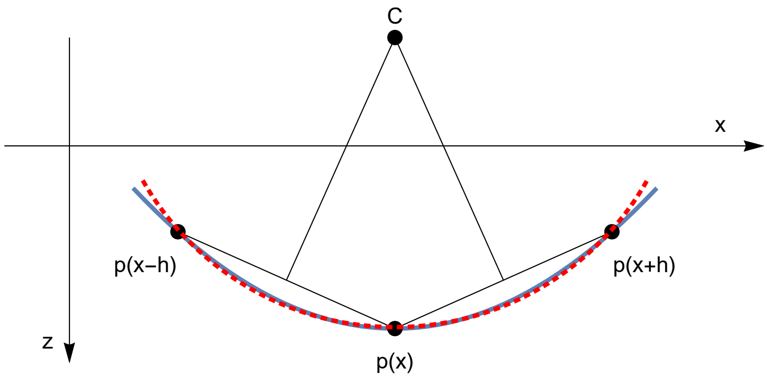
Predavanja 27. maja 2020

Upogib nosilca

Upogib nosilca v inženirski teroiji nosilcev je določen z upogibom nevtralne osi. Pri definiciji osne deformacije vlaken nosilca smo deformiran položaj nevtralne osi lokalno aproksimirali s krožnico s polmerom R. Tako smo ugotovili, da je relativna infinitezimalna sprememba dolžnin vlaken enaka $\epsilon = z/R$, kjer je z koordinata vlakna na prerezu. Tu velja poudariti, da je R lahko poljubnega predznaka. Če je nosilec ukrivljen v smeri osi z, je R pozitiven, če pa je nosilec ukrivljen v negativni smeri osi z je R negativen, saj se vlakna za $z < 0$ raztegnejo. Zato je $\epsilon = z/R > 0$ in potemtakem je $R < 0$.

Aproksimacija krivulje s krožnico je prikazana na sliki 1. Kako dobimo to aproksimacijo? Naj bo krivulja podana kot graf funkcije $z = w(x)$. Aproksimacijo krivulje s krožnico v točki $p(x)$ s koordinatami $(x, w(x))$, dobimo tako, da skozi točke $p(x-h)$, $p(x)$ in $p(x+h)$ potegnemo krožnico. Krožnica je enolično določena, če točke niso na isti premici, glej sliko 1. Za dani h tako dobimo polmer krožnice $R(h) > 0$. Če je krivulja gladka, vsaj dvakrat zvezno odvedljiva, obstaja limita $R_0 = \lim_{h\to 0} R(h)$. Ker je $R(h) > 0$, je tudi $R_0 \geq 0$. Velja torej $R_0 = |R|$. Predznak krivinskega radija R bomo določili kasneje. Direktni račun pokaže, tu uporabimo enakost $w(x \pm h) = w(x) \pm w'(x) + \frac{1}{2}w''(\xi)$, kjer je leži ξ med x in $x \pm h$, da je

$$\frac{1}{R_0} = \left| \frac{w''(x)}{(1 + (w'(x))^2)^{3/2}} \right| . \tag{1}$$



Slika 1: Aproksimacija krivulje s krožnim lokom.

Dobili smo izraz, ki je nelinearen v w. Če se omejimo na majhne deformacije, je upogib nevtralne osi na dolžino nosilca majhen. To pomeni, da je odvod $|w'|$ majhen. Potem je člen $|w'|^2$ v primerjavi z 1 majhen in ga v okviru linearne teorije zanemarimo. Tako je v linearni teoriji upogiba nosilca

$$\frac{1}{R_0} = |w''(x)| .$$

Določiti moramo še predznak R. Če je nosilec ukrivljen v smeri osi z, glej sliko 2, potem kot, ki ga oklepa tangenta na nevtralno os z osjo x z naraščjočim x pada. Potemtakem je w' padajoča funkcija spremenljivke x. Odvod padajoče funkcije je negativen, zato je v tem primeru $w'' < 0$. Ker je za nosilec, ki je upognjen v smeri osi z krivinski polmer R pozitiven, je

$$\frac{1}{R} = -w''(x). \tag{2}$$

V primeru, da je nosilec upognjen v smer negativne osi z, kot narašča in je $w'' > 0$. V tem primeru je $R < 0$, zato formula (2) velja tudi za nosilec upognjen v smer negativne osi z.

