

Predavanja 20. maja 2020

## Prostorska temperaturna deformacija

Sprememba temperature za  $\Delta T$  v izotropičnem materialu, v katerem je odziv v vse smeri enak, povzroči deformacijo

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \alpha \Delta T \underline{\underline{i}}. \quad (1)$$

Koeficintu  $\alpha$  pravimo koeficient termalnega raztezka in ga že poznamo iz obravnave enoosne deformacije. Deformacijo smo opisali z infinitezimalnim deformacijskim tenzorjem, saj je deformacija za katero velja ta zveza za dopustne spremembe temperature majhna. Ker je deformacijski tenzor deformacije (1) sferičen, deformacija ne spreminja kotov. Krogla se skrči ali raztegne v kroglo. Sprememba temperature v prostem materialu ne povzroči napetost. Do napetosti pride, če se material ne more prosto skrčiti ali razširiti. Poglejmo to na primeru.

Elastična izotropična kocka je vložena v togi material. Določiti moramo napetost v kocki, če se kocka segreje za  $\Delta T$ . Prost kocka bi se prosto razširila, ker pa ni prosta, sprememba temperature povzroči elastično napetost, ta pa elastično deformacijo. Deformacija kocke je tako vsota termalne in elastične deformacije. Velja torej

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}}_E + \underline{\underline{\epsilon}}_T,$$

kjer je  $\underline{\underline{\epsilon}}_E$  elastična deformacija,  $\underline{\underline{\epsilon}}_T$  pa je termalna deformacija dana z  $\underline{\underline{\epsilon}} = \alpha \Delta T \underline{\underline{i}}$ . Ker je kocka vložena v togi material, ki se ne deformira, je skupna deformacija  $\underline{\underline{\epsilon}}$  enaka nič. Potemtakem je

$$\underline{\underline{\epsilon}}_E = -\alpha \Delta T \underline{\underline{i}}.$$

Sedaj, ko poznamo deformacijo, napetost izračunamo po Hookovem zakonu

$$\begin{aligned} \underline{\underline{t}} &= \frac{E}{1+\nu} \underline{\underline{\epsilon}}_E + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{sl} \underline{\underline{\epsilon}}_E \underline{\underline{i}} \\ &= -\alpha \left( \frac{E}{1+\nu} + \frac{3\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right) \Delta T \underline{\underline{i}} \\ &= -\frac{\alpha E}{1+\nu} \Delta T \underline{\underline{i}} = -2\alpha G \Delta T \underline{\underline{i}}. \end{aligned}$$

Napetostno stanje je hidrostatično. Za primer izračunajmo tlak za aluminij za katerega je  $E = 69 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.35$ ,  $\alpha = 23.1 \times 10^{-6} 1/\text{K}$ , ki ga segrejemo za  $10 \text{ K}$ . Za te vrednosti je

$$2\alpha G \Delta T = 11.8 \text{ MPa}.$$

## Hookov zakon za ravninsko deformacijo in napetost

Hookov zakon za izotropični material je

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{t}} - \frac{\nu}{E} \text{sl} \underline{\underline{t}} \underline{\underline{i}}. \quad (2)$$

Za ravninsko napetostno stanje se (2) po komponentah glasi

$$\begin{aligned}e_{11} &= \frac{1}{E}t_{11} - \frac{\nu}{E}t_{22}, \\e_{22} &= -\frac{\nu}{E}t_{11} + \frac{1}{E}t_{22}, \\e_{12} &= \frac{1+\nu}{E}t_{12} = \frac{1}{2G}t_{12}, \\e_{33} &= -\frac{\nu}{E}(t_{11} + t_{22}), \\e_{23} &= e_{13} = 0.\end{aligned}$$

Rezultirajoča deformacija v splošnem ni ravninska, člen  $e_{33}$  je lahko neničelen. V primeru ravninske deformacije lahko kljub temu na (2) gledamo kot na Hookov zakon, kjer so vsi tenzorji ravninski in pripadajoče matrike dimenzije  $2 \times 2$ . Komponenta  $e_{33}$  ne vpliva na napetostno stanje.

Poglejmo si še ravninsko deformacijo. Iz (2) sledi

$$\begin{aligned}e_{11} &= \frac{1}{E}t_{11} - \frac{\nu}{E}t_{22} - \frac{\nu}{E}t_{33}, \\e_{22} &= -\frac{\nu}{E}t_{11} + \frac{1}{E}t_{22} - \frac{\nu}{E}t_{33}, \\0 &= -\frac{\nu}{E}t_{11} - \frac{\nu}{E}t_{22} + \frac{1}{E}t_{33}, \\e_{12} &= \frac{1+\nu}{E}t_{12} = \frac{1}{2G}t_{12}, \\e_{23} &= e_{13} = 0.\end{aligned}$$

Iz tretje enačbe izrazimo  $t_{33} = \nu(t_{11} + t_{22})$  in vstavimo v prvo. Dobimo

$$e_{11} = \left(\frac{1}{E} - \frac{\nu^2}{E}\right)t_{11} - \left(\frac{\nu}{E} + \frac{\nu^2}{E}\right)t_{22} = \frac{1-\nu^2}{E}t_{11} - \frac{\nu(1+\nu)}{E}t_{22}.$$

