Predavanja 25. marca 2020

Ekvipolentnost dveh sistemov sil

Naj bosta $\mathcal{F}_1$ in $\mathcal{F}_2$ dva ekvipolentna sistema sil. Po definiciji to pomeni, da je $\vec{R}(\mathcal{F}_1) = \vec{R}(\mathcal{F}_2)$ in $\vec{N}(\mathcal{F}_1, O) = \vec{N}(\mathcal{F}_2, O)$ za poljubno izbrani pol O. Pokažimo sedaj, da sta dva prostorska sistema sil ekvipolenta natanko tedaj, ko imata enaka momenta v polih v štirih nekoplanarnih točkah. Podobna trditev velja za ravninski sistem sil v treh nekolinearnih točkah. V eno smer je trditev očitna. Pokažimo še drugo smer. Naj bodo P_i, $i = 0, 1, 2, 3$ štiri točke, ki ne ležijo v isti ravnini in naj velja $\vec{N}(\mathcal{F}_1, P_i) = \vec{N}(\mathcal{F}_2, P_i)$ za $i = 0, 1, 2, 3$. Uporabimo enakost

$$\vec{N}(\mathcal{F}, P_i) - \vec{N}(\mathcal{F}, P_0) = \vec{R}(\mathcal{F}) \times \vec{P_0P_i}, \quad i = 1, 2, 3$$

za sistema $\mathcal{F}_1$ in $\mathcal{F}_2$. Ta enakost sledi iz formule, ki pove, kako se navor sistema sil spremeni s spremembo pola. Potem je

$$\vec{R}(\mathcal{F}_1) \times \vec{P_0P_i} = \vec{R}(\mathcal{F}_2) \times \vec{P_0P_i}, \quad i = 1, 2, 3$$

oziroma

$$\Big(\vec{R}(\mathcal{F}_1) - \vec{R}(\mathcal{F}_2)\Big) \times \vec{P_0P_i} = \vec{0}, \quad i = 1, 2, 3 \tag{1}$$

saj je $\vec{N}(\mathcal{F}_1, P_i) - \vec{N}(\mathcal{F}_1, P_0) = \vec{N}(\mathcal{F}_2, P_i) - \vec{N}(\mathcal{F}_2, P_0)$. Vektorji $\vec{P_0P_i}$, $i = 1, 2, 3$ tvorijo bazo vektorskega prostora. To pomeni, da lahko vektorja $\vec{R}(\mathcal{F}_k)$, $k = 1, 2$ zapišemo kot linearno kombinacijo te baze in tako tudi,

$$\vec{R}(\mathcal{F}_1) - \vec{R}(\mathcal{F}_2) = \alpha_1 \vec{P_0P_1} + \alpha_2 \vec{P_0P_2} + \alpha_3 \vec{P_0P_3}. \tag{2}$$

Sistema sta ekvipolentna, če so koeficienti α_i, $i = 1, 2, 3$ vsi enaki nič. Pokažimo, da je to res. Vstavimo (2) v (1). Potem dobimo

$$\begin{aligned}
\alpha_2 \vec{P_0P_2} \times \vec{P_0P_1} + \alpha_3 \vec{P_0P_3} \times \vec{P_0P_1} &= \vec{0} \\
\alpha_1 \vec{P_0P_1} \times \vec{P_0P_2} + \alpha_3 \vec{P_0P_3} \times \vec{P_0P_2} &= \vec{0} \\
\alpha_1 \vec{P_0P_1} \times \vec{P_0P_3} + \alpha_2 \vec{P_0P_2} \times \vec{P_0P_3} &= \vec{0}.
\end{aligned} \tag{3}$$

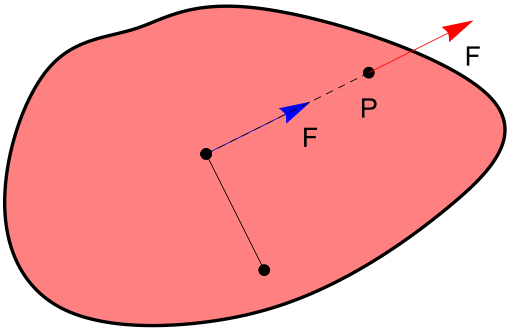
Pri izpeljavi (3) smo upoštevali, da je $\vec{P_0P_i} \times \vec{P_0P_i} = \vec{0}$. Pomnožimo sedaj prvo enačbo skalarno z $\vec{P_0P_2}$, drugo z $\vec{P_0P_3}$ in tretjo z $\vec{P_0P_1}$ in upoštevajmo, da je mešani produkt $\Big(\vec{P_0P_1} \times \vec{P_0P_2}\Big) \cdot \vec{P_0P_3}$ različen od nič, saj točke P_i, $i = 0, 1, 2, 3$ ne ležijo v isti ravnini. Ker je po drugi strani mešani produkt z dvema enakima faktorjema enak nič, sledi $\alpha_3 = 0$, $\alpha_1 = 0$ in $\alpha_2 = 0$ in sistema sta res ekvipolentna. Strnimo ugotovljeno v trditev:

