Predavanja 18. marca 2020

Operacije nad sistemom sil

V tem razdelku si bomo ogledali operacije, ki ohranjajo ekvipolentnost sistema sil. Prvo se vprašajmo, ali lahko dani sili sistema sil spremenimo prijemališče. Naj bo

$$\mathcal{F} = \{(P_1, \vec{F}_1), (P_2, \vec{F}_2), \ldots, (P_n, \vec{F}_n)\}$$

dani sistem sil. Sili $\vec{F}_1$ prestavimo prijemališče v P_1'. Tako dobimo sistem

$$\mathcal{F}' = \{(P_1', \vec{F}_1), (P_2, \vec{F}_2), \ldots, (P_n, \vec{F}_n)\}.$$

Ali sta sistema sil $\mathcal{F}$ in $\mathcal{F}'$ ekvipolentna, ali velja $\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{R}(\mathcal{F}')$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \vec{N}(\mathcal{F}', O)$ za poljubni izbrani pol? Očitno je $\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{R}(\mathcal{F}')$, saj imata sistema enake sile, le prijemališče sile $\vec{F}_1$ je različno. Zapišimo

$$\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \sum_{i=1}^{n} \vec{OP_i} \times \vec{F}_i.$$

Vidimo, da je $\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \vec{N}(\mathcal{F}', O)$, če je

$$\vec{OP_1} \times \vec{F}_1 = \vec{OP_1'} \times \vec{F}_i$$

oziroma

$$\left(\vec{OP_1} - \vec{OP_1'}\right) \times \vec{F}_1 = \vec{0}.$$

Vektorski produkt je enak nič, če sta vektorja vzporedna, torej če je $\vec{P_1'P} \parallel \vec{F}_1$. To pomeni, da lahko prijemališče sile prestavimo samo po premici, ki gre skozi prvotno prijemališče in ima smer sile. Temu pravilu pravimo *princip o polznosti sile.*

Naj bo sedaj sistem sile oblike

$$\mathcal{F} = \{(P_1, \vec{F}_1), (P_1, \vec{F}_2), (P_3, \vec{F}_2), \ldots, (P_n, \vec{F}_n)\},$$

sili $\vec{F}_1$ in $\vec{F}_2$ imata isto primejališče. Pokažimo, da je sistem sil

$$\mathcal{F}' = \{(P_1, \vec{F}_1 + \vec{F}_2), (P_1, \vec{F}_2), (P_3, \vec{F}_2), \ldots, (P_n, \vec{F}_n)\}$$

ekvipolenten sistemu $\mathcal{F}$. Očitno je $\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{R}(\mathcal{F}')$. Nadalje, ker je

$$\vec{OP_1} \times \vec{F}_1 + \vec{OP_1} \times \vec{F}_F = \vec{OP_1} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$$

je tudi $\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \vec{N}(\mathcal{F}', O)$ in sistema sil sta res ekvipolentna, torej $\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}'$. Temu pravilu pravimo *princip o seštevanju sil s skupnim prijemališčem.*

Očitno dodajanje ničelne sile ne vpliva na ekvipolentnost. Velja torej

$$\{(P_1, \vec{0}), (P_2, \vec{F}_2), (P_3, \vec{F}_2), \ldots, (P_n, \vec{F}_n)\} \equiv \{(P_2, \vec{F}_2), (P_3, \vec{F}_2), \ldots, (P_n, \vec{F}_n)\}.$$

Potemtakem je po principu o seštevanju sil s skupnim prijemališčem tudi

$$\{(P_1, \vec{F}_1), (P_1, -\vec{F}_1), (P_3, \vec{F}_2), \ldots, (P_n, \vec{F}_n)\} \equiv \{(P_2, \vec{F}_2), (P_3, \vec{F}_2), \ldots, (P_n, \vec{F}_n)\}.$$

Tej enakosti pravimo *princip o uravnoteženem paru sil.* Zapisanim principom pravimo osnovni principi statike. Poglejmo si sedaj primer njihove uporabe.

