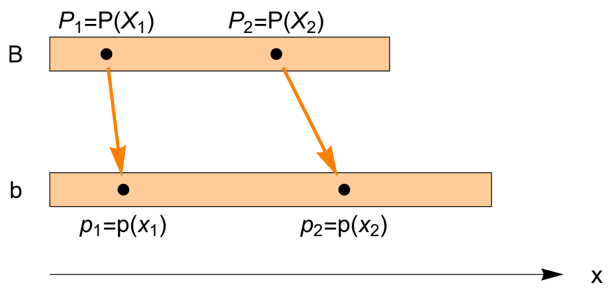
Predavanja 15. aprila 2020

Osna deformacija

S tem poglavjem bomo zapustili model togega telesa. Z modelom togega telesa smo uspeli rešiti marsikatero nalogo iz tehniške mehanike. Spoznali pa smo tudi njene meje, ko smo naleteli na statično nedoločljive naloge. V nadaljevanju obravnavano telo več ne bo togo. To pomeni, da se zaradi delovanja sil na telo razdalje med točkami telesa spremenijo. Pravimo, da se telo deformira. Vejo mehanike, ki dopušča deformacije teles in proučuje zvezo med deformacijo in delujočimi silami imenujemo *trdnost*.

Najenostavnejša deformacija je osna oziroma enoosna deformacija, ki dopušča spremembe dolžin samo v eni smeri. Tipični primer za enoosno deformacijo je razteg ali skrčitev palice, ki ima konstantno ali spreminjajočo se debelino. V povezavi s tem primerom bomo zato splošno obravnavo enoosne deformacijo slikovno praviloma prikazali kot deformacijo palice.

Osnovne pojme deformacije bomo vpeljali za splošno deformacijo in jih nato poenostavili na primer enooosne deformacije. Če želimo opisati deformacijo telesa, moramo telo poznati v vsaj dveh položajih, saj lahko le na ta način ugotovimo, da je prišlo do sprememb dolžin. Pri statiki deformabilnih teles se bomo omejili na dva položaja. Prvemu bomo rekli *referenčni* oziroma *nedeformirani* položaj, drugemu pa *prostorski* oziroma deformirani položaj. Oba pložaja se nanašata na isto telo. Da ju bomo ločili, bomo uporabljali za nedeformiran položaj velike črke, za deformiran pa male. Če je $\mathcal{B}$ telo, bomo referenčni položaj označevali z B, prostorski pa z b. Točko referenčnega položaja s P, točko prostorskega s p. Koordinata referenčnega položaja je $\mathbf{X} = (X, Y, Z)$, prostorskega pa $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Deformacija je pravzaprav preslikava $p = p(P)$, ki referenčni položaj preslika v prostorski. Dve različni točki referenčneg položaja se preslikata v dve različni točki prostorskega položaja. To pomeni, da je deformacija injektivna preslikava. Ker je prostorski položaj slika referenčnega položaja, je deformacija tudi surjektivna. Deformacija je tako bijektivna preslikava.



Slika 1: Enoosna deformacija.

Slika 1 prikazuje osno deformacijo palice $\mathcal{B}$. Zgornji položaj je referenčni položaj. Palica je v tem položaju ozančena z B. Označeni sta tudi dve točki P_1 in P_2. Njuni referenčni koordinati sta $\mathbf{X}_1$ in $\mathbf{X}_2$. Prostorski položaj deformirane palice $\mathcal{B}$ je ozančen z b. Tu smo zaradi nazornosti pložaj b narisali pod referenčnim položajem tako, da se B in b ne sekata. To lahko vedno storimo, saj bomo kmalu videli, da togi pomik nima vpliva na deformacijo. Pri deformaciji se točka P_1 s koordinato $\mathbf{X}_1$ preslika v točko p_1 s koordinato $\mathbf{x}_1$. To preslikavo lahko zapišemo v koordinatno neodvisni obliki $p_1 = p(P_1)$, ali v koordinatnem zapisu $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(\mathbf{X}_1)$ oziroma $x_1 = x(X_1, Y_1, Z_1)$, $y_1 = y(X_1, Y_1, Z_1)$ in $z_1 = z(X_1, Y_1, Z_1)$.

Deformacijo pogostokrat opišemo s funkcijo pomika $\mathbf{U}(\mathbf{X}) = (u_x, u_y, u_z)$ tako, da velja

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{U}(\mathbf{X}).$$

Funkcijo pomika smo zapisali z velikimi črkami, ker je ta funkcija definirana na referenčnem položaju. Pripadajoči nekoodinatni zapis je

$$p = P + \vec{U}(P)$$

oziroma

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{U}(\vec{R}),$$

kjer sta $\vec{R}$ in $\vec{r}$ krajevna vektorja do P in p. S togim pomikom lahko vedno dosežemo, da ima deformacijo negibno točko. To pomeni da obstaja točka P_0, ki se pri deformaciji preslika samo vase, $p(P_0) = P_0$. Izhodišče koordinatnega sistema potem praviloma postavimo v to negibno točko.