Označimo

$$\frac{1}{E'} = \frac{1-\nu^2}{E} \quad \text{in} \quad \nu' = \frac{\nu}{1-\nu}. \quad (3)$$

Potem je

$$e_{11} = \frac{1}{E'}t_{11} - \frac{\nu'}{E'}t_{22} \quad (4)$$

in podobno

$$e_{22} = -\frac{\nu'}{E'}t_{11} + \frac{1}{E'}t_{22}. \quad (5)$$

Direktni račun pokaže, da je

$$\frac{1+\nu'}{E'} = \frac{1+\nu}{E}$$

in potemtakem tudi

$$e_{12} = \frac{1+\nu'}{E'}t_{12}. \quad (6)$$

Enačbe (4), (5) in (6) so prav take enačbe kot za ravninsko deformacijo, le namesto konstant  $E$  in  $\nu$  sedaj nastopajo  $E'$  in  $\nu'$ . Potemtakem lahko naloge ravninske napetosti in deformacije enotno obravnavamo, pri ravninski napetosti nastopajo dejanski materialni parametri, pri ravninski deformaciji pa modificirani (3).

## Upogib ravninskega nosilca

Nosilce smo že obravnavali. Spoznali smo notranje količine, osno in prečno silo ter upogibni moment. V okviru statike smo te količine definirali kot rezultante vpliva desnega dela nosilca na levi del vzdolž navideznega prereza nosilca. Sedaj vemo, da je ta vpliv posledica površinskih sil na preseku. Gostota površinskih sil je napetost, ki jo z deformacijo povezuje Hookov zakon. Naš namen je sedaj povezati prej spoznane notranje količine z deformacijo in napetostjo.

Omejili se bomo na ravninske nosilce. To pomeni, da ima nosilec v smeri, ki je pravokotna na to ravnino konstantno debelino, ki ne vpliva na mehanski odziv nosilca. V skladu s to omejitvijo bomo predpostavili, da je nosilec simetričen glede na to ravnino. Koordinatni sistem potem postavimo tako, da je ta ravnina ravnina  $xz$ , nosilec je v smeri osi  $x$ , normala na ravnino pa kaže v smeri osi  $y$ . Dodatno bomo predpostavili, da je nosilec v referenčnem položaju simetričen tudi glede na ravnino  $xy$ . Ker želimo, da je nosilec tudi v deformiranem položaju ravninski nosilec, ga ne smemo obremeniti izven ravnine in bomo zato predpostavili, da so vse obremenitve nosilca v ravnini  $xz$ . Dodatno se bomo omejili na obremenitve v prečni smeri. Nalogo, kjer je nosilec obremenjen hkrati tudi v osni smeri rešimo v dveh korakih. Obremenitev razstavimo na prečno in osno obremenitev. Potem rešimo nalogo za vsako obremenitev posebej in rešitvi seštejemo. To lahko storimo, ker sta obe nalogi linearni in je potemtakem vsota rešitev rešitev naloge z vsoto obremenitev.

Vsak ravninski presek nosilca z ravnino  $yz$  ima geometrijsko središče. To je točka, ki jo dobimo na enak način kot masno središče lika, ki ima konstantno gostoto. Osi, ki povezuje geometrijska središča vzdolž dolžine nosilca pravimo *centralna os*. Koordinatni sistem bomo postavili tako, da se v nedeformiranem položaju centralna os ujema z osjo  $x$ .

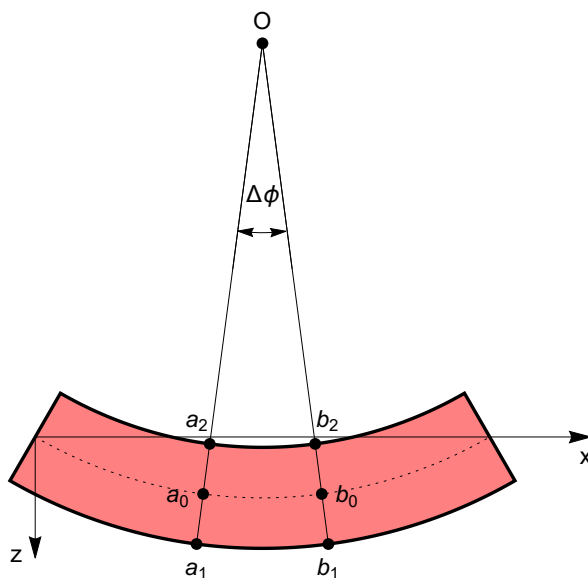
Slika 1 shematsko kaže upogib nosilca. Opazimo, da se pri upogibu nekatera vlakna podaljšajo, nekatera pa skrčijo. Konkretno, na sliki se spodnji lok podaljša, zgornji lok pa skrajša. To pomeni, da v nekem vmesnem položaju ni spremembe dolžin. Vlaknu, ki pri deformaciji ne spremeni dolžino pravimo *nevtralna os*. Privzeli bomo, da se v referenčnem položaju koordinatna os  $x$  ujema z nevtralno os.