Trditev 1. *Dva prostorska(ravninska)sistema sil $\mathcal{F}_1$ in $\mathcal{F}_2$ sta ekvipolentna natanko tedaj, ko $\vec{N}(\mathcal{F}_1, P_i) = \vec{N}(\mathcal{F}_2, P_i)$ za štiri(tri) točke P_i, ki ne ležijo na isti ravnini(premici).*

V statiki nas posebej zanimajo ravnovesni sistemi sil. Očitna posledica zgornje trditve je:

Posledica 1. *Prostorski(ravninski) sistema sil $\mathcal{F}$ je ravnovesen natanko tedaj, ko $\vec{N}(\mathcal{F}, P_i) = \vec{0}$ v štirih(treh) točkah P_i, ki ne ležijo na isti ravnini(premici).*

Dokazano lastnost pogostokrat uporabimo pri reševanju nalog statike, še posebej za ravninske naloge, kjer je računanje navora enostavno, saj lahko po principu o polznosti sile vedno dosežemo, da sta ročica in sila med seboj pravokotna, glej sliko 1. V tem primeru je velikost navora enaka produktu dolžine ročice in velikosti sile, navor pa je usmerjen po pravilu desnega vijaka. Uporabljamo pa tudi kombinacijo pogoja ravnovesnosti sil in momentov. Naprimer, zahtevamo ravnovesje sil v eni smeri in ravnovesje navorov v treh oziroma dveh polih.



Slika 1: Polznost sile in računanje navora.

Osnovna naloga statike

Naj bo $\mathcal{F}$ sistem sil, ki ni v popolnosti določen. Naprimer, znana so vsa prijemališča, niso pa znane vse sile. Ali pa poznamo sile, ne poznamo pa vsa prijemališča. V splošnem pa morda ne poznamo vseh prijemališč in še kakšne sile. Osnovna naloga statike je določiti neznanke sistema sil, tako da bo sistem sil postal ravnovesni sistem sil. Seveda lahko tako nalogo rešimo samo, če ima naloga toliko enačb, kot ima neznank. Enačbe so $\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{0}$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \vec{0}$. To sta vektorski enačbi. V ravninskem primeru je $\vec{R}(\mathcal{F})$ lahko poljubni ravninski vektor, $\vec{N}(\mathcal{F}, O)$ pa ima komponento samo v smeri normale. Potemtakem ima ravninska naloga tri ravnovesne enačbe. Za prostorski sistem sil pa je $\vec{N}(\mathcal{F}, O)$ lahko poljubni prostorski vektor. Tako imamo v tem primeru šest enačb. Če imamo toliko enačb, kolikor je neznank in je sta sistem enačb enolično rešljiv pravimo, da je naloga *statično določena*. V nasprotnem primeru je naloga *statično nedoločena*. Primer ravninske statično določene naloge je, da poznamo vsa prijemališča, poznamo smeri vseh sil, ne poznamo pa velikosti treh sil. Prostorski primer pa je, poznamo vsa prijemališča in vse sile razen dveh.

V konkretnih primerih pogostokrat poznamo obremenitve togega telesa, ne poznamo pa sile podpor. Tipični primer je naslednja naloga, glej sliko 2. Nosilec dolžine a je enostavno podprt na svojih koncih. Levo podporo označimo z A, desno pa z B, silo s prijemališčem v levi podpori zapišimo z $\vec{A}$, v desnem pa z $\vec{B}$. Leva podpora je fiksna, desna pa drsna. To pomeni, da leva podpora preprečuje pomik v kateri koli smeri, desna pa dopušča vodoravni pomik. Sila $\vec{A}$ ima tako dve komponenti, sila $\vec{B}$ pa samo vertikalo komponento. Pri dani obremenitvi nosilca je naša naloga, da določimo sili podpor tako, da bo nosilec v statičnem ravnovesju. To pomeni, da iščemo sili podpor $\vec{A}$ in $\vec{B}$ tako, da je sistem sil

$$\mathcal{F} = \{(A, \vec{A}), (B, \vec{B}), (P, \vec{F})\}$$

ravnovesni sistem sil. Tu smo s P zapisali prijemališče obremenitve nosilca. Postavimo koordinatni sistem z izhodiščem v levi podpori, z osjo x v smeri nosilca. Potem so prijemališča $A(0, 0)$, $B(a, 0)$, $P(b, 0)$, sile pa so $\vec{A} = A_1\vec{\imath} + A_2\vec{\jmath}$, $\vec{B} = B_2\vec{\jmath}$ in $\vec{F} = -F\vec{\jmath}$.

Slika 2: Enostavno podprt nosilec, levo dvotočkovno, desno tritočkovno podprt.