Deformacij je enoosna, če obstaja tak koordinatni sistem, da se pri deformaciji spremeni samo ena koordinata v odvisnosti samo od te koordinate. Naj bo ta koordinata x. Potem je

$$x = x(X), \qquad y = Y \quad \text{in} \quad z = Z.$$

Pripadajoča funkcija pomika pa je

$$U_1 = U_1(x_1), \qquad U_2 = U_3 = 0. \tag{1}$$

Ker je samo ena komponenta neničelna, jo bomo pisali brez indeksa, $U = U_1$. Enoosno deformacijo bomo praviloma opisali s koordinatnim zapisom, saj smer deformacije na naravni način določa koordinatno os s katero deformacijo koordinatno opišemo. Koordinatna os je seveda v smeri deformacije.

Mere deformacije

Toga preslikava ohranja razdaljo med točkami, deformacija pa v splošnem ni toga, zato razdalja med dvema točkama v referenčnem položaju ni enaka razdalji med tema dvema točkama v prostorskem položaju. Sprememba razdalje določa mero deformacije. Spoznali bomo tri mere deformacij, *relativna sprememba dolžin, Cauchyjeva mera in logaritemska mera.*

Začnimo z relativno spremembo dolžin

$$\epsilon_1 = \epsilon_1(P_1, P_2) = \frac{|p_1p_2| - |P_1P_2|}{|P_1P_2|} = \frac{|p_1p_2|}{|P_1P_2|} - 1. \tag{2}$$

Tu smo s $|P_1P_2|$ zapisali razdaljo med točkama P_1 in P_2 in podobno s $|p_1p_2|$ zapisali razdaljo med točkama p_1 in p_2. Absolutna razlika dolžin ni dobra mera, saj je njuna razlika lahko pri mali deformaciji velika, če sta točki zelo oddaljeni. Če je deformacija toga, pravimo, da ni prava deformacija, ker ohranja dolžine, je $\epsilon_1(P_1, P_2) = 0$ za poljubni par točk P_1 in P_2. To je lastnost, ki jo zahtevamo od vsake mere. Če je $\epsilon_1 > 0$ oziroma $\epsilon_1 < 0$ za vsak par točk P_1 in P_2, je deformacija razteg oziroma skrčitev. Če je $\epsilon_1(P_1, P_2) > 0 (< 0)$ za vsak P_2 v okolici P_1, pravimo, da je deformacija lokalni razteg(skrčitev).

Naslednja mera deformacije je Cauchyjeva mera definirana z

$$\epsilon_2 = \epsilon_2(P_1, P_2) = \frac{|p_1p_2|^2 - |P_1P_2|^2}{|P_1P_2|^2} = \left(\frac{|p_1p_2|}{|P_1P_2|}\right)^2 - 1. \tag{3}$$

Cauchyeva mera meri relativno spremembo kvadratov razdalj. Njena prednost je v tem, da jo lažje izračunamo, saj v njej z razliko od relativne spremembe ni potrebno koreniti. Tudi Cauchyjeva mera je prava mere deformacije, saj je $\epsilon_2(P_1, P_2) = 0$ za vsak par točk P_1 in P_2 natanko tedaj, ko je deformacija toga.

Logaritemska mera je dana z

$$\epsilon = \epsilon(P_1, P_2) = \log \frac{|p_1 p_2|}{|P_1 P_2|}. \tag{4}$$

Je prava mera, je pa težje izračunljiva, saj zahteva logaritmiranje. Isti deformaciji različne mere priredijo različno vrednost. Ujemajo se samo pri nepravi, torej togi deformaciji, kjer so vse tri enake nič. Vse mere deformacije so brezdimenzijske, torej nimajo enote in so samo števila. Pogostokrat deformacijo izrazimo v procentih. Tako naprimer deformaciji $\epsilon = 0.5$ pravimo 50% deformacija.

Za primer izračunajmo enoosno deformacijo tanke palice. Deformacija naj bo v smeri palice. Potem očitno deformacija preslika tanko palico v tanko palico. Pravimo, da je enoosna deformacija *enakomerna*, če je $|p_1 p_2| = k\,|P_1 P_2|$, $k > 0$ za poljubni par točk P_1, P_2 referenčnega položaja, ki se preslikata v p_1 in p_2. Iz definicij mer deformacij sledi, da je

$$\epsilon_1 = k - 1, \qquad \epsilon_2 = k^2 - 1, \qquad \epsilon = \log k. \tag{5}$$

Enakomerno deformacijo ozke palice pogostokrat opišemo s spremembo celotne dolžine palice. Začetno dolžino označimo z l, končno pa z $l + \Delta l$. Potem je

$$\epsilon_1 = \frac{\Delta l}{l}, \qquad \epsilon_2 = \left(\frac{l + \Delta l}{l}\right)^2 - 1 = \frac{2l\Delta l + (\Delta l)^2}{l}, \qquad \epsilon = \log\left(1 + \frac{\Delta l}{l}\right). \tag{6}$$

Če je deformacija majhna, torej če je $|\epsilon_1|$ majhna količina, sledi iz (6), da je

$$\epsilon_2 \approx 2\epsilon_1 \qquad \epsilon \approx \epsilon_1. \tag{7}$$

Druga enakost sledi iz lastnosti logaritma $\log(1 + x) \approx x$ za $|x| << 1$. Tu zapis $|x| << 1$ pomeni, da je $|x|$ bistveno manjši od 1.