Omejili se bomo na majhne deformacije, konkretno, privzeli bomo, da se ravni preseki nosilca, ki so v referenčnem položaju pravokotni na nevtralno os pri deformaciji deformirajo v ravne preseke, ki so pravokotni na deformirano nevtralno os v deformiranem položaju, glej sliko 1. Predpostavili bomo tudi, da v ravninah presekov ni deformacij. Deformacija nosilca je tako v bistvu dana z deformacijo nevtralne osi. Za homogeni nosilec bomo dodatno zahtevali, da se pri deformaciji centralna os ujema z nevtralno. Kaj naj velja za nosilec, ki nima homogenih materialnih lastnosti bomo še spoznali.

Za boljši pregled, bomo vse predpostavke zapisali na enem mestu.

- Dolžina nosilca je bistveno večja od lateralnih dimenzij.
- Nosilec je simetričen glede na ravnino  $xz$ .
- Za homogeni nosilec se nevtralna se ujema s centralna os.
- Ravnine pravokotne na nevtralno os v referenčni legi se deformirajo v ravnine, ki so pravokotne na deformirano nevtralno os.
- V ravninah, ki so pravokotne na nevtralno ni deformacij.

Teorija nosilcev, ki temelji na teh predpostavkah se imenuje *inženirska teorija nosilcev*. Pomen teh predpostavk bomo spoznali v nadaljevanju.



Slika 1: Upogib nosilca, nevtralna os je označena črtkano.

## Enoosna deformacija vlaken

Izpeljali bomo enačbo za enoosno deformacijo vlaken. Slika 1 prikazuje del nosilca v deformiranem položaju. V referenčnem položaju naj ima nosilec obliko pravokotnika. Označenim točkam na sliki v referenčnem položaju pripadajo točke označene z velikimi črkami. Vsa vlakna  $A_0B_0$ ,  $A_1B_1$  in  $A_2B_2$  imajo v referenčnem položaju enako dolžino, v deformiranem pa je dolžina vlakna  $a_2b_2$  krajša,  $a_1b_1$  daljša,  $a_0b_0$  pa nespremenjena, saj vlakno  $A_0B_0$  leži na nevtralni osi. Relativna sprememba dolžine vlakna  $A_iB_i$ ,  $i = 1, 2$  je enaka

$$\epsilon = \frac{|a_1b_1|}{|A_1B_1|} - 1 = \frac{|a_1b_1|}{|a_0b_0|} - 1. \quad (7)$$

V zadnji enakosti smo upoštevali, da je  $|A_1B_1| = |A_0B_0| = |a_0b_0|$ . Označimo z  $R$  razdaljo  $|Oa_0|$ . V referenčnem koordinatnem sistemu smo postavili koordinatni sistem z osjo  $x$  v smeri nevtralne osi, os  $z$  pa smo usmerili navzdol. Točka  $A_1$  ima  $z$  koordinato  $z_1 > 0$ , točka  $A_2$  pa  $z_2 < 0$ . Ker v ravnini preseka ni deformacij, je točka  $a_1$  oddaljena od  $a_0$  za  $z_1$ , točka  $a_2$  pa za  $z_2$ .

Iz slike 1 vidimo, da je  $|a_0b_0| = |Oa_0| \Delta\phi = R\Delta\phi$  in  $|a_0b_0| = (R + z_1)\Delta\phi$ . Potem iz (7) sledi

$$\epsilon = \frac{|a_1b_1|}{|a_0b_0|} - 1 = \frac{R + z_1}{R} - 1 = \frac{z_1}{R}. \quad (8)$$

Enačba (8) velja za poljubno točko nosilca, kjer  $z_1$  postane  $z$  koordinata točke.

Enoosno deformacijo povezuje Hookeov zakon z enosno napetostjo. Iz (8) tako dobimo za poljubno točko osno napetost  $\sigma$  v smeri vlakna. Napetost v točki, ki ima v referenčnem položaju  $z$  koordinato  $z$  je

$$\sigma = E\epsilon = z \frac{E}{R}. \quad (9)$$

## Upogibni moment

Sedaj, ko poznamo osno napetost poskusimo izraziti upogibni moment z deformacijo. Naj bo  $A(x)$  pravokotni presek na nevtralno os v deformiranem položaju. V vsaki točki preseka deluje napetost

dana s formulo (9) v smeri normale na presek. Ta napetost je gostota površinske sile na presek. Označimo z  $\vec{i}'$  normalo na presek  $A(x)$ . Nadalje naj bo  $\vec{j}' = \vec{j}$  in  $\vec{k}' = \vec{i}' \times \vec{j}'$ . Iz predpostavke, da preseki na nevtralno os po deformaciji ostanejo pravokotni na deformirano nevtralno os sledi, da presek  $A(x)$  leži v ravnini baznih vektorjev  $\vec{j}'$  in  $\vec{k}'$ . Izhodišče koordinatnega sistema z bazo  $\vec{i}'$ ,  $\vec{j}'$  in  $\vec{k}'$  postavimo v geometrijsko središče preseka, torej na nevtralno os.

