,33}$. Upoštevjmo še zadnji dve enačbi. Prvotni sistem je tako sistem za neznanke $\epsilon_{1,11}$, $t_{1,11}$, $t_{1,22}$,$t_{1,33}$. Rešitev sistema je

$$\begin{aligned}
t_{1,11} = t_{2,11} &= -\frac{\alpha\left(\Delta T_1 + \Delta T_2\right) E}{2(1-2\nu)}, \\
t_{1,22} = t_{1,33} &= \frac{\alpha E\left(\Delta T_1(3\nu - 2) - \Delta T_2 \nu\right)}{2(1-2\nu)(1-\nu)}, \\
t_{2,22} = t_{2,33} &= \frac{\alpha E\left(\Delta T_2(3\nu - 2) - \Delta T_1 \nu\right)}{2(1-2\nu)(1-\nu)}, \\
\epsilon_{1,11} = -\epsilon_{2,11} &= -\frac{\alpha\left(\Delta T_1 - \Delta T_2\right)(\nu+1)}{2(\nu-1)}.
\end{aligned}$$

V primeru $\Delta T_1 = \Delta T_2$ dobimo dobro znano rešitev.

(b) Relativni spremembi volumna sta $\epsilon_{1,11}$ in $\epsilon_{2,11}$ in sta podani z zgornjo rešitev. Vidimo, da se volumen ene polovice zmanjša, druge pa poveča.

11.2.2 Dodatne naloge

1. V togi matriki je elastični vključek v obliki kvadra. Kvader segrejemo za ΔT. Določi napetostno stanje.

Rešitev: $t_{11} = t_{22} = t_{33} = -\frac{\alpha E \Delta T}{1-2\nu}$, $t_{12} = t_{13} = t_{23} = 0$.

2. V togi matriki je kompozitni elastični vključek v obliki kocke. Ena polovica ima koeficient termalnega raztezska α_1, druga pa α_2. Kocko segrejemo za ΔT. Določi napetostno stanje.

Rešitev:

$$
\begin{aligned}
t_{1,11} = t_{2,11} &= -\frac{(\alpha_1 + \alpha_2)\, E \Delta T}{2(1-2\nu)}, \\
t_{1,22} = t_{1,33} &= \frac{\Delta T\, (\alpha_1(3\nu - 2) - \alpha_2 \nu)\, E}{2(1-2\nu)(1-\nu)}, \\
t_{2,22} = t_{2,33} &= -\frac{\Delta T\, (\alpha_1 \nu + \alpha_2(2 - 3\nu))\, E}{2(1-2\nu)(1-\nu)}, \\
\epsilon_{1,11} = -\epsilon_{2,11} &= -\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)\, \Delta T(\nu + 1)}{2(\nu - 1)}.
\end{aligned}
$$

Poglavje 12

Upogib Nosilca

12.1 Upogib nosilca

12.1.1 Rešene naloge

1. Konzolno vpeti nosilec dolžine 50 cm je linijsko obremenjen s konstantno gostoto $q_0 = 50\,\mathrm{kN/m}$. Nosilec je tankostenski s krožnim presekom polmera $R = 2\,\mathrm{cm}$ in debelino stene $t = 2\,\mathrm{mm}$, Youngov modul pa je $E = 120\,\mathrm{GPa}$.

   (a) Izračunaj ploskovni moment preseka.

   (b) Določi upogib nosilca.

   (c) Kolikšen je največji upogib?

   Rešitev:

   (a) Ploskovni moment je $I = \frac{\pi}{4}\left(R^4 - (R-t)^4\right) \doteq \pi t R^3 = 16\pi 10^{-8}\mathrm{m}^4 = 50.2710^{-8}\mathrm{m}^4$.