Opišimo še enakomerno deformacijo s funkcijo pomika. Izberimo dve točki P_1 in P_2 v referenčnem položaju. Njuni koordinati označimo z X_1 in X_2, kjer je X koordinata v smeri palce. Privzemimo, da je $X_2 > X_1$. Ker je palica tanka, je $|P_1 P_2| = X_2 - X_1$. Točki P_1 in P_2 se deformirata v p_1 in p_2, ki jima pripadata koordinati x_1 in x_2. Sedaj velja $|p_1 p_2| = x_2 - x_1$ ali $|p_1 p_2| = x_1 - x_2$. Privzemimo, da velja prva možnost. Druga možnost poleg deformacije še zasuka palico za kot π. Za koordinati x_i velja

$$x_i = X_i + U(X_i), \qquad i = 1, 2.$$

Potem je

$$x_2 - x_1 = X_2 + U(X_2) - X_1 - U(X_1). \tag{8}$$

Upoštevajmo, da je enoosna deformacija enakomerna. Potem je $x_2 - x_1 = |p_1 p_2| = k\,|P_1 P_2| = k(X_2 - X_1)$. Iz enačbe (8) po krajšem računu sledi

$$u(X_2) - U(X_1) = (k - 1)(X_2 - X_1).$$

Za negibno točko deformacije je $X_1 = 0$ je $U(0) = 0$. Pišimo X namesto X_2. Potem za enakomerno enoosno deformacijo velja

$$U(X) = (k - 1)X.$$

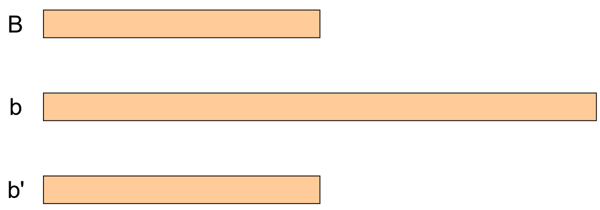
Enakomerna enoosna deformacija je za $k > 1$ *enakomerni razteg* in *enakomerna skrčitev* za $0 < k < 1$. Vrednost $k = 0$ ni dopustna, saj se pri tej vrednsoti vsa palica skrči v eno točko.

Aditivnost deformacije

Z naslednjim primerom bomo pokazali pomembnost logaritemske mere. Zamislimo si dve deformaciji, prva deformacija preslika B v b, druga pa b v b', oziroma prva točko P v p, druga pa točko p v p'. Z ϵ_1 označimo prvo mero deformacije, z ϵ_1' pa drugo. Drugi deformaciji služi b za referenčni položaj, b' pa za prostorski. Označimo še z η_1 mero deformacije, ki deformira B neposredno v b'. Deformacija iz B v b' je vsota deformacije iz B v b in iz b v b'. Na b lahko gledamo kot na vmesni položaj. Pričakujemo, da velja

$$\eta_1 = \epsilon_1 + \epsilon_1'. \tag{9}$$

Pokažimo na primeru, da to v splošnem ni res.



Slika 2: Aditivnost mere.

Palico z referenčnim položajem B v prvi deformaciji raztegnemo enakomerno na dvojno dolžino. Njen prostorski položaj označimo z b, glej sliko 2. Nato palico enakmerno skrčimo na polovično razdaljo. Njen končni položaj označimo z b'. Očitno je $b = b'$ in zato je mera deformacije iz b v b' enaka nič. Poglejmo ali je nič tudi vsota mer deformacij. Koeficient raztega prve deformacije je $k = 2$, druge pa $k' = 1/2$. Potem je po (5)

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 + \epsilon_1' &= (2-1) + (1/2-1) = 1/2, \\
\epsilon_2 + \epsilon_2' &= (4-1) + (1/4-1) = 9/4, \\
\epsilon + \epsilon' &= \log(2) + \log(1/2) = \log 2 - \log 2 = 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Vidimo, da samo za logaritemsko mero velja (9). To velja splošno, logaritemska mera je aditivna, ostali dve pa nista.

Lokalizacija mere deformacije

Mero deformacije smo definirali s spremembo razdalj za poljubni par točk. Praviloma je vzrok deformacije lokalen, zato je predvsem pomembna deformacija para točk, ki sta si blizu. Izberimo točko $P = P_1$ in se omejimo samo na tiste točke P_2, ki so infinitezimalno, torej poljubno, blizu točki P. Tej omejitvi pravimo *lokalizacija mere deformacije*. Po lokalizacije deformacije postane mera deformacije funkcija položaja P.

Če ima točka P koordinato $\mathbf{X}$, imajo infinitezimalno bližnje točke koordinate $\mathbf{X} + d\mathbf{X} = (X + dX, Y + dY, Z + dZ)$. Potem je $|PP_2| = |d\mathbf{X}|$. Točka P se pri enoosni deformaciji preslika v točko p, ki ima koordinate $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{U}(\mathbf{X})$ oziroma

$$\mathbf{x} = (x, y, z) = (X + U(X), Y, Z)).$$

Tu smo upostevali, da za enoosno deformacijo velja (1). Točka P_2 s koordinato $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$ se preslika v točko p_2, ki ima koordinato

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{X} + d\mathbf{X} + \mathbf{U}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}) = (X + U(X + dX) + dX, Y + dY, Z + dZ).$$