Enačba ravnovesja sil $\vec{R}(\mathcal{F})$ se po komponentah glasi

$$A_1 = 0, \quad A_2 + B_2 - F = 0.$$

Za ravnovesje momentov moramo prvo izbrati pol. Kam ga postavimo? Lahko kamorkoli, praviloma pa tja, da bo ravnovesni sistem čim enostavnejši. Zato ga postavimo v prijemališče A. Iz $\vec{N}(\mathcal{F}, A) = \vec{0}$ sledi

$$-bF + aB_2 = 0.$$

Dobili smo tri skalarne enačbe za tri neznanke A_1, A_2 in B_2. Iz zadnje enčbe dobimo $B_2 = \frac{b}{a}F$, nato pa še $A_2 = F - B_2 = (1 - b/a)F$ in $A_1 = 0$. V posebnem primeru $b = a/2$ dobimo $A_2 = B_2 = F/2$. Podpori sta enako obremenjeni. To seveda vemo zaradi simetrije tudi brez računanja. Pri nalogah s splošnimi podatki je vedno koristo, če preverimo, ali se izračunana rešitev ujema s tem, kar vemo, da mora veljati.

Naloga pa lahko rešimo tudi takole, zapišemo pogoj ravnovesja sil v vodoravni smeri $A_1 = 0$, nato pa ravnovesje momentov v obeh podporah $\vec{N}(\mathcal{F}, A) = \vec{0}$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, B) = \vec{0}$. Dobimo

$$(a - b)F - aA_2 = 0 \quad - bF + aB_2 = 0.$$

Potem $A_2 = \frac{a-b}{a}$ in $B_2 = \frac{b}{a}F$, kar se seveda ujema z že izračunano rešitvijo. Razlika med obema načinoma je, da smo po drugi poti dobili takoj neznani vertikalni komponenti sil, po prvi poti pa smo morali rešiti enostavni sistem. Pri tej nalogi ni razlike med obema načinoma, če pa je naloga računsko bolj zahtevna, je bolje, da za ravnovesni pogoj uporabimo ravnovesje navora s polom v prijemališču neznane sile.

Poglejmo si sedaj nalogo tritočkovno podprtega nosilca, slika 2. Silo podpore v C označimo z $\vec{C} = C_2\vec{\jmath}$. Ravnovesne enačbe so

$$A_1 = 0, \quad A_2 + B_2 + C_2 = 0, \quad -bF + aC_2/2 + aB_2 = 0.$$

Imamo tri ravnovesne enačbe in sedaj štiri neznanke A_1, A_2, B_2 in C_2. Ker je neznank več kot enačb, sistema ne moremo enolično rešiti, naloga je statično nedoločena. Seveda pa to ne pomeni, da naloga ni smiselna. Še več, če v podpore postavimo silomere, bomo v izvedbi te naloge izmerili sile podpor. Kako je možno, da lahko nekaj izmerimo, ne moremo pa izračunati? Odgovor je v modelu togega telesa. V naravi je vsak nosilec tog samo v okviru modela, v resnici pa se deformira in ta deformacija potem določa sile v podporah. Kako se nosilec deformira bomo spoznali pri Trdnosti. Vidimo, da je model togega telesa omejen, zelo hitro pridemo do statično nedoločenih nalog. Po drugi strani pa je model enostaven in zato omogoča za statično določene naloge rešitev v zaprti obliki. Sposobnost dobrega modeliranja je, da izberemo tak model, ki je izračunljiv in ki dobro opiše pojav.

Klasifikacija podpor

Pri primeru nosilca smo spoznali dve vrst podpor, pomično in nepomično. Poglejmo si, kakšne podpore poznamo. Vrsto podpore določa prenos sil in momentov v točki podpora. Poznamo naslednje podpore:

1. *Konzolna oziroma vpeta podpora.* V tem primeru v točki podpore delujejo vse komponente navora in sile. To pomeni, da imamo v ravninski konzolni podpori tri neznanke, v prostorski pa šest. Potemtakem lahko poljubni sistem sil uravnovesimo, če mu dodamo konzolno podporo.

2. *Členkasta podpora.* Ta prenaša vse komponente sil, ne prenaša pa navorov. Ker prenaša vse komponente sil s tem preprečuje pomike v poljubni smeri. Členkasti podpori, ki prenaša vse komponente sil pravimo tudi nepomična členkasta podpora.

3. pomična členkasta podpora. Podpora je pomična v smeri ravnine in tako prenaša samo silo v smeri normale na ravnino. Ravninsko pomična podpora nastopa samo v primeru prostorske naloge.

4. Linijsko pomična členkasta podpora. Sedaj je podpora pomična v eni smeri, v preostalih dveh pa ne. Podpora torej prenaša dve komponenti sili, ki sta pravokotni na smer možnega pomika.

Našteli smo samo osnove vrste podpor. V splošnem podporo določa število v podpori delujočih komponent sile in navora. V ravninskem primeru lahko podpora prenaša nič, eno ali dve komponenti sil in nič ali eno komponento navora. Možno število ravninskih podpor je tako 6. Vendar niso vse prave podpore, saj podpora mora prenašati vsaj eno komponento sil. Tako poznamo 4 prave ravninske podpore, konzolno, fiksno členkasto, pomično členkasto in pomično podporo, ki prenaša vse komponente navora. V prostorskem primeru pa obstaja 12 pravih podpor.