Redukcija ravninskega sistema

Dan je ravninski sistem dveh sil $\mathcal{F} = \{(P_1, \vec{F}_1), (P_2, \vec{F}_2)\}$. Ločimo primera, ko sili nista vzporedni in ko sta vzporedni. Če sili nista vzporedni, se njuni premici nosilki sekata v skupni točki P_0. Po principu o polznosti lahko potem prijemališči sil premaknemo v presečišče nosilk. Potem velja

$$\{(P_1, \vec{F}_1), (P_2, \vec{F}_2)\} \equiv \{(P_0, \vec{F}_1), (P_0, \vec{F}_2)\} \equiv \{(P_0, \vec{F}_1 + \vec{F}_2)\}.$$

Dani sistem sil smo reducirali na sistem z eno samo silo. Pravimo, da smo uspeli reducirati sistem sil na skupno prijemališče, saj je očitno $\vec{N}(\mathcal{F}, P_0) = \vec{0}$. Točki P_0 pravimo tudi redukcijska točka. Za grafični prikaz glej sliko.

Slika 1: Redukcija ravninskega sistema, levo $\vec{F}_1 \nparallel \vec{F}_2$, desno $\vec{F}_1 \parallel \vec{F}_2$.

Naj bosta sedaj sili vzporedni. Prepostavimo prvo, da sta sili enako usmerjeni. S principom o polznosti lahko dosežemo, da sta prijemališči poravnani, kaj več pa ne. Sedaj nam pride prav princip o uravnoteženem paru sil. Zapišimo

$$\mathcal{F} = \{(P_1, \vec{F}_1), (P_2, \vec{F}_2)\} \equiv \{(P_1, -\vec{F}_0), (P_1, \vec{F}_0), (P_1, \vec{F}_1), (P_2, \vec{F}_2)\},$$

kjer je F_0 poljubna sila. Ker sta prijemališči poravnani, glej sliko, je potem po principu o polznosti in seštevanju sil s skupnim prijemališčem

$$\mathcal{F} \equiv \{(P_1, \vec{F}_1 - \vec{F}_0), (P_2, \vec{F}_2 + \vec{F}_0)\}.$$

Dobili smo sistem dveh sil, ki nista vzporedni. Nosilki se sekata v točki P_0, glej skico. Potem je

$$\mathcal{F} \equiv \{(P_0, \vec{F}_1 + \vec{F}_2)\}.$$

Sistem sil ima tudi v tem primeru skupno prijemalšče. Izbor sile F_0 je bil poljuben. Kako njegov izbor vpliva na redukcijo na skupno prijemališče? Iz slike vidimo, da večja sila F_0 pomakne skupno prijemališče navzgor, manjša pa navzdol, obakrat v smeri rezultante $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Ta pomik ustreza polznosti sile, zato izbira velikosti sile nima vpliva na določitev redukcijske točke.

Poglejmo sedaj primer, so sta sili vzporedni in nasprotno usmerjeni. Postopamo tako kot v primeru, ko sta sili enakousmerjeni. Opazimo, da tudi sedaj dobimo skupno presečišče, ki pa se pomika v neskončnost, ko sta velikosti nasprotno usmerjenih sil vedno bolj enaki. Tako v primeru, ko je $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ sistem dveh sil nima skupnega prijemališča. Tak sistem sil

$$\mathcal{F} = \{(P_1, \vec{F}_1), (P_2, -\vec{F}_1)\}$$

je dvojica, saj je $\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{0}$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, P_1) \neq \vec{0}$. Povzamimo, ravninski sistem sil, ki ni dvojica lahko reduciramo na sistem z eno samo silo, ki je rezultanta sil s prijemališčem v redukcijski točki.