Slika 2: Tangenta na nevtralno os. Levo: upogib v smeri osi z, kot tangente pada z naraščajočim x, $\theta_1 > \theta_2$. Desno: upogib v negativni smeri osi z, kot tangente narašča z x, $\theta_1 < \theta_2 < 0$.

Sedaj, ko poznamo ukrivljenost $1/R$, lahko zapišemo upogibni moment v obliki

$$M = \frac{EI}{R} = -EIw''. \tag{3}$$

Vidimo, da je enačba pri znanem upogibnem momentu diferencialna enačba drugega reda za $w(x)$. Če poznamo upogibni moment, potem lahko uporabimo (3) za določitev upogiba nosilca. Ker je to diferencialna enačba drugega reda, je rešitev enolično določena z dvema robnima pogojema. Predpišemo lahko vrednost upogiba $w(x)$ ali njegovega odvoda $w'(x)$ na krajišču nosilca. V točki, kjer je noslec podprt, je upogib enak nič, zato je tam $w(x)$ enak nič. V konzolnem vpetju pa je odvod $w'(x)$ enak nič. Seveda pa morajo biti robni pogoji usklajeni z upogibnim momentom. Če je $M(x)$ naprimer upogibni moment konzolno vpetega nosilca, smemo uporabiti samo robne pogoje za konzolno vpeti nosilec. Podobno velja tudi za podprti nosilec.

Kako določimo upogibni moment smo spoznali pri statiki. Ugotovili smo, da v primeru linijske obremenitve nosilca velja

$$\frac{\mathrm{d}^2 M}{\mathrm{d}x^2} = -q(x). \tag{4}$$

Tu je $q(x)$ gostota prečne linijske obremenitve nosilca. Če kombiniramo enačbi (3) in (4) dobimo

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(EI\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\right) = q(x). \tag{5}$$

Produktu EI pravimo *upogibna togost.* Če je nosilec homogen in ima konstanten presek, je upogibna togost konstantna. V tem primeu se enačba poenostavi v

$$\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4} = \frac{1}{EI}q. \tag{6}$$

Enačba (5) velja samo na območju nosilca, kjer je nosilec obremenjen smo linijsko, ne velja pa v točki, kjer je nosilec točkovno obremenjen. Konkretno, če je prevesni nosilec linijsko obremenjen, velja (5) oziroma (6) za dela nosilca, ki sta levo in desno od prevesne podpore, ne velja pa vzdolž cele dolžine nosilce, ker v prevesni podpori deluje na nosilec točkovna sila podpore. Kako tako nalogo rešimo, bomo spoznali kasneje v nadaljevanju.

Robni pogoji

Enačba (5) oziroma (6) je enačba četrtega reda, zato ima njena splošna rešitev štiri konstante. Te konstante določajo robni pogoji. Poleg pogojev na $w(x)$ in $w'(x)$, ki smo jih že spoznali, lahko predpišemo tudi $w''(x)$. Enačba (3) določa upogibni moment. Če je ta znan, je potem po (3) znan tudi $w''(x)$ v tej točki. Konkretno, v členkasti podpori je upogibni moment enak nič, zato je tam $w''(x)$ enak nič. V določenih primerih, pa robni pogoj določa $w'''(x)$. Vemo, da je odvod upogibnega momenta enak prečni sili. Če je torej prečna sila predpisana, potem je s tem predpisom posredno določen tudi tretji odvod upogiba. V posebnem primeru, ko je krajišče nosilca prosto, je prečna sila enaka nič in zato je v tej točki $w'''(x)$ enak nič.

Za boljši pregled naštejmo vse robne pogoje na enem mestu.

- Nosilec je podprt v točki $x = a$. Potem je $w(x = a) = 0$.
- Nosilec je konzolno vpet v točki $x = a$. Velja $w'(x = a) = 0$.
- V členkasti podpori $x = a$ je $w''(x = a) = 0$. Splošneje, če je v točki $x = a$ predpisan upogibni moment $M(a)$, je $w''(x = a) = -M(a)/EI$.
- Na prostem koncu je $x = a$ je $w'''(x = a) = 0$. Splošneje, če je v točki $x = a$ prečna sila na nosiec enaka $Q(a)$, je $w'''(x = a) = -Q(a)/EI$.