Osnovni koraki reševanja statičnih nalog

Osnovni koraki reševanja naloge statike togega telesa so

1. Identifikacija vseh sil in njihovih prijemališč. Ta korak je bistven, če spustimo kakšno silo, narobe določimo prijemališča ali napačno predvidimo smer delovanja sil, skoraj gotovo naloge ne bomo pravilno rešili. Reši nas lahko samo posebni primer, ko napačna identifikacija ne vpliva na rešitev. V veliko pomoč pri pravilni identifikacije sil in prijemališč je dobra in pregledna skica naloge. Določene sile opredeljuje že besedilo naloge, nekatere sile pa lahko pravilno identificiramo samo če pravilno razumemo nalogo.

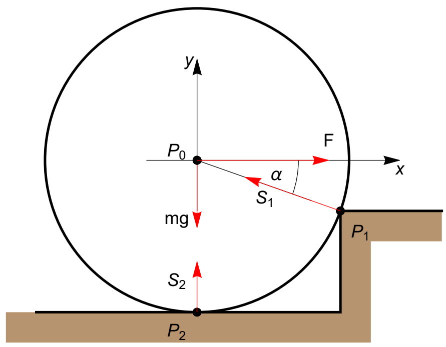
2. Postavitev koordinatnega sistema, vektorski zapis sil in koordinat prijemališč. Pri tem koraku je bistveno, da postavimo tak koordinatni sistem, ki je skladen s problemom. Nerodno postavljeni KS lahko bistveno oteži računski del naloge.

3. Sledi zapis ravnovesnih enačb. Kot smo videli v primeru enostavno podprtega nosilca, imamo tu več možnosti. Praviloma se računski del poenostavi, če uporabimo ravnovesje navorov v polih, ki so v prijemališčih neznanih sil. Potem ko zapišemo ravnovesne enačbe, preštejemo neznanke. Če je neznank več kot je enačb, je sistem statično nedoločen. V tem primeru reševanje naloge prekinemo, ali pa dodamo novo enačbo. Seveda nove enačbe ne smemo dodati kar tako, ampak jo moramo utemeljiti. Naprimer, pri nalogah s simetrijo pričakujemo, da je tudi rešitev simetrična. Pri simetrični nalogi za trotočkovno obremenjen nosilec tako lahko predpostavimo, da so sile podpor enake. Če je neznank manj kot je enačb, je naloga predoločena. Konkretno, dani sistem sil ne moremo uravnovesiti s silo s prijemališčem v predpisani točki, ki ni skupno prijemališče sistema sil. Razlog za predoločen sistem je lahko napaka v identifikaciji sil, lahko pa je tudi naloga napačno zastavljena.

4. Če imamo toliko neznank kot je enačb, sledi reševanje sistema. Vendar pozor. Čeprav ima naloga toliko enačb kot neznank, to še ne zagotavlja, da je naloga enolično rešljiva. Naprimer, če ima sistem sil skupno prijemališče je momentna enačba s polom v skupnem prijemališču trivialna $\vec{0} = \vec{0}$. Če smo zapisali momentno enačbo v polu, ki ni skupno prijemališče, enačba ni trivialna. Vendar pa so ravnovesne enačbe ekvivalentne enačbam, kjer je pol skupno prijemališče in zato ta naloga ni enolično rešljiva, če ima v ravninskem primeru dve oziroma v prostorskem tri neznanke.

5. Po rešitvi ravnovesnega sistema je na mestu analza rezultata. Velja preveriti, ali se rešitev kvalitativno ujema s pričakovanim rezultatom. Čeprav rešitve ne poznamo, pogostokrat vemo v naprej, kam so naprimer usmerejne neznane sile. Če v nalogi nastopajo parameteri, lahko preverimo ali limitne vrednosti teh parametrov dajo pričakovani rezultat. V primeru, če smo nalogo rešili za konkretna števila, je kontrola rezultata tudi dimenzijska skladnost rešitve.

Primer 1. *Določi najmanjšo silo, ki povleče kolo z maso m in polmerom r_0 čez robnik višine h.*



Slika 3: Potisk kolesa čez robnik.

1. Prvi korak je določitev sil. Prvo obravnavajmo silo teže. Na vsak delček kolesa dm deluje sila teže $dm\vec{g}$, kjer je $\vec{g}$ pospešek težnosti. Sistem teh sil je sistem vzporednih sil. Kot že vemo, ima ta sistem vzporednih sil skupno prijemališče v masnem središču, ki je za homogeno kolo v njenem središču P_0. To bomo v nadaljevanju vedno upoštevali, na togo telo deluje sila teže kot točkovna sila $m\vec{g}$ s prijemališčem v masnem središču. Nadalje deluje na kolo vlečna sila $\vec{F}$. Privzeli bomo, da je ta sila v vodoravni smeri v višini kolesa. Po polznosti lahko potem prijemališče premaknemo v središče kolesa. Robnik se upira vlečenju kolesa. Robnik in kolo se dotikata v eni točki in tako ima sila robnika na kolo prijemališče v tej točki, ki jo označimo s P_1. Razmislimo še o smeri sili robnika. Ena komponenta sile robnika je v smeri, ki je pravokotna na krog v P_1, druga pa v obodni smeri. Hitro vidimo, da je obodna komponenta enaka nič. Neničelna obodna komponenta bi kolo zavrtela in je tako lahko prisotna samo, če kolo čez robnik potisne moment kolesa. To pa je že druga naloga, saj v naši nalogi deluje samo sila vlečenja. Sila robnika na kolo $\vec{S}_1$ tako kaže v smeri od prijemališča P_1 do središča kolesa. Na vrsti je razmisilek o sili podlage na kolo. Dokler je kolo v kanalu, se kolo dotika dna kanala v točki P_2 in v tej točki deluje sila podlage $\vec{S}_2$ v navpični smeri. Večja je sila vlečenja, manjša je sila podlage in v določenem trenutku je sila podlage $\vec{S}_2$ enaka nič. Iščemo torej tako vlečno silo $\vec{F}$, da bo $\vec{S}_2 = \vec{0}$. S tem smo zaključili identifikacijo sil. Dobili smo sistem štirih sil. Posebnost tega sistema je, da lahko vse te sile po polznosti prestavimo v središče kolesa. Sistem sil je tako sistem s skupnim prijemališčem.