Pokažimo prvo, da je površinska sila na preseku  $A = A(x)$  enaka nič. Izračunajmo

$$\int_A \sigma \vec{i}' dA = \frac{E}{R} \int_A z dA \vec{i}' = \vec{0}. \quad (10)$$

V zadnji enakosti smo upoštevali, da je integral enak nič, saj gre centralna os skozi koordinatno izhodišče. Dobljeni rezultat se ujema s predpostavko, da nosilec ni obremenjen v osni sili.

Sedaj izračunajmo še upogibni moment  $\vec{M} = \vec{M}(x)$ . Ker je površinska sila enaka nič, je upogibni moment neodvisen od izbire pola. Za pol izberimo kar koordinatno izhodišče. Tako je

$$\vec{M} = \int_A (y\vec{j}' + z\vec{k}') \times \sigma \vec{i}' dA = \frac{E}{R} \int_A (-zy\vec{k}' + z^2\vec{j}') dA.$$

Zaradi  $xz$  zrcalne simetrije preseka je

$$\int_A zy dA = 0.$$

Potemtakem je

$$\vec{M} = \frac{E}{R} \int_A z^2 dA \vec{j}' = \frac{EI}{R} \vec{j}, \quad (11)$$

kjer smo upoštevali, da je  $\vec{j}' = \vec{j}$  in označili

$$I = \int_A z^2 dA. \quad (12)$$

Izrazu  $I$  pravimo *ploskovni moment* preseka drugega reda  $A$  okrog osi  $y$ . Iz izpeljave vidimo, da je upogibni moment v smeri osi  $y$ , ker je nosilec simetričen glede na ravnini  $xy$  in  $xz$ . Formuli (11) pravimo *Euler-Bernoullijeva enačba*.

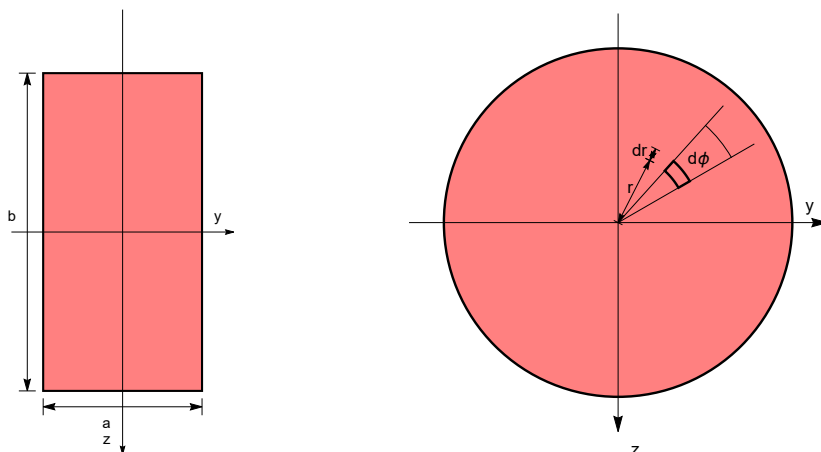
Če kombiniramo enačbi (9) in (11) dobimo pomembno formulo

$$\sigma = \frac{M}{I} z, \quad (13)$$

ki povezuje osno napetost z upogibnim momentom. Vidimo, da z velikostjo upogibnega momenta narašča osna napetost. Kako hitro narašča je odvisno od momenta  $I$ . Ploskovni moment preseka je zato pri obravnavi nosilcev zelo pomembna količina. Opazimo tudi, da je napetost največja/najmanjša na robu preseka, kjer je  $z$  ekstremalen.

## Ploskovni moment

Ploskovni moment drugega reda ravninskega preseka bom na kratko imenovali kar ploskovni moment. Iz definicije (12) vidimo, da je dimenzija ploskovnega momenta enaka  $m^4$ . Ker je moment integral kvadrata  $z$  koordinate, je očitno odvisen od postavitve koordinatnega sistema. Kako je odvisen, bomo spoznali v kratkem. Ploskovne momente tipičnih presekov lahko najdemo v literaturi. Kljub temu pa je koristno, če jih za enostavne preseke znamo sami izračunati. Za primer bomo izračunali ploskovni moment pravokotnega in krožnega preseka.



Slika 2: Ploskovna preseka. Levo: pravokotni, desno: krožni.