Upogib linijsko obremenjenega nosilca

Za primer si poglejmo upogib enostavno podprtega nosilca dolžine l, ki je obremenjen s konstantno linijsko obremenitvijo z gostoto q_0. Rešiti moramo enačbo

$$\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4} = \frac{1}{EI} q_0 \tag{7}$$

z robnimi pogoji

$$w(0) = w(l) = 0 \quad \text{in} \quad w''(0) = w''(l) = 0. \tag{8}$$

Privzeli smo, da je nosilec homogen s konstantnim presekom. Iz (7) sledi

$$w''' = \frac{q_0}{EI} x + C_1 \tag{9}$$

in potem

$$w'' = \frac{q_0}{2EI} x^2 + C_1 x + C_2. \tag{10}$$

Nadalje je

$$w' = \frac{q_0}{6EI} x^3 + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

in končno

$$w = \frac{q_0}{24EI} x^4 + \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4. \tag{11}$$

Konstante določimo iz robnih pogojev (8). Hitro vidimo, da iz robnih pogojev pri $x = 0$ sledi $C_4 = C_2 = 0$. Upoštevajmo še pogoja pri $x = l$. Dobimo dve enačbi

$$\begin{aligned} 0 = w''(l) &= \frac{q_0 l^2}{2EI} + C_1 l \\ 0 = w(l) &= \frac{q_0 l^4}{24EI} + \frac{l^3}{6} C_1 + C_3 l. \end{aligned}$$

Iz prve enačbe dobimo

$$C_1 = -\frac{q_0 l}{2EI} \tag{12}$$

in potem iz druge

$$C_3 = -\frac{q_0 l^3}{24EI} - \frac{C_1 l^2}{6} C_1 = \frac{q_0 l^3}{24EI}.$$

Rešitev je

$$w = \frac{q_0}{24EI} x^4 - \frac{q_0 l}{12EI} x^3 + \frac{q_0 l^3}{24EI} x = \frac{q_0}{24EI} \left(x^4 - 2lx^3 + l^3 x \right).$$

Zanima nas še maksimalni upogib. Iščemo ekstrem funkcije $w(x)$. Ekstrem nastopi tam kjer je $w'(x) = 0$. V našem primeru nam ni potrebn iskati korena te enačbe, saj iz simetrije naloge sledi, da je iskana točka na polovici. Vstavimo v rešitev $x = \frac{1}{2} l$. Tako dobimo

$$w_{max} = \frac{q_0}{24EI} \left(\frac{l^4}{16} - 2l \frac{l^3}{8} + l^3 \frac{l}{2} \right) = \frac{5 q_0 l^4}{384EI}.$$

Poglejmo konkretni primer za aluminijasti nosilec $E = 70\,\mathrm{GPa}$ dolžine $1\,\mathrm{m}$ s kvadratnim presekom $a = 3\,\mathrm{cm}$ obremenjen z linijsko gostoto $q_0 = 10\,\mathrm{kN/m}$. Pri teh vrednostih je $w_{max} = 2.75\,\mathrm{cm}$. V tem primeru lahko še uporabimo linearno aproksimacijo, saj je maksimalna vrednost odvoda $w'(x)$ enaka 0.088.

Upogib točkovno obremenjenega nosilca

Naslednji primer bo izračun upogiba točkovno obremenjenega nosilca. Obremenitev ni linijska, zato moramo razdeliti nosilec v dva dela, na levi in desni del od točke obremenitve. Za vsak del potem velja enačba (5) s $q(x) = 0$. Tako dobimo levo in desno rešitev. Rešitvi nato sklopimo z ustreznimi robnimi pogojina stiku.

Namesto te poti bomo raje uporabili drugo pot, k temelji na tem, da upogibni moment točkovno obremenjenega nosilca že poznamo. Namesto enačbe (5) bomo tako reševali enačbo (3). To lahko vedno storimo, kadar je upogibni moment znan. Če je sistem sil na nosilec statično določen, je upogibni moment nosilca določen in potemtakem lahko v teh primerih upogib nosilca določimo direktno z reševanjem (3). Ni pa vedno tako. Nosilec, ki je podprt v treh točkah je statično nedoločen, zato upogibnega momenta ne moremo v naprej določiti. Kako to nalogo rešimo bomo spoznali v nadaljevanju.