2. Sledi postavitev koordinatnega sistema. Najenostavnejše je, če izhodišče postavimo v središče kolesa, os x usmerimo vodoravno, os y pa navpično. Potem je

$$\vec{F} = F\vec{\imath}, \quad m\vec{g} = -mg\vec{\jmath}, \quad \vec{S}_1 = S_1(-\cos\alpha\vec{\imath} + \sin\alpha\vec{\jmath}), \quad \vec{S}_2 = S_2\vec{\jmath}.$$

Tu smo z α označili kot med smerjo $\vec{P_0 P_1}$ in osjo x. Kot α lahko izrazimo s podatkoma, polmer kolesa in višina robnika. Iz slike vidimo $\sin\alpha = (r-h)/r$. Tu smo predpostavili, da je $h \leq r$, saj če je robnk previsok, kolesa z vodoravno vlečno silo s prijemališčem v višini središča kolesa ne moremo potegniti čez robnik.

3. Zapišimo ravnovesne enačbe. Ker ima naloga sistem sil s skupnim prijemališčem, je edina ravnovesna enačba ravnovesje sil $\vec{F} + m\vec{g} + \vec{S}_1 = \vec{0}$. Tu smo že upoštevali, da je v trenutku dviga kolesa $\vec{S}_2 = 0$. V komponentnem zapisu je potem

$$F - S_1 \cos\alpha = 0, \qquad -mg + S_1 \sin\alpha = 0.$$

   Imamo dve enačbi. Kaj so neznanke? Ne poznamo F, S_1. Imamo torej dve enačbi in dve neznanki. Naloga je statično določena.

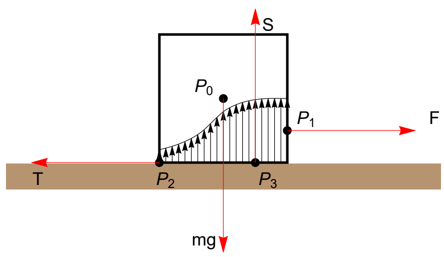
4. Sistem brez težav rešimo. Iz druge enačbe sledi $S_1 = mg/\sin\alpha$ in potem iz prve

$$F = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} mg.$$

5. Analizirajmo rezultat. Vlečna sila je sorazmerna sili teže. To je pričakovan rezultat. V primeru, če ni robnika, $h = 0$, je $\alpha = \pi/2$. Vlečna sila je v tem primeru enaka nič, kar mora tudi biti, saj ni robnika. Z višino robnika narašča vlečna sila in s $h \to r$ gre proti neskončnosti. To se ujema z dejstvom, da kolesa ne moremo povleči čez robnik višine r.

Trenje

Po vodoravni podlagi enakomerno vlečemo kvader s težo $m\vec{g}$, glej sliko 4. Na kvader deluje sila teže s prijemališčem v masnem središču P_0, vlečna sila $\vec{F}$ s prijemališčem v P_1 in sila podlage. Tu smo se zaradi enostavnosti omejili na ravninski primer. Prostorski primer lahko reduciramo na ravninski primer, na ravnino, ki vsebuje prijemališči vlečne sile in sile teže. Podlaga in kvader se dotikata vzdolž stične ploskve, zato je sila podlage površinska sila, to pomeni, da nastopa v vsaki stični točki. Silo razstavimo na dve komponenti vertikalno in vodoravno. Vodoravno komponento lahko po polznosti prestavimo v točko P_2, glej sliko. Njihovo rezultanto označimo s $\vec{T}$. Vertikalne komponente tvorijo sistem vzporednih sil. Kot vemo ima sistem vzporednih sil skupno prijemališče. Označimo ga z P_3, rezultanto pa z $\vec{S}$. Ker se kvader giblje enakomerno, veljajo ravnovesne enačbe ali povedano drugače sistem sil je ravnovesen. Rezultanti sil v vodoravni in vertikalni smeri sta enaki nič. To pomeni, da sta para sil $\{(P_1, \vec{F}), (P_2, \vec{T})\}$ in $\{(P_0, m\vec{g}), (P_3, \vec{S})\}$ dvojici. Prva dvojica ima tendenco, da se kvader prevaga, druga dvojica pa to preprečuje. Višje je prijemališče vlečne sile, bolj proti desni se pomakne prijemališče P_3 in ko doseže rob se kvader prekucne. Dvojici sta v ravnovesju in to ravnovesje določa položaj prijemališča sile $\vec{S}$. Za dano vlečno silo smo dobili tri