   (b) Enačba upogiba je $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = q_0$. Po štirih integracijah dobimo

   $$w = \frac{q_0}{24EI}x^4 + \frac{1}{6}C_1x^3 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4.$$

   Robni pogoji so $w(0) = 0$, $w'(0) = 0$ na levem krajišču in $w''(l) = 0$, $w'''(l) = 0$ na desnem krajišču. Rešitev je

   $$w = \frac{q_0 l^2 x^2}{24EI}\left(\frac{x^2}{l^2} - 4\frac{x}{l} + 6\right).$$

   (c) Upogib na prostem koncu je

   $$w_{\max} = \frac{q_0 l^4}{8EI} \doteq 6.5\,\mathrm{cm}.$$

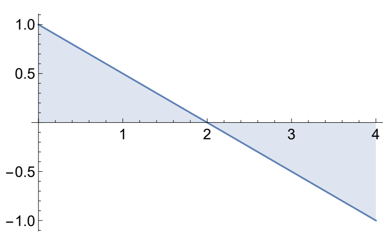
2. Enostavno podprt vodoravni nosilec dolžine $l = 2\,\mathrm{m}$ je enakomerno obremenjen s konstantno linijsko obremenitvijo q_0. Nosilec je votel s tankoslojnim kvadratnim presekom debeline $t = 5\,\mathrm{mm}$ in površino praznine $A = 1\,\mathrm{cm}^2$, Youngov modul pa je $E = 120\,\mathrm{GPa}$.

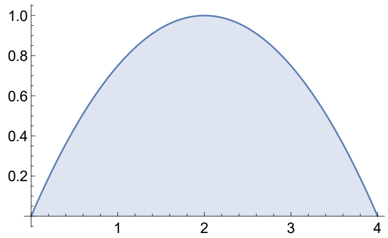
   (a) Skiciraj potek prečne sile in upogibnega momenta. Določi vrednost maksimalnega upogibnega momenta.

(b) Določi dopustno linijsko obremenitev q_0, da bo osna napetost v nosilcu po absolutni vrednosti manjša od $\sigma_0 = 120\,\mathrm{MPa}$.
(c) Izračunaj maksimalni upogib nosilca.

Rešitev:

(a) Rezultanta obremenitve nosilca ima velikost lq_0 s prijemališčem na sredini nosilca. Potem $A = B = \frac{1}{2}lq_0$, kjer sta A in B vertikalni sili podpor. Nadalje je $\frac{dQ}{dx} = -q_0$ in tako $Q = -q_0x + C$. Ker je prečna sila v levi podpori enaka sili leve podpore je $Q(x=0) = \frac{1}{2}lq_0$ in tako $Q = -q_0x + \frac{1}{2}lq_0$. Za upogibni moment velja $\frac{dM}{dx} = Q$ in od tod $M = \frac{1}{2}q_0x(l-x)$, saj je $M(0) = M(l) = 0$. Upogibni moment je očitno največji na





Slika 12.1: Potek prečne sile in upogibnega momenta.

sredini in tako $M_{\max} = \frac{q_0l^2}{8}$.

(b) Uporabili bomo formulo $\sigma = \frac{M}{I}z$, kjer je I ploskovni moment preseka nosilca. Označimo z a dolžino stranice notranjega kvadrata, z b pa zunanjega. Očitno je $a = 1\,\mathrm{cm}$. Velja $b = a + t$, kjer je t debelina nosilca. Potem $b = 2\,\mathrm{cm}$ in

$$I = \frac{1}{12}b^4 - \frac{1}{12}a^4 = \frac{15}{12}\mathrm{cm}^4.$$

Napetost je exstremalna na robu, pri $z = \pm\frac{b}{2} = \pm 1\,\mathrm{cm}$. Tako dobimo neenakost

$$\frac{q_0l^2 12}{8 \cdot 15\mathrm{cm}^3} \leq \sigma_0.$$

Potem

$$q_0 \leq \frac{10\sigma_0\mathrm{cm}^3}{l^2} = 300\,\mathrm{N/m}.$$

(c) Upogib nosilca dobimo iz enačbe $EIw^(4) = q_0$. Potem je

$$w = \frac{1}{24}\frac{q_0}{EI}x^4 + \frac{1}{6}C_1x^3 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4.$$

Iz robnih pogojev $w(0) = w(l) = 0$ in $w''(0) = w''(l) = 0$ sledi $C_2 = C_4 = 0$ in

$$C_1 = -\frac{q_0l}{2EI}, \qquad C_3 = \frac{q_0l^3}{24EI}.$$

Potem

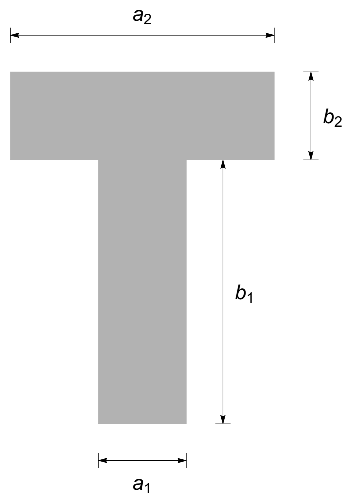
$$w = \frac{q_0}{24EI}\left(x^4 - 2x^3l + l^3x\right).$$

Upogib je največji na sredini in je enak

$$w_{\max} = \frac{5q_0l^4}{384EI}.$$

Za maksimalno dopustno linijsko obremenitev je $w_{\max} = \frac{1}{24}\mathrm{m} \doteq 41.6\,\mathrm{mm}$.