Pravokotni presek dimenzije  $a \times b$  je shematsko prikazan na levi sliki slike 2. Tu smo koordinatno os  $z$  usmerili navzdol, kot smo navajeni pri nosilcih. Ploskovni element v kartezičnih koordinatah  $yz$  je  $dA = dydz$ . Potem je

$$I = \int_A z^2 dA = \int_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a} dy \int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} z^2 dz = 2a \int_0^{\frac{1}{2}b} z^2 dz = \frac{2a}{3} z^3 \Big|_0^{\frac{1}{2}b} = \frac{ab^3}{12}. \quad (14)$$

Pri izračunu smo ploskovni integral petvorili v dvakratni integral, en integral po  $y$ , drugi pa po  $z$ . Pri izračunu integrala po  $z$  smo upoštevali, da je funkcija  $z^2$  soda. Iz formule za ploskovni moment pravokotnika vidimo pomembno lastnost, visoki nosilci, velik  $b$  v primerjavi z  $a$  ima velik ploskovni moment. Ta narašča s tretjo potenco višine nosilca. Dvakrat višji nosilec ima osemkratno večji moment.

Izračunajmo še ploskovni moment krožnega preseka, glej desno sliko slike 2. Za izračun integrala bomo uporabili polarne koordinate  $r$  in  $\phi$ . Tu je  $\phi$  kot, ki ga radij vektor do točke s koordinatama  $(y, z)$  oklepa z osjo  $y$ . V polarnih koordinatah je ploskovni moment enak  $dA = r dr d\phi$ , glej sliko, kjer je označen ploskovni element. Potem je

$$I = \int_A z^2 dA = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{r_0} z^2 r dr.$$

Upoštevajmo, da je  $z = r \sin \phi$ . Potem je

$$I = \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi d\phi \int_0^{r_0} r^3 dr.$$

Očitno je

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \phi d\phi = \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi$$

in ker je  $\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$ , je

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \phi d\phi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) d\phi = \pi.$$

Potem je

$$I = \pi \int_0^{r_0} r^3 dr = \frac{\pi}{4} r^4 \Big|_0^{r_0} = \frac{\pi}{4} r_0^4.$$

Pri konstrukciji nosilcev je zaželjeno, da je ploskovni moment čim večji. Seveda primerjamo preseke, ki imajo enako ploščino, saj ima v nasprotnem primeru presek z večjo površino prednost. V zvezi s tem je zanimivo vprašanje, kdo ima večji ploskovni moment, kvadrat ali krog. Poglejmo. Ploščina je predpisana, potem je  $a^2 = A_0$  in  $\pi r_0^2 = A_0$ . Izrazimo ploskovna momenta kvadrata  $I_a$  in kroga  $I_r$  s površino. Velja

$$I_a = \frac{1}{12}a^4 = \frac{1}{12}A_0^2 \quad \text{in} \quad I_r = \frac{\pi}{4}r_0^4 = \frac{1}{4\pi}A_0^2.$$

Ker je  $4\pi > 12$ , ima kvadrat večji ploskovni moment.

Ker v definiciji ploskovnega momenta integriramo funkcijo  $z^2$  integralu več prinesejo deli preseka, ki so bolj oddaljeni od osi  $y$  oziroma je njihova  $z$  koordinata po absolutni vrednosti večja. Tako je smiselno namesto polnih nosilcev uporabiti votle nosilce. Pri izračunu ploskovnega momenta votlega nosilca uporabimo naslednjo lastnost. Naj bosta  $\Omega_1$  in  $\Omega_2$  dva preseka, ki se ne prekrivata. Potem iz lastnosti integrala sledi, da je

$$I(\Omega_1 \cup \Omega_2) = I(\Omega_1) + I(\Omega_2). \quad (15)$$

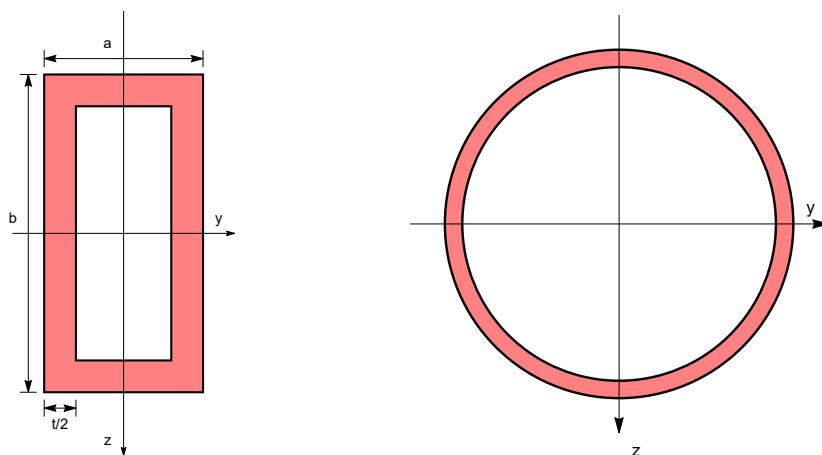
Tu smo z  $I(\Omega)$  označili ploskovni moment preseka  $\Omega$ . Velja pa še ena lastnost. Naj bo  $\Omega_1 \subset \Omega_2$ . Označimo razliko množic

$$\Omega_2 \setminus \Omega_1 = \{\omega : \omega \in \Omega_2 \quad \text{in} \quad \omega \notin \Omega_1\}.$$

Potem je

$$I(\Omega_2 \setminus \Omega_1) = I(\Omega_2) - I(\Omega_1). \quad (16)$$

Te dve lastnosti pogostokrat uporabimo pri računanju ploskovnih momentov. Pri tem se lahko spomnemo, da podobna lastnost velja za računanje masnih središč likov z izrezi.