Upogibni moment enostavno podprtega nosilca dolžine l, ki je točkovno obremenjen s prečno silo F v razdalji a od levega krajišča je

$$M = \begin{cases} x(1 - \frac{a}{l})F & 0 \le x \le a \\ a(1 - \frac{x}{l})F & a \le x \le l. \end{cases}$$

Moment je zvezen v točki obremenitve $x = a$. Ker je moment podan odsekoma, moramo enačbo rešiti za vsak del posebej. Začnimo z $0 \le x \le a$. Enačbo (3) preoblikujmo v

$$w'' = -\frac{F}{EI}(1 - \frac{a}{l})x.$$

Podobno kot že prej se vprašamo, kaj moramo odvajati, da dobimo x. Odgovor je $\frac{1}{2}x^2 + C_1$, kjer je C_1 poljubna konstanta. Potem je

$$w' = -\frac{F}{2EI}(1 - \frac{a}{l})x^2 + C_1.$$

Da dobimo x^2 moramo odvajati $\frac{1}{3}x^3 + C_2$. Tako je

$$w = -\frac{F}{6EI}(1 - \frac{a}{l})x^3 + C_1 x + C_2 \quad \text{za} \quad 0 \le x \le a. \tag{13}$$

Poglejmo sedaj rešitev za desni del. Enačba je

$$w'' = -\frac{F}{EI}a(1 - \frac{x}{l}) = -\frac{aF}{EI} + \frac{aF}{EIl}x.$$

S podobnim sklepom kot prej sledi

$$w' = -\frac{aF}{EI}x + \frac{aF}{2EIl}x^2 + C_3$$

in

$$w = -\frac{aF}{2EI}x^2 + \frac{aF}{6EIl}x^3 + C_3 x + C_4 \quad \text{za} \quad a \le x \le l. \tag{14}$$

Določiti moramo še konstante C_i, $i = 1, 2, 3, 4$. Konstante določajo robni pogoji. Nosilec je na krajiščih podprt, zato je tam upogib enak nič. Velja torej $w(0) = w(l) = 0$. Iz (13) potem takoj sledi $C_2 = 0$ iz (14) pa

$$0 = -\frac{aF}{2EI}l^2 + \frac{aF}{6EIl}l^3 + C_3 l + C_4 = -\frac{aF}{3EI}l^2 + C_3 l + C_4. \tag{15}$$

Potrebujemo še dve enačbi. Te dve enačbi sledita iz pogojov na stiku obeh delov pri $x = a$. V tej točki se mora upogib levega dela ujemati z upogibom desnega dela. Označimo rešitev (13) levega dela z w_l, desnega dela (14) pa z w_d. Veljati mora torej $w_l(x = a) = w_d(x = a)$ in tudi $w_l'(x = a) = w_d'(x = a)$, saj je $w(x)$ dvakrat zvezno odvedljiva in potemtakem tudi enkrat zvezno odvedljiva v točki $x = a$. Tako dobimo enačbi

$$-\frac{F}{2EI}(1 - \frac{a}{l})a^2 + C_1 = -\frac{aF}{EI}a + \frac{aF}{2EIl}a^2 + C_3, \tag{16}$$

$$-\frac{F}{6EI}(1 - \frac{a}{l})a^3 + C_1 a = -\frac{aF}{2EI}a^2 + \frac{aF}{6EIl}a^3 + C_3 a + C_4. \tag{17}$$

Od (17) odštejemo (16). Po krajšem računu dobimo

$$C_4 = -\frac{a^3}{EI}F.$$

Iz enačbe (15) potem sledi

$$C_3 = \frac{a^3 + 2al^2}{6EI}F$$

in končno iz (16)

$$C_1 = \frac{a(a^2 - 3al + 2l^3)}{6EIl}F.$$

V posebnem primeru $a = l/2$ je

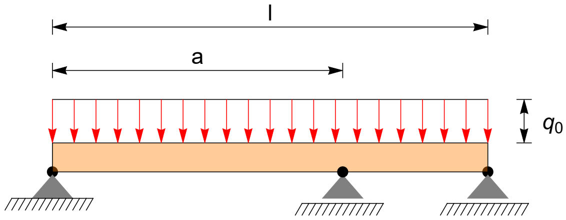
$$C_1 = \frac{l^2}{16EI}F, \qquad C_3 = \frac{3l^3}{16}F \quad \text{in} \quad C_4 = -\frac{l^3}{48EI}F.$$