3. Enostavno podprt T nosilec dolžine $l = 1\text{m}$ je točkovno obremenjen v navpični smeri pri $x_1 = l/4$, $x_2 = l/2$ in $x_3 = 3l/4$ s silami $F_1 = F_0$, $F_2 = 2F_0$ in $F_3 = -F_0$. Dimenzija preseka so, glej skico, $a_1 = 1\,\text{cm}$, $a_2 = 3\,\text{cm}$, $b_1 = 2\,\text{cm}$ in $b_2 = 1\,\text{cm}$.



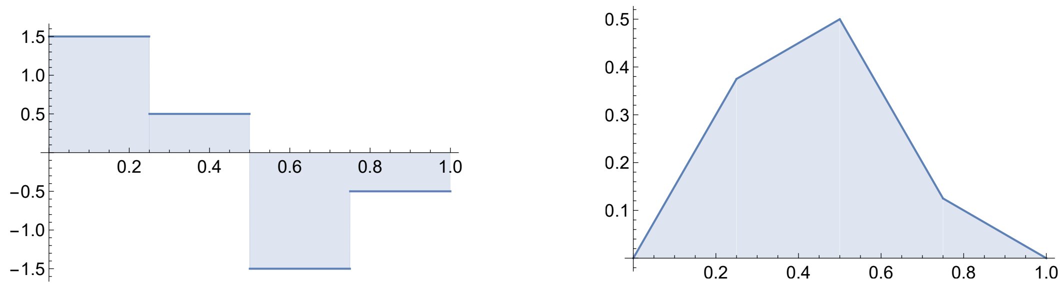
   (a) Skiciraj potek prečne sile in upogibnega momenta.

   (b) Določi središče preseka in njegov ploskovni moment drugega reda I.

   (c) Določi F_0 tako, da bo maksimalna natezna napetost nosilca manjša od $\sigma_0 = 120\,\text{MPa}$.

Rešitev:

(a) Prvo določimo sili podpor. Označimo levo z A, desno z B. Iz ravnovesnih enačb dobimo $A = 3F_0/2$ in $B = F_0/2$. Skici poteka prečne sile in upogibnega momenta sta:



Slika 12.2: Potek prečne sile in upogibnega momenta.

(b) T nosilec je sestavljen iz dve pravokotnikov. Določimo prvo masno središče. Postavimo pomožni koordinatni sistem z izhodiščem na vrhu T nosilca. Koordinati masnega središča sta potem $z_1 = b_2 + \frac{1}{2}b_1 = 2\,\text{cm}$ in $z_2 = \frac{1}{2}b_2 = 1/2\,\text{cm}$. Ploščini sta $A_1 = a_1 b_1 = 2\,\text{cm}^2$ in $A_2 = a_2 b_2 = 3\,\text{cm}^2$. Potem je masno središce

$$z_0 = \frac{1}{A_1 + A_2}(z_1 A_1 + z_2 A_2) = \frac{11}{10}\text{cm}.$$

Postavimo sedaj izhodišče koordinatnega sistema v izračunano masno središče. Novi koordinati masnih središč pravokotnikov sta $z_1^* = 9/10\,\text{cm}$ in $z_2^* = -3/5\,\text{cm}$. Ploskovni moment je potem

$$I = \frac{1}{12}(a_1 b_1^3 + a_2 b_2^3) + A_1 (z_1^*)^2 + A_2 (z_2^*)^2 = \left(\frac{1}{12}(3+8) + \frac{27}{25} + \frac{81}{50}\right)\text{cm}^4 = \frac{217}{60}\text{cm}^4.$$

(c) Dopustno silo F_0 določa neenakost

$$\frac{M}{I} z \leq \sigma_0.$$

Maksimalni upogibni moment je $M = \frac{1}{2} l F_0$, napetost pa je natezna na spodnjem delu preseka, zato $z = 19/10$cm. Potem