Potem je

$$
\begin{aligned}
|pp_2| &= |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}| = |\mathbf{U}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}) - \mathbf{U}(\mathbf{X}) + d\mathbf{X}| \\
&= |(dX + U(X + dX) - U(X), dY, dZ)| \,.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Upoštevajmo, da za infinitezimalni dX velja

$$
U(X + dX) - U(X) = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}X}(X)dX.
$$

Potem iz (11) sledi

$$
|pp_2| = \left| \left(\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}X} + 1 \right) dX, dY, dZ \right) \right| . \tag{12}
$$

Pri enoosni deformaciji nas predvsem zanima sprememba dolžin v smeri deformacije. Točki P in $P + dP$ sta v smeri deformacije, če je $dY = dZ = 0$. Iz (12) potem sledi

$$
|pp_2| = \left| \left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}X} + 1 \right) dX \right| \quad \text{in} \quad |PP_2| = |dX| \,.
$$

Po definiciji mere je tako

$$
\epsilon_1 = \frac{|pp_1|}{|PP_1|} - 1 = \left| \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}X} + 1 \right| - 1 \tag{13}
$$

in

$$
\epsilon_2 = \left(\frac{|pp_1|}{|PP_1|} \right)^2 - 1 = \left(\left| \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}X} + 1 \right| \right)^2 - 1. \tag{14}
$$

Pri velikih deformacijah izraza ne moremo poenostaviti. Privzemimo sedaj, da je deformacija majhna, točneje, da je

$$
\left| \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}X} \right| << 1. \tag{15}
$$

Potem iz (13) sledi, tu je dovolj predpostaviti $\left| \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}X} \right| < 1$, da je

$$
\epsilon_1 = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}X}. \tag{16}
$$

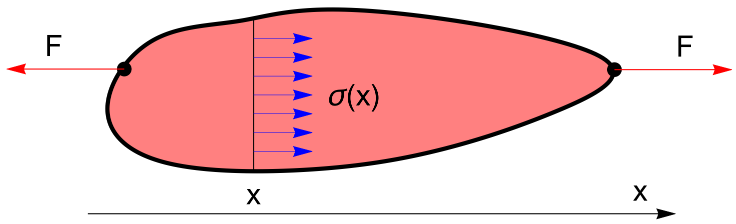
Nadalje iz (14) sledi

$$
\epsilon_2 = \left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}X} \right)^2 + 2\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}X} \approx 2\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}X} = 2\epsilon_1. \tag{17}
$$

Podobno lahko pokažemo, da je $\epsilon \approx \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}X} = \epsilon_1$. Zveza (7) torej ne velja samo za enakomerno deformacijo temveč za vsako majhno deformacijo. Lokalizirani meri deformacije za katero velja (15) pravimo *infinitezimalna deformacija.* Za infinitezimalno deformacijo je torej

$$
\epsilon_2 = 2\epsilon_1, \qquad \epsilon = \epsilon_1. \tag{18}
$$

Iz (16) vidimo, da je infinitezimalna deformacija linearna funkcija pomika, dvakrat večji pomik ima dvakrat večjo deformacijo. Deformacija vsote dveh pomikov je enaka vsoti deformacij posameznik pomikov. Kako se mera deformacije izraža s pomikom v splošnem primeru, ko deformacija ni enoosna, bomo spoznali pri obravnavi prostorske deformacije.



Slika 3: Enoosna napetost.

Osna napetost

Vprašajmo se, kaj povzroči osno deformacijo. Odgovor je osna napetost. Začnimo s primerom na sliki 3. Telo vlečemo narazen, levo s silo $-\vec{F}$, desno s $\vec{F}$. Postavimo koordinatno os x v smeri sile $\vec{F}$. Bazni vektor v smeri osi x označimo z $\vec{\imath}$. Telo navidezno prerežemo pri koordinati x z ravnino, ki ima normalo v smeri sile $\vec{F}$. Smer sile je torej pravokotna na ravnino. Desni del telesa deluje na levi del telesa preko preseka $A(x)$ s površinsko silo. Dovolj daleč od prijemališč sil je dominantni del gostote površinske sile v smeri $\vec{F}$ in je po preseku $A(x)$ konstanten. Označimo to gostoto površinske sile z $\sigma(x)\vec{\imath}$. Levi del telesa je v ravnovesju. Velja ravnovesna enačba

$$-\vec{F} + \sigma(x)A(x)\vec{\imath} = \vec{0}.$$

Tu smo z $A(x)$ zapisali površino preseka. Upoštevajmo, da je $\vec{F} = F\vec{\imath}$. Tako dobimo