Slika 3: Ploskovna preseka. Levo: votli pravokotni, desno: votli krožni.

Formulo bomo uporabili za izračun votlega pravokotnega in krožnega preseka, glej sliko 3. Začnimo z votlim pravokotnim, glej levo sliko na sliki 3. Pravokotniku  $a \times b$  smo simetrično izrezali pravokotnik  $(a - t) \times (b - t)$ . Če je  $t$  majhen, smo dobili tankostenski pravokotni presek. Ker ima izrezan pravokotnik enako središče kot večji pravokotnik, smemo takoj uporabiti formulo (16). Kasneje bomo spoznali, kaj moramo prej še narediti, če pravokotnika nimata enakega središča. Po formuli (16) je ploskovni presek votlega kvadratnega preseka enak

$$I = \frac{ab^3}{12} - \frac{(a-t)(b-t)^3}{12}.$$

V primeru tankostenskega preseka je  $t$  v primerjavi z  $a$  in  $b$  majhen. Če zanemarimo člene ki so sorazmerni s  $t^2$  in višjimi potenami, ploskovni moment aproksimiramo z

$$I \approx \frac{1}{12}(ab^3 - ab^3 + tb^3 + 3ab^2t) = \frac{tb^2}{12}(b + 3a).$$

Za votli krožni presek, ponovno predpostavimo, da ima krožni izrez s plmerom  $r_0 - t$  enako središče kot zunanji, je

$$I = \frac{\pi}{4}(r_0^4 - (r_0 - t)^4).$$

Za tankostenski krožni izrez,  $t \ll r_0$ , aproksimiramo

$$I \approx \frac{\pi}{4}(r_0^4 - r_0^4 + r_0^3t) = \frac{\pi r_0^3 t}{4}. \quad (17)$$

Izpeljali smo dovolj teorije, da si lahko pogledamo pomembno uporabo. Enostavno podprti nosilec dolžine  $l = 1$  m s tankostenskim krožnim presekom z zunanjim polmerom 4 cm je točkovno obremenjen s silo  $F = 2$  kN na svoji polovici. Naša naloga je, da določimo minimalno debelino preseka, da bo osna napetost v nosilcu pod dopustno vrednostjo  $\sigma_0 = 120$  MPa.

Iskano debelino bomo določili z uporabo formule (13). Nalogo bomo rešili v dveh korakih, prvo bomo izračunali maksimalno vrednost upogibnega momenta. Nato bomo v formulo (13) vstavili moment tankostenskega preseka in določili njegovo debelino. Iz obravnave nosilcev poznamo maksimalno vrednost upogibnega momenta za točkovno obremenjen nosilec, ki je enostavno podprt. Maksimalna vrednost upogibnega momenta je  $M_{\max} = \frac{1}{4}lF$ . Tu smo predpostavili, da je nosilec obremenjen navzdol oziroma, da je  $F > 0$ . Po formuli (13) je osna napetost odvisna od  $z$  koordinate. Največja vrednost je potem dosežena pri največjem  $z$ , to je na robu. Tako je

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I} z_{\max} = \frac{lF}{4I} r_0.$$

V dobljen izraz vstavimo formulo (17) za ploskovni moment tankostenskega krožnega preseka. Potem je

$$\sigma_{\max} = \frac{lF}{\pi r_0^3 t} r_0 = \frac{lF}{\pi r_0^2 t}.$$

Veljati mora  $\sigma_{\max} < \sigma_0$ . Od tod dobimo pogoj

$$t > \frac{lF}{\pi r_0 \sigma_0} = 3.3 \text{ mm}.$$

Vidimo, da je iskana debelina v primerjavo s polmerom  $r_0$  dovolj majhna, da velja tankostenski približek. Če približka ne bi uporabili, bi dobili enačbo, ki jo ne bi znali rešiti samo numerično.

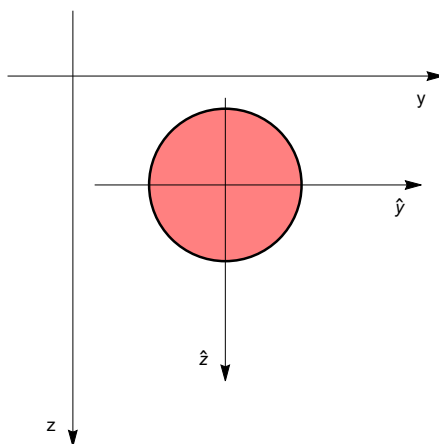
Kot rečeno, je pravkar rešena naloga pomembna naloga pri dizajniranju nosilca. Dimenzije nosilca, dolžino in geometrične lastnosti preseka moramo določiti tako, da osna sila ostane v predpisanih mejah. V splošnem se lahko presek nosilca vzdolž njegove dolžine spreminja. Ker to nalogo precej uteži, se bomo omejili na nosilec s konstantnim presekom. Naloge se lotimo po korakih.