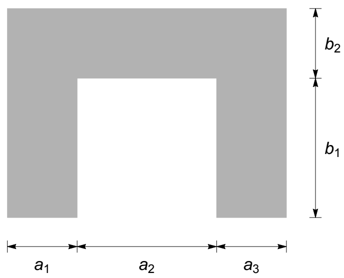
$$F_0 \leq \frac{2I\sigma_0}{lz} = \frac{8680}{19}\mathrm{N} \doteq 457\,\mathrm{N}.$$

4. Enostavno podprt U nosilec dolžine $l = 1$m je linijsko obremenjen s konstantno obremenitvijo q_0. Dimenzija preseka so, glej skico, $a_1 = 1\,\mathrm{cm}$, $a_2 = 2\,\mathrm{cm}$, $a_3 = 1\,\mathrm{cm}$, $b_1 = 2\,\mathrm{cm}$ in $b_2 = 1\,\mathrm{cm}$.

   (a) Skiciraj potek prečne sile in upogibnega momenta.

   (b) Določi središče preseka in njegov ploskovni moment I.

   (c) Določi dopustno obremenitev q_0 tako, da natezna napetost ne bo presegla vrednosti $\sigma_0 = 180\,\mathrm{MPa}$.



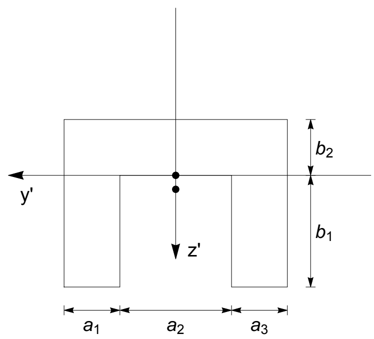
Rešitev:

(a) Prvo izračunamo sile podpor, levo označimo z A, desno z B. Iz simetrije problema sledi $A = B$. Vsota vseh sil je $q_0 l$, potem $A = B = \frac{1}{2} q_0 l$. Potek prečne sile in upogibnega momenta je dan na sliki. Maksimalni upogibni moment je $M_{\max} = \frac{l}{8} q_0 l^2$.

Slika 12.3: Brezdimenzijski potek prečne sile in upogibnega momenta ($l = 1, q_0 = 1$).

(b) Presek je sestavljen iz treh pravokotnikov, A_1 pravokotnik $a_1 \times b_1$, A_2 pravokotnik $a_3 \times b_1$ in A_3 pravokotnik $(a_1 + a_2 + a_3) \times b_2$. Postavimo pomožni koordiantni sistem $y'z'$ tako kot kaže skica. Očitno je središče na osi z'. Koordinato z'_* določimo po formuli

$$z'_* = \frac{1}{A_1 + A_2 + A_3} \left(A_1 z'_{1*} + A_2 z'_{2*} + A_3 z'_{3*} \right).$$



Izračunamo posebej $A_1 = a_1 \times b_1 = 2\,\mathrm{cm}^2$, $A_2 = a_3 \times b_1 = 2\,\mathrm{cm}^2$, $A_3 = (a_1 + a_2 + a_3) \times b_2 = 4\,\mathrm{cm}^2$ in $z'_{1*} = 1\,\mathrm{cm}$, $z'_{2*} = 1\,\mathrm{cm}$ in $z'_{3*} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{cm}$. Potem

$$z'_* = \frac{1}{8}(2 \times 1 + 2 \times 1 - 4 \times \frac{1}{2})\,\mathrm{cm} = \frac{1}{4}\,\mathrm{cm}.$$

V koordinatnem sistemu yz, ki ima izhodišče v središčni točki preseka imajo pomožni pravokotniki z koordinato središč $z_{1*} = \frac{3}{4}\,\mathrm{cm}$, $z_{2*} = \frac{3}{4}\,\mathrm{cm}$ in $z_{3*} = -\frac{3}{4}\,\mathrm{cm}$. Ploskovni moment preseka je potem

$$I = z_{1*}^2 A_1 + \frac{1}{12} a_1 b_1^3 + z_{2*}^2 A_2 + \frac{1}{12} a_3 b_1^3 + z_{3*}^2 A_3 + \frac{1}{12}(a_1 + a_2 + a_3) b_2^3.$$

Vstavimo podatke in dobimo $I = \frac{37}{6}\,\mathrm{cm}^4$.