$$\sigma(x) = F/A(x).$$

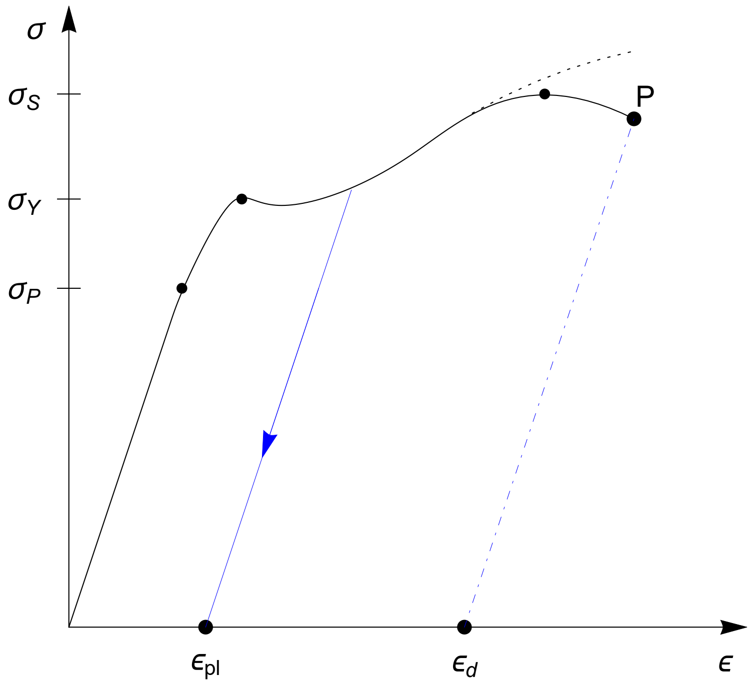
Gostoto sile σ imenujemo *napetost*. Če želimo poudariti, da jo dobimo iz enoosne obremenitve, ji pravimo tudi *enoosna napetost*. Normala na ravnino preseka je $\vec{n} = \vec{\imath}$ in kaže v smer tistega dela telesa, ki z ene strani preseka deluje na drugo stran preseka. Na sliki 3 kaže v desno, ker desni del deluje na levi del. Vektor napetosti je $\sigma\vec{n}$. Pravimo, da je napetost *natezna*, če je $\sigma > 0$ in da je *tlačna*, če je $\sigma < 0$. Na sliki 3 je napetost natezna. Tlačno napetost bi dobili, če bi na palico delovala sila nasprotna sili na sliki.

Enoosna napetost je najenostavnejše napetostno stanje v telesu. Pri neenoosnih obremenitvah gostota površinske sile ni enoosna. Kako je v tem primeru, bomo spoznali pri obravnavi napetostnega tenzorja.

Poglejmo še enoto napetosti. Po definiciji je enota napetosti $[\sigma] = \mathrm{N/m^2} = \mathrm{Pa}$. Tu je Pa okrajšava za Pascal. Napetost en Newton na kvadratni meter je za tehniško mehaniko zelo majhna vrednost. Večinoma v tehniški mehaniki uporabljamo enoti MPa(mega Pascal) in GPa(giga Pascal), to je 10^6Pa in 10^9Pa.

Konstitutivna zveza med deformacijo in napetostjo

Enoosno napetost in deformacijo povezuje konstitutivni zakon, ki deformaciji priredi napetost. Vzemimo palico s konstantnim presekom A_0 in jo obremenimo levo, desno v njeni smeri s silo $-\vec{F}$ in $\vec{F}$. Obremenitev v palici povzroči enoosno napetostno stanje z napetostjo σ. Ker ima palica konstantni presek, je napetost $\sigma = F/A_0$ konstantna v območju, ki je dovolj daleč od pritrdišč, kjer prijemata sili $-\vec{F}$ in $\vec{F}$. Napetosti F/A_0 pravimo *inženirska napetost*. Označimo dolžino tega odseka z l. Pri natezni sili se palica raztegne, pri tlačni sili pa skrči. Deformirana dolžina odseka je $l + \Delta l$. Ker je napetost na območju konstantna, se območje enakomerno raztegne oziroma skrči. Deformacija je potem enaka $\epsilon_1 = \Delta l/l$. Tako smo dani obremenitvi priredili dve količini, deformacijo in napetost. Spremembi obremenitve sledi sprememba deformacije. Tako vodenemu poskusu pravimo napetostno vodeni poskus. Poskus pa lahko vodimo tudi deformacijsko, ko predpišemo deformacijo in izmerimo napetost. V obeh primerih dobimo graf odvisnosti napetosti od deformacije, ki ga imenujemo *deformacijsko napetostni diagram.* Diagram ima deformacijo ϵ_1 na abscisni osi, na ordinatni osi pa napetost σ, glej sliko 4.



Slika 4: Tipični deformacijsko napetostni diagram za kovino.

Natančni potek diagrama je odvisen od matriala. Slika shematsko kaže deformacijsko napetostni diagram za kovine. Na ordinati so označane tri vrednosti napeosti, σ_{P}, σ_{Y} in σ_{S}. Prva oznaka σ_{P} označuje napetost do katere je med deformacijo ϵ_1 in napetostjo σ linearna zveza

$$\sigma = E\epsilon_1.$$

Tej linearni zvezi pravimo *Hookov zakon*, konstanti E pa *Youngov modul.* Ker je deformacija brezdimenzijska veličina, ima Youngov modul enoto Pascal. Območje na katerem velja Hookov zakon imenujemo *območje proporcionalnosti.* Vsi materiali, na videz še tako težko deformabilni, kot naprimer keramika, imajo območje proporcionalnosti. Hookov zakon velja za majhne deformacije, praaviloma samo na območju $|\epsilon_1| < 0.001$ in le v izjemnih primerih do $|\epsilon_1| < 0.01$. Večji je Youngov modul, težje ga deformiramo. Pravimo, da ima veliko materialno togost.