Slika 4: Kvader na vodoravni podlagi.

ravnovesne enačbe za tri neznanke, velikosti sil $\vec{T}$ in $\vec{S}$ in položaj prijemališča sile $\vec{S}$. Ta sistem

Tabela 1: Tabela koeficientov trenja

material/material	suho	mokro
aluminij/jeklo	0.61	
lito železo/baker	1.05	
beton/guma	1.0	0.3
beton/les	0.62	
les/les	0.25 - 0.5	0.2
teflon/teflon	0.04	

enačb je enolično rešljiv. To pomeni, da lahko kvader enakomerno vlečemo s poljubno vlečno silo. To pa ni res, eksperimentalno dejstvo je, da lahko kvader enakomerno vlečemo samo z določeno vlečno silo. To dejstvo je *Coulombov zakon trenja*, ki imenuje vodoravno rezultanto sile podlage $\vec{T}$ silo trenja, za kater velja

- sila trenja ima smer nasprotno od smeri gibanja;
- velikost sile trenja je sorazmerna vertikalni, pravimo ji tudi normalni, rezultanti sile podlage, z enačbo
$$\left|\vec{T}\right| = k\left|\vec{S}\right|.$$
  Koeficient k imenujemo koeficient trenja.

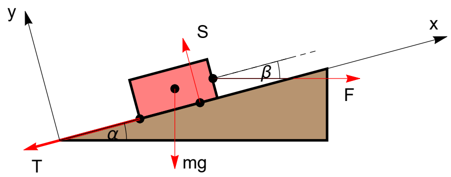
V našem primeru je $S = \left|\vec{S}\right| = mg$ in potem $F = \left|\vec{F}\right| = \left|\vec{T}\right| = kmg$. Enakomerno gibanje je možno samo pri tej vlečni sili. Če je vlečna sila večja, se kvader giblje pospešeno, pri manjši pa kvader miruje.

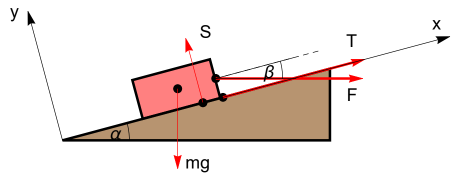
Vprašajmo se, od česa je odvisen koeficient k. Eksperimentalno dejstvo je, da je k odvisen samo od hrapavosti stičnih ploskev, kvadra in podlage in je neodvisen od površine stične ploskve ali hitrosti gibanja. Seveda velja to samo pri določenih pogojih, pravimo jim normalnih pogojih. Po drugi strani ima zelo majhna stična ploskev veliko obrabo površin, kar seveda vpliva na hrapavost in s tem na koeficient trenja k. Nadalje na koeficient vpliva tudi temperatura, in pri trenju pride do segrevanja, kar pav tako lahko vpliva na k. V nadaljevanju se bomo omejili na normalne pogoje, kjer teh vplivov ne upoštevamo. Vrednosti koeficientov trenja so dane v tabeli 1.

Trenje, ki smo ga spoznali imenujemo tudi dinamično trenje, ker nastopa pri gibanju. Poznamo pa tudi trenje, imenujemo ga oprijemalno ali statično trenje, ki nastopa pri mirovanju. Naj tako kot prej na ravni podlagi stoji kvader. Kvader povlecimo, sprva z majhno silo. Kvader se ne premakne. Silo vlečenja uravnovesi sila, ki ji pravimo oprijemalno trenje. Silo vlečenja povečujemo in v trenutku, ko se kvader premakne razmerje velikosti sil T/mg označimo z k_l. Koeficientu k_l pravimo koeficient lepenja, ki je praviloma nekoliko večji kot sila trenja. To vemo iz vsakdanje izkušnje, če želimo nekaj premakniti, se gibanje prične s sunkom, sila s katero smo uspeli premakniti je nekoliko večja, kot je sila potrebna za enakomerno gibanje. Razlika pa ni velika, je v okviru natančnosti izmere koeficienta trenja, zato v nadaljevanju ne bomo delali razlike med obema koeficientoma.

Klada na klancu

Olejmo si naslednji primer. Po klancu z naklonskim kotom α dvigujemo oziroma spuščamo klado z maso m s silo $\vec{F}$, glej sliko 5. Sila $\vec{F}$ oklepa s strmino klanca kot β, $|\beta| < \pi/2$. Naša naloga je določiti velikost sile $\vec{F}$, da se bo klada gibala enakomerno. Če bo velikost sile manjša od te izračunane vrednosti bo klada mirovala, če bo večja se bo klada gibala pospešeno.





Slika 5: Klada na klancu. Levo: dvigovanje klade; desno: spuščanje klade.