(c) Maksimalnemu upogibnemu momentu pripada maksimalna osna napetost $\sigma_{\max}$. Veljati mora

$$\sigma_0 \geq \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I} z_{\max},$$

kjer je $z_{\max}$ koordinata na vrhu nosilca, kjer je natezna napetost največja. Po predhodnen izračunu je $z_{\max} = \frac{5}{4}$, cm. Tako dobimo

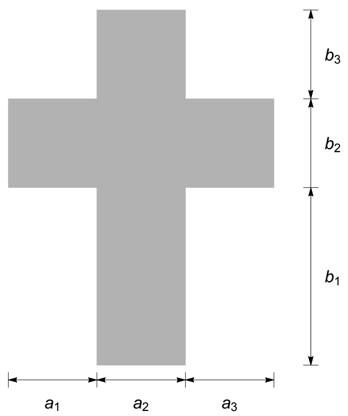
$$q_0 \leq \frac{8 I \sigma_0}{l^2 z_{\max}} = 71\,\mathrm{N/m}.$$

5. Enostavno podprt nosilec s presekom v obliki križa dolžine $l = 1$m je točkovno obremenjen v navpični smeri pri $x_1 = \frac{1}{2} l$ in $x_2 = \frac{3}{4} l$ s silama $F_1 = F_0$ in $F_2 = 2F_0$. Dimenzija preseka so, glej skico $a_1 = a_2 = a_3 = 1\,\mathrm{cm}$, $b_1 = 2\,\mathrm{cm}$, $b_2 = b_3 = 1\,\mathrm{cm}$.

   (a) Skiciraj potek prečne sile in upogibnega momenta. Kolikšna je maksimalna vrednost upogibnega momenta?

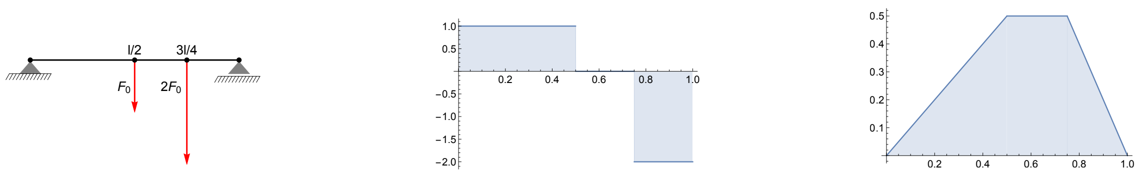
   (b) Določi središče preseka in njegov ploskovni moment I.

   (c) Določi dopustno obremenitev F_0 tako, da bo maksimalna napetost manjša od $\sigma_{\max} = 120\,\mathrm{MPa}$.



Rešitev:

(a) Skica obremenitve s potekom prečne sile in upogibnega momenta je podana na spodnji sliki. Za potek prečne sile, ki je odsekoma konstantna prvo izračunamo sile podpor. Imamo enačbi ravnovesja momentov v podporah. Torej $\frac{l}{4} \times 2F_0 + \frac{l}{2} \times F_0 = lA$ in $\frac{l}{2} F_0 + \frac{3l}{4} \times 2F_0 = lB$. Tako dobimo $A = F_0$ in $B = 2F_0$. Za potek momenta M upoštevamo, da je $\frac{dM}{dx} = Q$. Od tod sledi, da je maksimalen upogibni moment enak $M_{\max} = \frac{l}{2} F_0$.



Slika 12.4: Točkovno obremenjen nosilec s potekom prečne sile in upogibnega momenta.

(b) Križ je sestavljen iz treh pravokotnikov, pokončnega dimenzije $a_2 \times (b_1 + b_2 + b_3)$ in dveh krakov dimenzije $a_1 \times b_2$ oziroma $a_3 \times b_2$. Postavimo koordinatni sistem v središče preseka krakov in pokončnega dela. Očitno $x_* = 0$, za y_* pa velja formula

$$y_* = \frac{1}{A_1 + A_2 + A_3} \left(A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3 \right),$$

kjer je $A_1 = 4\,\mathrm{cm}^2$ površina pokončnega dela, $A_2 = A_3 = 1\,\mathrm{cm}^2$ pa površini krakov. Nadalje $y_1 = -\frac{1}{2}\mathrm{cm}$ in $y_2 = y_3 = 0$. Tako dobimo $y_* = -\frac{1}{3}\mathrm{cm}$. Ploskovni moment dobimo po formuli

$$I = \frac{1}{12} a_2 (b_1 + b_2 + b_3)^3 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)^2 \mathrm{cm}^2 A_1 + 2 \left(\frac{1}{12} a_1 b_2^3 + \left(\frac{1}{3}\mathrm{cm} \right)^2 A_2 \right).$$