Maksimalni upogib je potem očitno na polovici in je enak

$$w_{\max} = w_l(l/2) = -\frac{F}{12EI}\frac{l^3}{8} + \frac{l^2 F}{16EI}\frac{l}{2} = \frac{Fl^3}{48EI}.$$

Za primer izračunajmo maksimalni upogib za enake podatke kot pri linijsko obremenjenem nosilcu. Za točkovna obremenitev bomo vzeli $F = q_0 l = 10\,\mathrm{kN}$. Za te vrednosti je $w_{max} = 4.41\,\mathrm{cm}$, kar je za faktor 1.6 več kot pri linijsko obremenjenem nosilcu. Razlaga je očitna, pri točkovnem je vsa obremenitev skoncentrirana v točki maksimalnega upogiba, pri linijskem pa je obremenitev enakomerno razporejena vzdolž nosilca. Faktor 1.6 je neodvisen od materialnih in geometrijskih podatkov nosilca.

Tritočkovno podprt nosilec



Slika 3: Tritočkovno podprt nosilec.

Poglejmo še primer tritočkovno podprtega nosilca, glej sliko 3. Nosilec je obremenjen s konstantno linijsko obremenitvijo z gostoto q_0. Ker je določitev sil podpor statično nedoločen problem, upogibnega momenta v naprej ne moremo izračunati. Vmesna podpora deluje na nosilec s točkovno silo, zato nosilec razdelimo na dva dela, na levi del, levo od vmesne podpore in desni del, desno od vmesne podpore. Na vsakem delu, pravimo tudi polju, je obremenitev linijska, zato tam velja enačba (5) za vak del posebej. Upogib na levem delu označimo z w_l, na desnem delu pa w_d. Potem je

$$w_l'''' = \frac{q_0}{EI} \quad \text{in} \quad w_l(0) = 0, \quad w_l''(0) = 0 \tag{18}$$

in

$$w_d'''' = \frac{q_0}{EI} \quad \text{in} \quad w_d(l) = 0, \quad w_d''(l) = 0. \tag{19}$$

Splošno rešitev (11) že poznamo. Rešitev (18) za levi del je tako

$$w_l(x) = \frac{q_0}{24EI}x^4 + C_1x^3 + C_3x. \tag{20}$$

Rešitev za desni del lahko dobimo tako, da upoštevamo robna pogoja pri $x = l$ in na ta način eliminiramo dve konstanti v splošni rešitvi. Račun je nekoliko siten, zato bomo obrali drugo pot. Opazimo, da za $w(x) = w_l(x - l)$ velja $w(l) = 0$, $w''(l) = 0$ in

$$w'''' = \frac{q_0}{EI}.$$

Potemtakem, je to rešitev naloge (19) in tako

$$w_d(x) = \frac{q_0}{24EI}(x-l)^4 + C_2(x-l)^3 + C_4(x-l), \tag{21}$$

kjer smo sedaj konstanti označili z C_2 in C_4.

Konstante C_i, $i = 1, 2, 3, 4$ določajo pogoji na stiku. Velja

$$\begin{aligned} w_l(a) &= 0, \\ w_l(a) &= w_d(a), \\ w_l'(a) &= w_d'(a), \\ w_l''(a) &= w_d''(a). \end{aligned}$$

Prvi pogoj pravi, da je nosilec podprt v $x = a$, ostali trije pa, da nosilec v srednji podpori ni prelomljen. Tu smo uporabili dejstvo, da je nevtralna os nosilca v točki točkovne obremenitve dvakrat zvezno odvedljiva. Enačbe so za splošni $a \in (0, l)$ precej nepregledne, zato se bomo omejili na primer $a = \frac{1}{2}l$. Po poenostavitvi tako dobimo enačbe:

$$
\begin{aligned}
48C_1l^2 + 192C_3 &= -\frac{l^3q_0}{EI}, \\
C_2l^2 + C_1l^2 + 4C_3 + 4C_4 &= 0, \\
18C_1l^2 - 18C_2l^2 + 24C_3 - 24C_4 &= -\frac{l^3q_0}{EI}, \\
C_2 + C_1 &= 0.
\end{aligned}
$$