Dvojica

Dvojica je sistem sil $\mathcal{F}$, za katerega je $\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{0}$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, O) \neq \vec{0}$. Navor dvojice je neodvisen od pola. To sledi iz formule, ki pove, kako je navor sistema odvisen od pola. Na odvisnost navora od pola vpliva rezultanta sistema sil in če je rezultanta enaka nič, je potem navor neodvisen od pola. Potemtakem je za dvojico $\vec{N}(\mathcal{F}, O) \neq \vec{0}$ za vsak pol O. Sistem sil, ki je dvojica bomo v nadaljevanju označili z $\mathcal{D}$. Neodvisnost dvojice od pola dovoljuje, da dvojico $\mathcal{D}$, ki je sistem sil, identificiramo s pripadajočim navorom. Po tej identifikaciji $\mathcal{D} \equiv \vec{N}(\mathcal{D}, O)$, kjer je O poljubna točka. Ker je navor neodvisen od pola, pravimo, da je navor prosti vektor. Po drugi strani pa sila ni prosti vektor, ker je odvisna še od prijemališča.

Sistem sil $\mathcal{F} = \{(P_1, -\vec{F}), (P_2, \vec{F})\}$ je dvojica. Pokažimo sedaj, da lahko vsaki dvojici $\mathcal{D}$ priredimo tak ekvipolenten sitem sil. Določiti moramo prijemališči P_1 in P_2 in silo $\vec{F}$, da bo

$$\mathcal{D} = \vec{N}(\mathcal{F}, P_1) = \vec{P_1P_2} \times \vec{F}.$$

Izbira točke P_1 je poljubna, saj je dvojica neodvisna od pola. Ker je vektorski produkt dveh vektorjev vektor, ki je pravokoten na oba vektorja, je sila $\vec{F}$ pravokotna na $\mathcal{D}$, točko P_2 pa izberimo v taki smeri, da je vektor $\vec{P_1P_2}$ pravokoten ne samo na $\mathcal{D}$, ampak tudi na $\vec{F}$. Sedaj si lahko poljubno izberemo velikost sile $\vec{F}$ ali pa vektorja $\vec{P_1P_2}$. Preostalo velikost potem določimo iz enakosti

$$|\mathcal{D}| = \left|\vec{P_1P_2}\right| \left|\vec{F}\right|.$$

Orientacijo vektorja $\vec{P_1P_2}$ potem določa pravilo desnega vijaka za vektorski produkt. Dvojici $\mathcal{D}$ smo tako uspeli prirediti ekvipolentni sistem $\{(P_1, -\vec{F}), (P_2, \vec{F})\}$. Vidimo, da lahko pri tem poljubno izberemo silo $\vec{F}$ ali ročico $\vec{P_1P_2}$. Edini pogoj je, da sta izbiri pravokotni na $\mathcal{D}$.

Redukcijska točka in prestavitveni moment

Sedaj ko vemo, kako je z redukcijo ravninskega sistema dveh sil se vprašajmo, kdaj je redukcija na skupno prijemališče možna za poljubnen, bodisi ravninski ali prostorski sistem sil. V ta namen prvo definirajmo unijo dveh sistemov sil. Unija dveh sistemov sil $\mathcal{F}_1$ in $\mathcal{F}_2$ je unija, ki vsebuje vse pare prijemališče, sila obeh sistemov in je potemtakem tudi sistem sil. Očitno je

$$\vec{R}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) = \vec{R}(\mathcal{F}_1) + \vec{R}(\mathcal{F}_2), \qquad \vec{N}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2, O) = \vec{N}(\mathcal{F}_1, O) + \vec{N}(\mathcal{F}_2, O).$$

Unija dveh ravnovesnih sistemov je torej tudi ravnovesni sistem, unija dveh dvojic pa je dvojica ali pa ravnovesni sistem, saj je možno, da je $\vec{R}(\mathcal{F}_1) + \vec{R}(\mathcal{F}_2) = \vec{0}$, čeprav je $\vec{R}(\mathcal{F}_i) \neq \vec{0}$, $i = 1, 2$. Madalje, če je $\mathcal{F}_1$ poljubni sistem, $\mathcal{F}_2$ pa je ravnovesni sistem, je $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1$. Ravnovesni sistem sil zato lahko označimo tudi z znakom za prazno množico $\emptyset$, $\mathcal{F}_2 = \emptyset$.