Območje proporcionalnosti leži v *območju elastičnosti*, to je območje v katerem je napetost manjša od σ_{Y}. Vrednosti σ_{Y} pravimo meja *tečenja.* Na območju elastičnosti izven območja proporcionalnosti med deformacijo in napetostjo ne velja linearna zveza. Napetost v odvisnosti od deformacije narašča počasneje kot v območju proporcionalnosti. Značilno za območje elastičnosti je, da pri obremenitvi in razbremenitvi velja enaka zveza med deformacijo in napetostjo. Torej, če palico raztegujemo s silo, katere velikost narašča od nič do $F \leq \sigma_{\mathrm{Y}} A_0$ in nato silo zmanjšamo nazaj do nič, zveza med deformacijo in napetostjo sledi isti poti pri obremenitvi in razbremenitvi. Pri ponovni obremenitvi do σ_{Y} velja enaka zveza med deformacijo in napetostjo kot prej. Elastični režim torej ne pozna utrujanja, zgodovina obremenitev ne vpliva na odziv material v elastičnem območju.

Območje izven elastičnosti je *območje plastičnosti.* V območje plastičnosti stopimo preko meje tečenja. Pri prehodu v območje plastičnosti se na začetku napetost pogostokrat nekoliko zmanjša. Če želimo to potrditi s poskusom, moramo poskus voditi deformacijsko. Območje plastičnosti se konča s koncem krivulje v *porušitveni točki.* V porušitveni točki se palica strga. Oba konca palice se hipoma razbremenita. Pri razbremenitvi v območju plastičnosti napetost ne sledi isti krivulji kot pri obremenitvi. V razbremenjeno stanje $\sigma = 0$ se vrne po linearnem segmetu, ki ima enako strmino kot graf v območju proporcionalnosti, glej segment z modro puščico na sliki 4. Po vrnitvi v razbremenjeno stanje deformacija ni enaka nič. Njeni vrednosti ϵ_{P} pravimo *plastična deformacija.* Deformaciji, ki nastane ob porušitvi pravimo *duktilnost* in jo označimo z ϵ_{d}. Duktilnost je največja možna plastična deformacija materiala. Pri ponovni obremenitvi napetost ne sledi prvotni krivulji temveč sledi segmentu predhodne razbremenitve do območja plastičnosti, od tam naprej pa po predhodni zvezi med deformacijo in napetostjo. Do vrnitve v območje plastičnosti velja linearna zveza med deformacijo in napetostjo. To novo območje proporcionalnosti je lahko večje od prvotnega z mejo tečenja, ki je večja od predhodne. Temu večanju meje tečenja s cikli razbremenjevanja in ponovnega obremenjevanja pravimo *utrjevanje.* Z višanjem meje tečenja kovina pridobiva na trdnosti. V metalurgiji imenujemo ta postopek *kovanje.*

Slika 4 prikazuje deformacijsko napetostni diagram za kovino. Kovine imajo izrazito območje plastičnosti. To pomeni, da jih lahko plastično preoblikujemo. Nimajo pa vsi materiali plastičnega območja. Naprimer les ali guma sta pri normalnih pogojih brez plastičnega območja. Tudi deformacija stekla se konča z lomom brez predhodne opazne plastične deformacije.

Na sliki 4 je označena še napetost σ_{S}, ki ji pravimo natezna trdnost. To je največja napetost, ki jo prenese material. Če napetost preseže natezno trdnost pride do porušitve. Porušitev se začne z naglim tanjšanjem palice. V tem primeru se presek palice naglo zmanjša in napetost ni več enaka kvocientu sile obremenitve s prvotnim presekom palice A_0 temveč z dejanskim presekom A. Kovocientu F/A pravimo *prava napetost.* Ker je $A < A_0$ je prava napetost večja od napetosti $\sigma = F/A_0$. To je na sliki prikazano s črtkano krivuljo. Ta odstopi od polne krivulje nekoliko prej preden se napetost σ približa natezni trdnosti.

Slika 4 prikazuje natezni preizkus z grafom funkcije $\sigma = \sigma(\epsilon_1)$. Pri tlačnem preizkusu moramo paziti, da ne pride do uklona palice. Če namesto inženirske napetosti uporabimo pravo napetost in namesto relativne mere ϵ_1 logaritemsko mero ϵ, se praviloma izkaže, da je graf tlačnega preizkusa liha razširitev grafa nateznega preizkusa. Z drugimi besedami velja $\hat{\sigma} = -\hat{\sigma}(-\epsilon_1)$, kjer je $\hat{\sigma}$ prava napetost. Pravilo ima izjeme, določeni materiali, naprimer beton, zelo dobro prenašajo tlačno napetost in slabo natezno. Za takšne materiale je deformacijsko napetostna funkcija liha samo za majhne pomike. Ker beton slabo prenaša natezno napetost, je v gradbeništvu ojačan z železnim palicami. Tej kombinaciji pravimo železobeton. Tlačno napetost prenaša beton, natezno pa železne palice. Same palice bi slabo prenašala tlačno napetost zaradi nevarnosti uklona.