Tu smo upoštevali simetrijo levega in desnega kraka. Tako dobimo

$$I = \frac{35}{6}\mathrm{cm}^4.$$

(c) Vsavimo dobljeno v formulo $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} z_{\max}}{I}$, kjer je $z_{\max}$ maksimalna oddaljenost od centralne osi do roba preseka nosilca v smeri obremenitve, torej $z_{\max} = (2 + \frac{1}{3})\mathrm{cm} = \frac{7}{3}\mathrm{cm}$. Vstavimo izračunane vrednosti v formulo. Tako dobimo

$$120\,\mathrm{MPa} = \frac{F_0}{2}\mathrm{m} \times \frac{6}{35} \times 10^8 \mathrm{m}^{-4} \times \frac{7}{3} 10^{-2}\mathrm{m}.$$

Tako dobimo $F_0 \leq 600\,\mathrm{N}$.

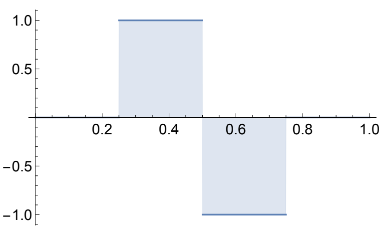
6. Enostavno podprt vodoravni nosilec dolžine $l = 1\,\mathrm{m}$ je v vertikalni smeri točkovno obremenjen pri $x_1 = \frac{l}{4}$, $x_2 = \frac{l}{2}$ in $x_3 = \frac{3l}{4}$ s silami $F_1 = -F_0$, $F_2 = 2F_0$ in $F_3 = -F_0$.

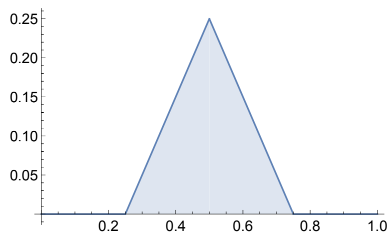
(a) Skiciraj potek prečne sile in upogibnega momenta. Določi vrednost maksimalnega upogibnega momenta.

(b) Nosilec je votel s kvadratnim presekom dimenzij $2\,\mathrm{cm} \times 3\,\mathrm{cm}$. Določi pogoj na velikost sile F_0 tako, da bo osna napetost v nosilcu manjša od $\sigma_0 = 120\,\mathrm{MPa}$.

Rešitev:

(a) Prvo izračunamo sile podpor, levo označimo z A, desno z B. Iz simetrije problema sledi $A = B$. Vsota vseh sil je nič, potem $A = B = 0$. Potek prečne sile in upogibnega momenta je dan na sliki. Maksimalni upogibni moment je $M_{\max} = \frac{l}{4} F_0$.





Slika 12.5: Potek prečne sile in upogibnega momenta.

(b) Ploskovni moment pravokotnika dimenzije $a \times b$ je

$$I = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} y^2\, dy = 2a \int_{-b/2}^{b/2} y^2\, dy = \frac{1}{12} ab^3 = \frac{9}{2}\mathrm{cm}^4.$$

Osna napetost je dana s formulo $\sigma = \frac{M}{I}z$. Veljati mora pogoj

$$\frac{M_{\max}}{I}z_{\max} \leq \sigma_0.$$

Ker je $z_{\max} = \frac{a}{2}$ in $M_{\max} = \frac{l}{4}F_0$, dobimo od tod neenačbo

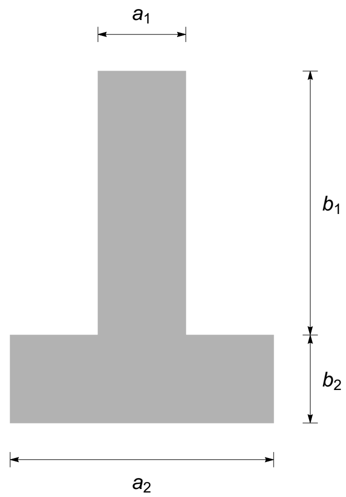
$$F_0 \leq \frac{8I\sigma_0}{la} = 2.16\,\mathrm{kN}.$$