Naj bo sedaj $\mathcal{F}$ poljubni sistem sil

$$\mathcal{F} = \{(P_1, \vec{F}_1), (P_2, \vec{F}_2), \ldots, (P_n, \vec{F}_n)\}.$$

Izberimo poljubno točko P_0. Po principu o uravnoteženem paru sil je

$$\mathcal{F} \equiv \{(P_0, \vec{F}_1), (P_0, -\vec{F}_1), (P_1, \vec{F}_1), (P_2, \vec{F}_2), \ldots, (P_n, \vec{F}_n)\}.$$

Par $\{(P_0, -\vec{F}_1), (P_1, \vec{F}_1)\}$ je sistem sil, ki je dvojica. Označimo jo z $\mathcal{D}_1$. Potem je

$$\mathcal{F} \equiv \mathcal{D}_1 \cup \{(P_0, \vec{F}_1), (P_2, \vec{F}_2), \ldots, (P_n, \vec{F}_n)\}.$$

Ponovno uporabimo princip o uravnoteženem paru sil, tokrat za silo $\vec{F}_2$,

$$\mathcal{F} \equiv \mathcal{D}_1 \cup \{(P_0, \vec{F}_1), (P_0, \vec{F}_2), (P_0, -\vec{F}_2), (P_2, \vec{F}_2), \ldots, (P_n, \vec{F}_n)\}.$$

Sedaj označimo z $\mathcal{D}_2$ dvojico $\{(P_0, -\vec{F}_2), (P_1, \vec{F}_2)\}$ Potem, uporabimo še princip o seštevanju sil s skupnim prijemališčem, dobimo

$$\mathcal{F} \equiv \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \{(P_0, \vec{F}_1 + \vec{F}_2), (P_3, \vec{F}_3), \dots, (P_n, \vec{F}_n)\}.$$

Postopek nadaljujemo. Po n korakih dobimo

$$\mathcal{F} \equiv \mathcal{D} \cup \{(P_0, \vec{F}_1 + \cdots + \vec{F}_n)\},$$

kjer je $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{D}_n$ unija dvojic in potemtakem tudi dvojica ali ravnovesni sistem sil.

Kaj smo dosegli? Obravnavajmo prvo primer, ko je $\mathcal{D}$ ravnovesni sistem sil. Potem je

$$\mathcal{F} \equiv \mathcal{D} \cup \{(P_0, \vec{F}_1 + \cdots + \vec{F}_n)\} \equiv \{(P_0, \vec{F}_1 + \cdots + \vec{F}_n)\} \equiv \{(P_0, \vec{R}(\mathcal{F}))\}.$$

Sistem sil smo reducirali na rezultanto sistema s prijemališčem v P_0. Dani sistem $\mathcal{F}$ ima tako v P_0 skupno prijemališče.

V primeru, ko je $\mathcal{D}$ dvojica pa je

$$\mathcal{F} \equiv \mathcal{D} \cup \{(P_0, \vec{R}(\mathcal{F}))\}.$$

Sistem $\mathcal{F}$ sedaj nima skupnega prijemališča v P_0. Če želimo sistem $\mathcal{F}$ nadomestiti z rezultanto s prijemališčem v P_0, moramo dodati dvojico oziroma navor $\mathcal{D}$. Navoru $\mathcal{D}$ pravimo premestitveni moment. Premestitveni moment je enak momentu sistema sil s polom v redukcijski točki, velja torej

$$\mathcal{D} = \vec{N}(\mathcal{F}, P_0) = \sum_{i=1}^{n} \vec{P_0 P_i} \times \vec{F}_i.$$