Na klado delujejo sile $\vec{F}$, sila teže $m\vec{g}$, normalna sila podlage $\vec{S}$ in sila trenja $\vec{T}$. Postavimo koordinatni sistem z osjo x v smeri klanca, glej sliko. Potem je

$$m\vec{g} = mg(-\sin\alpha\vec{\imath} - \cos\alpha\vec{\jmath}) \quad \text{in} \quad \vec{S} = S\vec{\jmath}.$$

V primeru dvigovanja je

$$\vec{F} = F(\cos\beta\,\vec{\imath} - \sin\beta\,\vec{\jmath}) \quad \text{in} \quad \vec{T} = -T\vec{\imath} \tag{4}$$

pri spuščanju pa

$$\vec{F} = F(\cos\beta\,\vec{\imath} - \sin\beta\,\vec{\jmath}) \quad \text{in} \quad \vec{T} = T\vec{\imath}. \tag{5}$$

Primera lahko obravnavamo enotno, če zapišemo (4-5) v obliki

$$\vec{F} = F(\cos\beta\,\vec{\imath} - \sin\beta\,\vec{\jmath}) \quad \text{in} \quad \vec{T} = -aT\vec{\imath},$$

kjer je $a = 1$ zadvigovanje in $a = -1$ za spuščanje.

Ravnovesni enačbi sta ravnovesje sil in navorov. Prijemališče normalne sile podlage $\vec{S}$ ni znano v naprej. Določa ga ravnovesje momentov. Ker nas zanima sila $\vec{F}$, se bomo omejili samo na ravnovesje sil. Ta situacija je pri nalogah s trenjem tipična. Če nas ne zanima prijemališče normalne sile podlage, zapišemo in rešujemo samo ravnvesne enačbe za sile. Iz vektorske enačbe

$$\vec{F} + m\vec{g} + \vec{S} + \vec{T}$$

dobimo enačbe po komponentah

$$\begin{aligned} 0 &= -mg\sin\alpha + F\cos\beta - aT, \\ 0 &= -mg\cos\alpha - F\sin\beta + S. \end{aligned}$$

V prvo enačbo vstavimo Coulombov zakon $T = kS$. Tako dobimo dve enačbi za neznanki F in S. Iz druge enačbe izrazimo $S = F\sin\beta + mg\cos\alpha$ in vsgtavimo v prvo emačo $T = kS$. Potem je

$$0 = -mg\sin\alpha + F\cos\beta - ka(F\sin\beta + mg\cos\alpha).$$

Od tod sledi

$$F = \frac{mg(\sin\alpha + ka\cos\alpha)}{\cos\beta - ka\sin\beta}. \tag{6}$$

Tu smo privzeli, da je imenovalec različen od nič. Koeficient trenja k zapišemo v obliki $k = \tan\alpha_0$. Kotu α_0 pravimo *torni kot*. Njegovo poimenovanje bomo v kratkem razkrili. Pomnožimo (6) z $\cos\alpha_0$ Potem je

$$F = \frac{mg(\sin\alpha\cos\alpha_0 + a\cos\alpha\sin\alpha_0)}{\cos\beta\cos\alpha_0 - a\sin\beta\sin\alpha_0}. \tag{7}$$

Sedaj upoštevajm, da za $a = \pm 1$ velja $a\sin\alpha_0 = \sin(a\alpha_0)$ in $\cos\alpha_0 = \cos(a\alpha_0)$. Potem iz (7) sledi

$$F = mg\frac{(\sin\alpha\cos(a\alpha_0) + \cos\alpha\sin(a\alpha_0))}{\cos\beta\cos(a\alpha_0) - \sin\beta\sin(a\alpha_0)} = mg\frac{\sin(\alpha + a\alpha_0)}{\cos(\beta + a\alpha_0)}. \tag{8}$$

V zadnji enakosti smo upoštevali adicijska izreka za sin in cos.

Analizirajmo dobljeno formulo. Privzemimo, da klado dvigujemo. Potem je $a = 1$ in

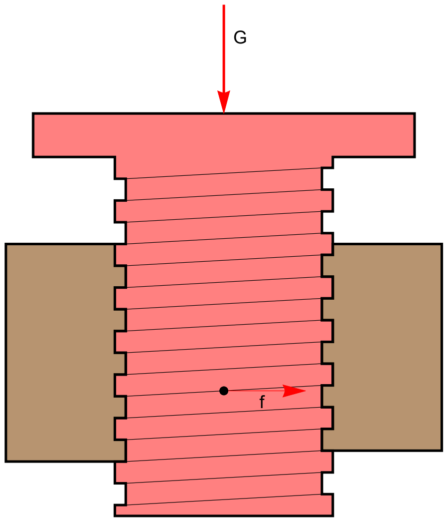
$$F = mg\frac{\sin(\alpha + \alpha_0)}{\cos(\beta + \alpha_0)}. \tag{9}$$

Iz formule vidimo, da za vlečenje kot β ne sme biti prevelik, veljati mora $-\pi/2 < \beta + \alpha_0 < \pi/2$. Za spuščanje je $a = -1$ in

$$F = mg\frac{\sin(\alpha - \alpha_0)}{\cos(\beta - \alpha_0)}. \tag{10}$$

Opazimo, da je za $\alpha = \alpha_0$ sila F enaka nič. Pri tem kotu torej klada na katero ne deluje sila bodisi miruje, bodisi se enakomerno spušča. Torni kot potemtakem lahko določimo s počasnim večanjem kota strmine α. Začnemo z $\alpha = 0$. Klada miruje. Povečamo kot, klada še vedno miruje, slej ko prej, pa pri dovolj velikem kotu zdrsne. Najmanjši kot pri katerem zdrsne je torni kot α_0, ki določa koeficient trenja $k = \tan\alpha_0$.