7. Enostavno podprt T nosilec dolžine $l = 1\mathrm{m}$ je točkovno obremenjen v navpični smeri pri $x_1 = l/4$, $x_2 = l/2$ in $x_3 = 3l/4$ s silami $F_1 = 2F_0$, $F_2 = F_0$ in $F_3 = -F_0$. Dimenzija preseka so, glej skico, $a_1 = 1\,\mathrm{cm}$, $a_2 = 3\,\mathrm{cm}$, $b_1 = 2\,\mathrm{cm}$ in $b_2 = 1\,\mathrm{cm}$.

   (a) Skiciraj potek prečne sile in upogibnega momenta.

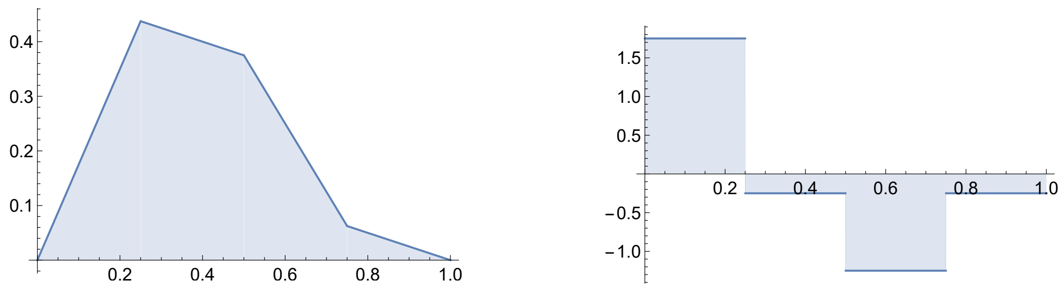
   (b) Določi središče preseka in njegov ploskovni moment drugega reda I.

   (c) Določi F_0 tako, da bo maksimalna natezna napetost nosilca manjša od $\sigma_0 = 120\,\mathrm{MPa}$.



Rešitev:

(a) Prvo določimo sili podpor. Označimo levo z A, desno z B. Iz ravnovesnih enačb dobimo $A = 7F_0/4$ in $B = F_0/4$. Skici poteka prečne sile in upogibnega momenta sta:



Slika 12.6: Potek prečne sile in upogibnega momenta.

(b) T nosilec je sestavljen iz dve pravokotnikov. Določimo prvo masno središče. Postavimo pomožni koordinatni sistem z izhodiščem na dnu T nosilca. Koordinati masnega središča sta potem $z_1 = b_2 + \frac{1}{2}b_1 = 2\,\mathrm{cm}$ in $z_2 = \frac{1}{2}b_2 = 1/2\,\mathrm{cm}$. Ploščini sta $A_1 = a_1b_1 = 2\,\mathrm{cm}^2$ in $A_2 = a_2b_2 = 3\,\mathrm{cm}^2$. Potem je masno središce

$$z_0 = \frac{1}{A_1 + A_2}(z_1A_1 + z_2A_2) = \frac{11}{10}\mathrm{cm}.$$

Postavimo sedaj izhodišče koordinatnega sistema v izračunano masno središče. Novi koordinati masnih središč pravokotnikov sta $z_1^* = 9/10\,\mathrm{cm}$ in $z_2^* = -3/5\,\mathrm{cm}$. Ploskovni moment je potem

$$I = \frac{1}{12}(a_1 b_1^3 + a_2 b_2^3) + A_1(z_1^*)^2 + A_2(z_2^*)^2 = \left(\frac{1}{12}(3+8) + \frac{27}{25} + \frac{81}{50}\right)\mathrm{cm}^4 = \frac{217}{60}\mathrm{cm}^4.$$

(c) Dopustno silo F_0 določa neenakost

$$\frac{M}{I} z \leq \sigma_0.$$

Maksimalni upogibni moment je $M = Al/4 = 7F_0/16$, napetost pa je natezna na spodnjem delu preseka, zato $z = 11/10$cm. Potem

$$F_0 \leq \frac{16 I \sigma_0}{7lz} = \frac{9920}{11}\mathrm{N} \doteq 902\,\mathrm{N}.$$