Skupno presečišče sistema sil

Sedaj iščemo redukcijsko točko, v kateri je premestitveni navor enak nič. Povedano drugače, iščemo skupno prijemališče sistema sil. Privzemimo, da ima dani sistem sil $\mathcal{F}$ skupno prijemališče. Označimo ga s P_0. Potem je $\vec{N}(\mathcal{F}, P_0) = \vec{0}$ in po formuli za odvisnost navora od pola

$$\vec{0} = \vec{N}(\mathcal{F}, P_0) = \vec{P_0 O} \times \vec{R}(\mathcal{F}) + \vec{N}(\mathcal{F}, O)$$

za poljubni pol O. Od tod, upoštevajmo, da je $\vec{OP_0} = -\vec{P_0 O}$, sledi

$$\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \vec{OP_0} \times \vec{R}(\mathcal{F}).$$

Vidimo, če obstaja skupno prijemališče sistema sil $\mathcal{F}$, je $\vec{R}(\mathcal{F}) \perp \vec{N}(\mathcal{F}, O)$ za vsak pol O. Pogoj, da sta vektorja $\vec{R}(\mathcal{F})$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, O)$ med seboj pravokotna je torej potrebni pogoj za obstoj skupnega presečišča. Pokažimo še, da je pogoj tudi zadostni, da iz veljavnosti pogoja sledi, da obstaja skupno presečišče. Izberimo poljubni pol O in sistemu sil priredimo ekvipolentni sistem

$$\mathcal{F} \equiv \vec{N}(\mathcal{F}, O) \cup \{(O, \vec{R}(\mathcal{F}))\}.$$

Ker je $\vec{N}(\mathcal{F}, O)$ pravokoten na $\vec{R}(\mathcal{F})$, lahko dvojico $\mathcal{D} = \vec{N}(\mathcal{F}, O)$ zapišemo v obliki

$$\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \{P_0, -\vec{R}(\mathcal{F})), (P_0, \vec{R}(\mathcal{F}))\}.$$

Potem je

$$\mathcal{F} \equiv \{O, -\vec{R}(\mathcal{F})), (P_0, \vec{R}(\mathcal{F}))\} \cup \{(O, \vec{R}(\mathcal{F}))\} = \{(P_0, \vec{R}(\mathcal{F}))\}.$$

Sistem sil ima tako skupno prijemališče v točki P_0. Kako P_0 izračunamo bomo videli v nadaljevanju.

Os sistema

Sedaj že vemo, da sistem sil nima skupnega prijemališča, če rezultanta navorov in sil nista pravokotna. Pokazali bomo, da v tem primeru obstaja redukcijska točka P_0 tako, da je potem rezultanta navorov s polom v P_0 vzporedna rezultanti sil. $\vec{N}(\mathcal{F}, P_0) \parallel \vec{R}(\mathcal{F})$. Naj bo $\mathcal{F}$ dani sistem sil. Označimo na kratko z $\vec{R} = \vec{R}(\mathcal{F})$ in $\vec{N} = \vec{N}(\mathcal{F}, O)$, kjer je O poljubno izbrani pol. Iščemo tako redukcijsko točko P_0, da je

$$\vec{N}(\mathcal{F}, P_0) = \left(\vec{P_0O} \times \vec{R} + \vec{N}\right) \parallel \vec{R}.$$

Enačba ne določa iskani P_0 enolično. To sledi iz principa o polznosti sile, $\vec{N}(\mathcal{F}, P_0)$ je neodvisen od pomika točke P_0 v smeri $\vec{R}$. Zgornjo enačbo pomnožimo vektorsko z $\vec{R}$. Potem je

$$\left(\vec{P_0O} \times \vec{R} + \vec{N}\right) \times \vec{R} = \vec{0}.$$

Uporabimo sedaj formulo $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$. Tako dobimo

$$\left(\vec{P_0O} \cdot \vec{R}\right) \vec{R} - \left(\vec{R} \cdot \vec{R}\right) \vec{P_0O} = -\vec{N} \times \vec{R}.$$

Izberimo tak P_0, da je $\vec{P_0O} \cdot \vec{R} = 0$. Potem je iskana redukcijska točka dana z enačbo

$$\vec{OP_0} = \frac{\vec{R} \times \vec{N}}{\left|\vec{R}\right|^2} = \frac{\vec{R}(\mathcal{F}) \times \vec{N}(\mathcal{F}, O)}{\left|\vec{R}(\mathcal{F})\right|^2}.$$

Premici skozi P_0 v smeri $\vec{R}(\mathcal{F})$ pravimo os sistema.