- Prvo moramo določiti potek upogibnega momenta  $M(x)$  in poiskati, kje upogibni moment doseže ekstremalne vrednosti.
- Za izbrano obliko nosilca moramo potem izračunati ploskovni moment in poiskati točke na preseku, kje je  $z$  koordinata ekstremalna.
- Izračunane ekstremalne vrednosti vstavimo v formulo (13) iz katere potem ugotovimo, ali so napetosti za izbrano obliko in dimenzija nosilca v predpisanem območju.

Prvi korak že dobro poznamo od prej. Za drugi korak, izračun ploskovnega momenta pa še nismo povedali dovolj. Pri izračunu votlega pravokotnega preseka smo privzeli, da ima izrez enako središče kot zunanji del. Povedati moramo še, kaj naredimo, če ta pogoj ni izpolnjen. V ta namen si pogledimo, kako je ploskovni moment odvisen od postavitve koordinatnega sistema.



## Izrek o paralelnih oseh



Slika 4: Paralelna koordinatna sistema.

Ploskovni moment osnovnih likov praviloma poznamo v koordinatnem sistemu, ki ima središče v središču lika. Če je presek sestavljen iz večih osnovnih likov, moramo vse ploskovne momente teh likov zapisati v koordinatnem sistemu, ki ima izhodišče v središču preseka. To pomeni, da potrebujemo pravilo, ki nam zapis ploskovnega momenta iz enega koordinatnega sistema prevede na zapis v drugem koordinatnem sistemu. Pri tem se bomo omejili na koordinatna sistema, ki imata vzporedne koordinatne osi, razlikujeta se samo v izhodišču. Iskanemu pravilu pravimo izrek o paralelnih oseh.

Slika 4 kaže dva koordinatna sistema. Koordinatni sistem  $y'z'$  ima izhodišče v središču lika. V tem koordinatnem sistemu je ploskovni moment enak  $I'$ . Koordinatni sistem  $yz$  ima izhodišče v drugi točki, osi pa ima enako usmerjen kot prvi. Splošnega primera, ko so smeri koordinatnih sistemov različne ne bomo obravnavali. V koordinatnem sistemu  $yz$  ima središče lika koordinati  $y_*$  in  $z_*$ . Zveza med koordinatama poljubne točke je

$$z = z_* + z'.$$

V koordinatnem sistemu  $yz$  je moment enak

$$I = \int_A z^2 dA = \int_A (z_* + z')^2 dA = z_*^2 \int_A dA + 2z_* \int_A z' dA + \int_A z'^2 dA.$$

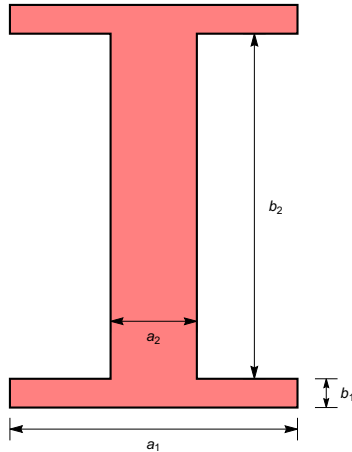
V drugem in tretjem integralu smo  $z_*$  zapisali pred integral, ker je  $z_*$  konstanta. Upoštevajmo, da je

$$\int_A dA = |A| \quad \text{in} \quad \int_A z' dA = 0,$$

saj je v koordinatnem sistemu  $y'z'$  središče lika v izhodišču tega koordinatnega sistema. Tako dobimo

$$I = z_*^2 |A| + I'. \quad (18)$$

Za primer uporabe izreka o paralelnih oseh bomo izračunali ploskovni moment preseka I nosilca, glej sliko 5. Lik je sestavljen iz treh pravokotnikov, spodnji in zgornji pravokotnik in pokončno postavljen pravokotnik. Koordinatni sistem postavimo v središče preseka I. Pokončno postavljen pravokotnik ima masno središče kar v koordinatnem izhodišču,  $z$  koordinata središča spodnjega



Slika 5: I nosilec.

oziroma zgornjega pravokotnika pa je  $\frac{1}{2}(b_1 + b_2)$  oziroma  $-\frac{1}{2}(b_1 + b_2)$ . Potem je po formuli (14) in (18)

$$I = \frac{a_2 b_2^3}{12} + 2 \left( \frac{1}{4} (b_1 + b_2)^2 a_1 b_1 + \frac{a_1 b_1^3}{12} \right) = \frac{a_2 b_2^3}{12} + \frac{1}{2} (b_1 + b_2)^2 a_1 b_1 + \frac{a_1 b_1^3}{6}.$$