Tabela 1: Tabela materialnih lastnosti.

material	E[GPa]	σ_{Y}[Mpa]	σ_{S}[MPa]	ϵ_{d}	$\alpha[10^{-6}\mathrm{K}^{-1}]$
Aluminij	69	40	200	0.5	23.1
Baker	124	60	400	0.55	17
Jeklo	200	500 - 1900	680 - 2400	0.02 - 0.3	11 - 13
Železo	200	50	200	0.3	11.8
Bron in medenina	103	70 - 640	230 - 890	0.01 - 0.7	19
Beton	30-50	20 - 30	-	-	12
Les $\parallel$	9-16	-	35 - 55	-	3.5
Les $\perp$	0.6- 1.0	-	4 - 10	-	27
Kavčuk	0.01 - 0.1	-	30	5	-

V tabeli 1 so podane vrednsti Youngovega modula E, meje tečenja σ_{Y}, natezne trdnosti σ_{S} in duktilnosti ϵ_{d} za osnovne primere materialov. Določeni materiali imajo razpon vrednosti. Beton je mešanica cementa in peska in je kompozit, zato so njene materialne lastnosti odvisne od razmerja njegovih sestavin. Prav tako imata bron in medenina razpon vrednosti saj sta zlitini. Razpon mej tečenja in trdnosti pri jeklu je zelo velik. Poznamo več vrst jekla, odvisno od njegovih sestavin in metalurškega postopka. Pomembna je tudi kristalografska struktura material. Tako ima diamant največjo vrednost Youngovega modula $E = 1000\,\mathrm{GPa}$, grafit, ki ima enako kemijsko sestavo kot diamant, pa $E = 27\,\mathrm{GPa}$. Nenazadnje, material pogostokrat ni v vse smeri enak, pravimo, da je *anizotropičen*. Lep primer je les, v smeri dolžine je Youngov modul precej večji kot v smeri pravokotni na letnice. Razlog je v celuloznih vlaknih, ki so v smeri rasti in dajejo lesu togost.

V nadaljevanju se bomo omejili izključno na tako majhne deformacije, da velja Hookov zakon. Obravnava plastičnosti in porušitve presega vsebino predmeta Osnove mehanike. Ker je deformacija majhna, lahko uporabimo aproksimacijo (18). Tako bomo v nadaljevanju namesto ϵ_1 pisali kar ϵ.

Primeri

Dopustna obremenitev palice

Določi dopustno natezno silo bakrene palice s površino preseka $A = 2\,\mathrm{cm}^2$ tako, da se palica ne bo plastično definirala.

Označimo z F natezno silo. Pripadajoča osna napetost je $\sigma = F/A$. Pogoj, da se palica plastično ne deformira je $\sigma < \sigma_\mathrm{Y}$. Tako dobimo pogoj

$$F = A\sigma < A\sigma_\mathrm{Y} = 2 \times 10^{-4}\mathrm{m}^2 \times 60 \times 10^6\mathrm{N/m}^2 = 120 \times 10^2\mathrm{N} = 12\,\mathrm{kN}.$$

Ocenimo še maksimalno dopustno deformacijo. Iz Hookovega zakona sledi, da je v območju proporcionalnosti $\epsilon = \sigma/E$. Ker je rast napetosti v odvisnosti od deformacije v elastičnem območju počasnejša kot v območju proporcionalnosti, lahko maksimalno dopustno deformacij samo približno ocenimo z

$$\epsilon < \sigma_\mathrm{Y}/E = 60\,\mathrm{MPa}/124\,\mathrm{GPa} = 2.01 \times 10^{-3}.$$

Reševanje statično nedoločenih nalog

Nosilec obesimo na strop s štirimi enakimi žicami tako kot kaže leva slika slike 5. Elastični modul žic je E, presek pa A. Naša naloga je, da določimo sile žic.

Slika 5: Nosilec obešen na štiri žice. Levo nosilec, desno deformacija žic.

Naloga je statično nedoločena. Določiti moramo štiri neznane sile, na razpolago pa imamo samo tri ravnovesne enačbe. Dejansko imamo samo dve ravnovesni enačbi, saj je sistem sil na nosilec sistem vzporednih sil, zato je ravnovesna enačba sil v vodoravni smeri trivialna.

Sile žic označimo z F_1, F_2, F_3 in F_4. Ravnovesni enačbi, vsota sil v navpični smeri in ravnovesje momentov s polom v levem krajišču sta

$$
\begin{aligned}
0 &= F_1 + F_2 + F_3 + F_4 - F_0,\\
0 &= -\frac{d}{4}F_0 + \frac{d}{3}F_2 + \frac{2d}{3}F_3 + dF_3.
\end{aligned}
$$

Dobili smo dve enačbi za štiri neznanke. Sile žic so osne sile dane s Hookovim zakonom $F_i = AE\Delta l_1/l$, kjer je l nedeformirana dolžina žice, Δl_i pa njen raztezek, glej sliko 5. Ko obesimo nosilec, se žice raztegnejo in ker je nosilec tog, pritrdišča žic na nosilec ostanejo na isti premici. Smerni koeficient premice je določen s parom dveh točk. Ker je za vse tri pare točk enak, sledi da je

$$
\frac{\Delta l_2 - \Delta l_1}{d/3} = \frac{\Delta l_3 - \Delta l_2}{d/3} = \frac{\Delta l_4 - \Delta l_3}{d/3}.
$$

oziroma

$$
2\Delta l_2 = \Delta l_3 + \Delta l_2 \quad \text{in} \quad 2\Delta l_3 = \Delta l_2 + \Delta l_4
$$