Veno, da ima sistem sil skupno prijemališče, če sta $\vec{R}(\mathcal{F})$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, O)$ med seboj pravokotna. Pokažimo, da v tem primeru skupno prijemališče leži na osi sistema. Res, z uporabo zgornej formule izračunajmo

$$\vec{N}(\mathcal{F}, P_0) = \vec{P_0O} \times \vec{R}(\mathcal{F}) + \vec{N}(\mathcal{F}, O) = \frac{(\vec{N} \times \vec{R}) \times \vec{R}}{\left|\vec{R}\right|^2} + \vec{N} = \vec{0},$$

saj je $(\vec{N} \times \vec{R}) \times \vec{R} = (\vec{N} \cdot \vec{R})\vec{R} - (\vec{R} \cdot \vec{R})\vec{N} = -\left|\vec{R}\right|^2 \vec{N}$. Dokazali smo, če ima sistem sil skupno prijemališče, leži to na osi sistema.

Invarianta sistema sil

Invarianta sistema sil je $I(\mathcal{F}) = \vec{R}(\mathcal{F}) \cdot \vec{N}(\mathcal{F}, O)$. V definiciji nastopa pol O. Hitro pa vidimo, da je definicija neodvisna od pola saj je

$$\vec{R}(\mathcal{F}) \cdot \vec{N}(\mathcal{F}, P_0) = \vec{R} \cdot \left(\vec{P_0O} \times \vec{R}(\mathcal{F}) + \vec{N}(\mathcal{F}, O)\right) = \vec{R}(\mathcal{F}) \cdot \vec{N}(\mathcal{F}, O),$$

saj je mešani produkt z dvema enakima faktorjema enak nič.

Poglejmo kaj nam pove invarianta sistema sil.

1. Naj bo $I(\mathcal{F}) = 0$. Potem imamo naslednje možnosti

   - Oba faktorja sta enaka nič, torej $\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{0}$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \vec{0}$. To pomeni, da je v tem primeru $\mathcal{F}$ ravnovesni sistem sil.

- Ena faktor je enak nič, recimo $\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{0}$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, O) \neq \vec{0}$. Sistem sil je dvojica.
- Naj bo sedaj $\vec{R}(\mathcal{F}) \neq \vec{0}$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \vec{0}$. Sistem sil ima skupno prijemališče v O.
- Oba faktorja sta neničelna vektorja. Potem iz $I(\mathcal{F}) = 0$ sledi, da sta $\vec{R}(\mathcal{F})$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, O)$ med seboj pravokotna. Vemo, da ima tudi v tem primeru sistem sil skupno prijemališče.

2. $I(\mathcal{F}) \neq 0$. Sistem sil nima skupnega prijemališča. Pravimo, da je *dinama*. V tem primeru obstaja redukcijska točka P_0, da sta $\vec{R}(\mathcal{F})$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, P_0)$ med seboj vzporedna. Tak par povzroči vijačno gibanje.

Primeri

Sistem vzporednih sil

Poglejmo si prvo sistem vzporednih sil. To je sistem

$$\mathcal{F} = \{(P_1, \vec{F_1}), (P_2, \vec{F_2}), \ldots, (P_n, \vec{F_n})\},$$

kjer so vse sile $\vec{F_i}$ med seboj vzporedne, velja torej $\vec{F_i} = m_i \vec{g}$ za števila m_i in vektor $\vec{g}$. Rezultanti sistema sta

$$\vec{R}(\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{g} \quad \text{in} \quad \vec{N}(\mathcal{F}, O) = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{OP_i} \times \vec{g}.$$