Tu smo upoštevali, da sta spodnji in zgornji trikotnik enaka in da v (18) nastopa  $z$  koordinata središča s kvadratom. Če je  $b_1$  v primerjavi z  $a_1$  in  $b_2$  majhen, lahko uporabimo aproksimacijo

$$I \approx \frac{a_2 b_2^3}{12} + \frac{1}{2} a_1 b_1 b_2^2.$$

V praksi pogostokrat srečamo I nosilce. Zaradi svoji višine  $b_2$  imajo velik moment. Spodnji in zgornji trikotnik sta dodana zaradi stabilnosti. Visoki in tanki pravokotnik ima velik moment okrog vodoravne osi, to je osi  $y$  in majhen okrog navpične osi, osi  $z$ . To pomeni, da dobro prenaša obremenitve v smeri osi  $z$ , slabo pa v smeri  $y$ . V praksi obremenitev nosilca ni povsem simetrična. Ta asimetrija bi lahko nosilec s tankim presekom nevarno upognila v lateralni smeri, zato tankemu pravokotniku dodamo še spodnji in zgornji pravokotnik in tako dobimo I nosilec.

## Kompozitni nosilec

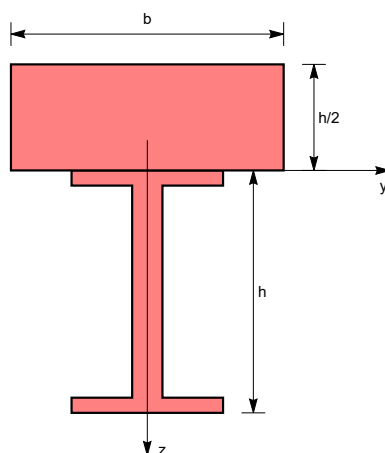
V primeru, ko je nosilec kompozitni oziroma, ko preseki ni homogen, predpostavka, da je nevtralna os tudi centralna ne velja več. Opustimo predpostavko, da je nevtralna os centralna in označimo z  $z_0$  koordinato  $z$  nevtralne osi. Potem je namesto (9) deformacija vlaken dana z

$$\sigma = E\epsilon = (z - z_0) \frac{E}{R}. \quad (19)$$

Vidimo, da je po (19) deformacija nevtralne osi enaka nič. Koordinato  $z_0$  določa pogoj, da je površinska sila na preseku enaka nič. Potemtakem, sedaj namesto (10) velja

$$0 = \int_A \sigma \, dA = \frac{1}{R} \int_A E(z - z_0) \, dA. \quad (20)$$

Sedaj Youngovega modula nismo zapisali pred integral, ker je nosilec heterogen in je  $E$  odvisen od položaja na preseku. V primeru, če je preseki homogen, sledi iz (20), da je  $z_0 = z_* = 0$ , saj predpostavka, da je centralna os koordinatna os  $x$  še vedno velja.



Slika 6: Plošča na nosilcu.

Poglejmo si primer kompozitnega nosilca. Na jekleni I nosilec višine  $h$  in površine  $h^2/6$  je postavljena betonska plošča dimenzije  $b \times h/2$ . Določi širino betonske plošče  $b$  tako, da bo v betonski plošči kompresijsko napetostno stanje, v nosilcu pa natezno. Youngov modul jekla je 210 GPa, betona pa 35 GPa.

Koordinatni sistem postavimo na stiku nosilca in plošče tako kot kaže slika 6. Potem je v nosilcu  $z > 0$ , v plošči pa  $z < 0$ . Za  $z_0 = 0$  je potem po formuli (19) v plošči kompresijska napetost, v nosilcu pa natezna. Tu smo privzeli, da je  $R > 0$ , kar pomeni, da je kompozitni nosilec obremenjen navzdol. Pri  $z_0 = 0$  potem iz (20) sledi, da je

$$0 = \int_A E(z - z_0) dA = E_1 \int_{A_1} z dA + E_2 \int_{A_2} z dA,$$

kjer smo z  $A_1$  označili I nosilec, z  $A_2$  pa ploščo. Integrala sta enaka produktu površine lika  $|A_i|$  in  $z$  koordinate  $z_i^*$  njegovega središča. Upoštevajmo, da je  $A_1 = h^2/6$ ,  $z_1^* = h/2$ ,  $A_2 = bh/2$ ,  $z_2^* = -h/4$ . Potem je

$$\frac{h^3 E_1}{12} = \frac{bh^2 E_2}{8}$$

in od tod

$$b = \frac{2E_1}{3E_2} h = 4h.$$

## Vprašanja in naloge

1. Izračunaj relativno spremembo volumna bakrene kocke, ki jo segrejemo za  $\Delta T = 10^\circ C$ .
2. Za ravninsko defrmacijo določi modificiran Youngov modul in Poissonov količnik za baker, aluminij in beton. Njihovi Poissonovi količniki so 0.32, 0.33 in 0.1.
3. Razmisli, da formula (8) velja tudi, če se nosilec upogne navzgor.
4. Primerjaj momenta votlega in polnega kvadratna preseka, ki imata enako površino.
5. I presek lahko dobimo tudi tako, da pravokotniku na vsaki strani izreženo pravokotnik. Izračunaj moment I preseka po tej poti.