Vstavimo v ravnovesne enačbe še Hookov zakon. Tako dobimo sistem

$$
\begin{aligned}
F_0 &= \frac{AE\Delta l_1}{l} + \frac{AE\Delta l_2}{l} + \frac{AE\Delta l_3}{l} + \frac{AE\Delta l_4}{l},\\
\frac{d}{4}F_0 &= \frac{AEd\Delta l_2}{3l} + \frac{2AEd\Delta l_3}{3l} + \frac{AEd\Delta l_4}{l},\\
2\Delta l_2 &= \Delta l_1 + \Delta l_3,\\
2\Delta l_3 &= \Delta l_2 + \Delta l_4.
\end{aligned}
$$

Sistem preuredimo v

$$
\begin{aligned}
\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4 &= \frac{lF_0}{AE},\\
\Delta l_2 + 2\Delta l_3 + 3\Delta l_4 &= \frac{3lF_0}{4AE},\\
\Delta l_1 - 2\Delta l_2 + \Delta l_3 &= 0,\\
\Delta l_2 - 2\Delta l_3 + \Delta l_4 &= 0.
\end{aligned}
$$

Od prve enačbe odštejemo tretjo, in nato seštejemo drugo in četrto. Tako dobimo sistem

$$
\frac{F_0 l}{AE} = 3\Delta l_2 + \Delta l_4, \qquad \frac{3F_0 l}{4AE} = 2\Delta l_2 + 4\Delta l_4.
$$

Rešitev je

$$
\Delta l_2 = \frac{13F_0 l}{40AE}, \qquad \Delta l_4 = \frac{F_0 l}{40AE}.
$$

Potem izračunamo še

$$
\Delta l_1 = \frac{19F_0 l}{40AE}, \qquad \Delta l_3 = \frac{7F_0 l}{40AE}.
$$

Sile žic so tako

$$
F_1 = \frac{19F_0}{40}, \quad F_2 = \frac{13F_0}{40}, \quad F_3 = \frac{7F_0}{40}, \quad F_4 = \frac{F_0}{40}.
$$

Temperaturna deformacija

Če palico segrejemo, se podaljša, če jo ohladimo se skrči. Deformaciji, ki jo povzroči sprememba temperaure pravimo *temperaturna deformacija*. Če je palica prosta, sprememba temperature ne povzroči napetosti v palici. Nasprotno, v vpeti palici sprememba temperature povzroči napetost.

Ta napetost je enaka napetosti, ki temperaturno deformirano palico spravi na dolžino vpetja. Zveza med temperaturno deformacijo in spremembo temperature je

$$\epsilon = \alpha \Delta T,$$

kjer je α *koeficient termalnega (temperaturnega) raztezka*, ΔT pa je razlika temperature med referenčnim in prostorskim položajem. Enota termalnega raztezka je $1/K$, kjer je K stopinja Kelvina. Vrednosti koeficienta za izbrane materiale so podane v tabeli 1. Vrednosti α so majhne, zato so dane kot mnogokratniki števila 10^{-6}. V tabeli lahko opazimo, da imata beton in železo približno enak koeficient termalnega raztezka. To je pomembno za železobeton saj bi v nasprotnem primeru sprememba temperature povzročila termalno (toplotno) napetost v železobetonu.

Termalna napetost

Pojav termalne napetosti si poglejmo na primeru. Elastična palica je vpeta med dve togi steni. Palico segrejemo za ΔT. Sprememba temperature želi palico podaljšati, vendar je ne more, ker to togi steni ne dopuščata. Steni delujeta na palico s silo, ki povzroči v palici enoosno napetostno stanje σ, ki je po Hookovem zakonu enaka $\sigma = E\epsilon_{\mathrm{E}}$. Palica je tako podvržen dvema deformacijama, toplotni ϵ_{T} in elastični ϵ_{E}. Ker je palica vpeta med togi steni, se ne deformira. Potemtakem je skupna deformacija $\epsilon_{\mathrm{T}} + \epsilon_{\mathrm{E}}$ enak nič in tako

$$\epsilon_{\mathrm{E}} = -\epsilon_{\mathrm{T}} = -\alpha \Delta T.$$

Termalna napetost je potem enaka

$$\sigma = -\alpha E \Delta T.$$

Napetost je tlačna in je za bakreno palico pri $\Delta T = 10K$ enaka

$$\sigma = 124\,\mathrm{GPa} \times 17\,\mathrm{K}^{-1} 10^{-6} \times 10K = 21\,\mathrm{MPa}.$$

Vprašanja in naloge

1. Mera deformacije palica dolžine l je $\epsilon_1 = 0.5$. Zapiši dolžino deformirane palice
2. Poišči svoj primer, ki pokaže da meri ϵ_1 in ϵ_2 nista aditivni.
3. Dolžina deformirane palice je $l + \Delta l$, kjer je l prvotna dolžina palice. Določi deformirano dolžino dvakrat daljše palice, ki ima enako mero deformacije.
4. Palico s krožnim presekom s polmerom r raztegujemo s silo F. S kakšno silo moramo raztegniti palico s polmerom $2r$, da se bosta palici enako raztegnili.
5. Palico dolžine l raztegnemo s silo F. Za koliko bi se raztegnila dvakrat daljša palica?
6. Za koliko moramo segreti palico, da se bo raztegnila za isti dolžino kot polovico krajša palica.