Potem je očitno $I(\mathcal{F}) = 0$ in če sistem ni dvojica, ima sistem skupno prijemališče. Vemo, da je skupno prijemališče na osi sistema, vendar ga v tem posebnem primeru določimo direktno. Iščemo torej tako točko, da je

$$\vec{N}(\mathcal{F}, P_0) = \vec{P_0O} \times \vec{R}(\mathcal{F}) + \vec{N}(\mathcal{F}, O) = \vec{0}.$$

Enačbo z desne pomnožimo vektorsko z $\vec{g}$. Potem je natanko, do pomika v smeri $\vec{R}(\mathcal{F})$,

$$\vec{0} = -(\vec{R}(\mathcal{F}) \cdot \vec{g})\vec{P_0O} + \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{OP_i} \times \vec{g} \right) \times \vec{g}.$$

Upoštevajmo, da je $\vec{R}(\mathcal{F}) \parallel \vec{g}$. Do pomika do pomika v smeri $\vec{R}(\mathcal{F})$ je tako

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{P_0O} |\vec{g}|^2 - \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{OP_i} |\vec{g}|^2$$

in od tod

$$\vec{OP_0} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{OP_i}.$$

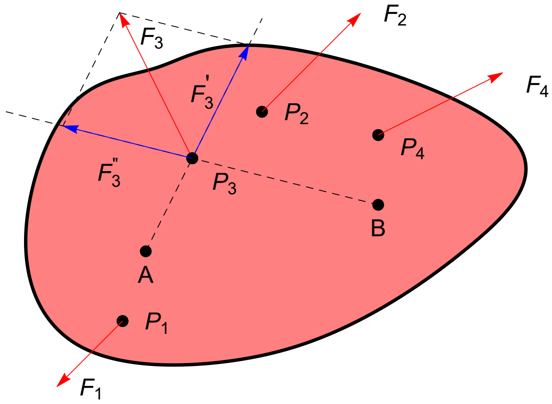
V posebnem primeru, ko je $m_i > 0$ je skupno prijemališče natanko v masnem središču mas m_i, ki imajo položaje P_i.

Redukcija na dve ali tri točke

Pokažimo še, da lahko ravninski(prostorski) sistem sil vedno reduciramo na dve(tri) sile, ki imajo poljubno izbrana prijemališča. Poglejmo prvo ravninski sistem. Naj bo dani sistem

$$\mathcal{F} = \{(P_1, \vec{F_1}), (P_2, \vec{F_2}), \ldots, (P_n, \vec{F_n})\}.$$

Izberimo poljubni dve točki A in B, ki ležita v ravnini prijemališč oziroma sil. Začnimo s silo $(P_1, \vec{F}_1)$. Če je slučajno P_1 na premici, ki gre skozi A in B, premaknimo P_1 v smeri $\vec{F}_1$, da premaknjeno prijemališče ne bo ve"na tej premici. To lahko vedno storimo, če le $\vec{F}_1$ ni v smeri te premice. Če slučajno je, potem lahko po principu o polznosti $(P_1, \vec{F}_1)$ takoj premaknemo v A ali pa v B. Naj bo torej $\vec{F} \not\parallel \vec{AB}$. Potem iz P_1 potegnemo poltraka v smeri A in B. Silo $\vec{F}_1$ lahko potem zapišemo kot vsoto dveh sil, ki imata smeri teh dveh poltrakov. Te dve sili po polznosti premaknemo v A in B in s tem smo $(P_1, \vec{F}_1)$ uspeli reducirati na dve sili s prijemališčema v A in B. Enak postopek naredimo še za vse preostale sile.



Slika 2: Redukcija ravninskega sistema sil na dve točki. Silo $\vec{F}_3$ razstavimo na komponenti v smeri vektorjev $\vec{AP_3}$ in $\vec{BP_3}$ in jih po polznosti premaknemo v A in B.

Podoben postopek naredimo v prostorskem primeru. Razlika je le v tem, da sedaj potegnemo tri poltrake.