Vijačna dvigalka



Slika 6: Vijačna dvigalka, dvigovanje bremena.

Vijak zavit v ohišje se pri vrtenju dviguje ali spušča. Zanima nas s kolikšnem navorom moramo delovati na vijak, da bomo enakomerno dvignili ali spustili vijak, ki je osno obremenjen s silo $\vec{G}$, glej sliko 6. Kot bomo videli, je iskani navor odvisen od polmera vijaka r_0 in strmine vijačnice, naklonskega kota α. Pri vrtenju navoj vijaka drsi ob navoj ohišja oziroma matice, tako da na tem stiku deluje sila trenja. Koeficient trenja označimo s $k = \tan\alpha_0$, kjer je α_0 torni kot. Celotna obremenitev vijaka se razporedi po dolžini l skupnega navoja vijaka in ohišja. Zapišimo $\vec{G} = l\vec{g}$, kjer je $\vec{g}$ dolžinska gostota obremenitve. Na navor $\vec{N}$, ki deluje na vijak lahko gledamo kot na dvojico. Tej dvojici priredimo sistem sil, ki so po velikosti enake in porazdeljene vzdolž navoja vijaka v obodni smeri. To je res dvojica, saj pripadata dvema diametralno nasprotnima točkama vzporedni sili, po velikosti enaki in naprotno usmerjeni. To silo s prijemališčem na navoju vijaka označimo z $\vec{f}$, glej sliko 6. Navor, ki pripada temu sistemu sil je potem $\vec{N} = r_0 l f \vec{k}$, kjer je $\vec{k}$ enotski vektor v smeri osi vijaka.

Sedaj moramo določiti zvezo med $\vec{g}$ in f. Ker gre za trenje na strmini, bomo uporabili formulo (8), kjer je sedaj f namesto F, g namesto mg in $\beta = \alpha$. Velja torej

$$f = g\frac{\sin(\alpha + a\alpha_0)}{\cos(\alpha + a\alpha_0)} = g\tan(\alpha + a\alpha_0). \tag{11}$$

Potem

$$\vec{N} = r_0 lf\vec{k} = r_0 lg\tan(\alpha + a\alpha_0)\vec{k} = r_0 G\tan(\alpha + a\alpha_0)\vec{k}. \tag{12}$$

Za dvigovanje bremena $\vec{G}$ je potemtakem potreben navor

$$\vec{N} = r_0 G\tan(\alpha + \alpha_0)\vec{k}. \tag{13}$$

Večje je trenje v navoju, večji navor potrebujemo. Vidimo, da pri dobro mazanem in položnem navoju lahko s sorazmerno majhnim navorom dvignemo težko breme in je pravi smisel vijačne dvigalke. Poglejmo še kako je s spuščanjem, kjer je $a = -1$. Navor spuščanja je

$$\vec{N} = r_0 G\tan(\alpha - \alpha_0)\vec{k}. \tag{14}$$

Za $\alpha > \alpha_0$ je navor $\vec{N}$ v smeri $\vec{k}$. To pomeni, da moramo za enakomerno spuščanje z navorom $\vec{N}$ zadrževati spuščanje. Brez tega zadrževalnega navora se breme vedno hitreje, nekontrolirano spušča. Za $\alpha < \alpha_0$, torej če je strmina navoja manjša od tonega kota, za spuščanje potrebujemo navor, ki vijak spušča. Pravimo, da je v tem primeru vijačna dvigalka *samozaporna*. Breme dvignemo z navorom danim s formulo (13). Potem, ko breme dvignemo, se breme ne prične samo od sebe spuščati, saj za spuščanje potrebujemo navor po formuli (14).

Vprašanja

1. Za ravninski sistem sil $\mathcal{F}$ naj velja $\vec{N}(\mathcal{F}, P_1) = \vec{N}(\mathcal{F}, P_2) = \vec{0}$. Kaj lahko poveš za $\vec{R}(\mathcal{F})$? Ali je $\vec{R}(\mathcal{F}) \cdot \vec{n} = 0$, kjer je $\vec{n} \perp \overrightarrow{P_1P_2}$.
2. Za trotočkovno podprti nosilec zapiši ravnovesne enačbe, vsota sil v navpični smeri in ravnovesje momentov s poli v krajiščih nosilca A in B. Dodaj še ravnovessje momenta v polu C. Kaj lahko ugotoviš za ta sistem štirih enačb za štiri neznanke?
3. Najdi še svoj primer statično nedoločene naloge.
4. Izračunaj silo podore in momenta v konzolno vpetemu nosilcu.
5. Določi navor, ki dvigne kolo čez robnik.
6. Ali je sila trenja odvisna od ploščine površine stika?
7. Kaj velja za vijačno dvigalko, če v vijaku ni trenja?