Hitro vidimo, da je $C_2 = -C_1$ in $C_4 = -C_3$. Tako dobimo sistem

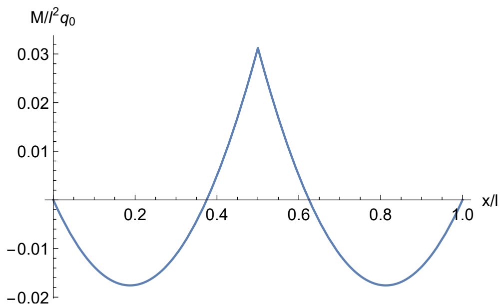
$$
\begin{aligned}
48l^2C_1 + 192C_3 &= -\frac{l^3q_0}{EI}, \\
36l^2C_1 + 48C_3 &= -\frac{l^3q_0}{EI}.
\end{aligned}
$$

Odštejemo drugo enačbo od prve. Potem je $12l^2C_1 + 144C_3 = 0$ in $C_3 = -\frac{1}{12}l^2C_1$. Iz druge enačbe potem dobimo C_1. Iskane konstante so tako

$$
C_1 = -\frac{q_0l}{32EI}, \quad C_2 = \frac{q_0l}{32EI}, \quad C_3 = \frac{q_0l^3}{384EI}, \quad C_4 = -\frac{q_0l^3}{384EI}.
$$

Rešitev je potem

$$
\begin{aligned}
w_l(x) &= \frac{q_0}{384EI}\left(16x^4 - 12lx^3 + l^3x\right), \\
w_d(x) &= \frac{q_0}{384EI}\left(16(x-l)^4 + 12l(x-l)^3 - l^3(x-l)\right). \qquad (22)
\end{aligned}
$$



Slika 4: Brezdimenzijski potek upogibnega momenta trotočkovno podprtega nosilca.

Upogib nosilca je določen. Sedaj nas zanima potek upogibnega momenta in sile podpor. Upogibni moment določimo po (3). Iz (22) dobimo takoj

$$
\begin{aligned}
M_l(x) &= -\frac{1}{2}q_0\left(x^2 - \frac{3}{8}lx\right), \\
M_d(x) &= -\frac{1}{2}q_0\left((x-l)^2 + \frac{3}{8}l(x-l)\right).
\end{aligned}
$$

Graf upogibnega momenta je narisan na sliki 4. Na sliki se lepo vidi prelom upogibnega momenta v srednji podpori. Prečna sila je enaka odvodu upogibnega momenta. Potem je

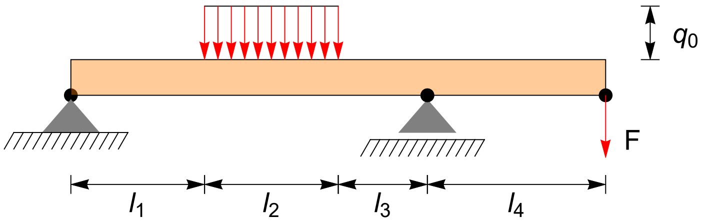
$$
\begin{aligned}
Q_l(x) &= -\frac{1}{2}q_0\left(2x - \frac{3}{8}l\right), \\
Q_d(x) &= -\frac{1}{2}q_0\left(2(x-l) + \frac{3}{8}l\right).
\end{aligned}
$$

Sila leve podpore je $A_1 = Q_l(x=0) = \frac{3}{16} l q_0$. Zaradi simetrije je sila desne podpore $A_3 = A_1$ enaka sili leve podpore. Ker podpore uravnovesijo celotno obremenitev nosilca lq_0, je sila srednje podpore A_2 enaka

$$A_2 = lq_0 - A_1 - A_3 = lq_0 - \frac{3}{8} lq_0 = \frac{5}{8} lq_0.$$

To vrednost lahko dobimo tudi tako, da izračunamo skok prečne sile v srednji podpori. Vidimo, da je srednja podpora bolj obremenjena kot krajiščni podpori.

Splošni primer



Slika 5: Prevesni nosilec s točkovno in linijsko obremenitvijo.

Pristop s katerim smo rešili nalogo uporabimo na nalogah, kjer je nosilec hkrati obremenjen z linijsko in točkovno obremenitvijo. Na sliki 5 je prikazan prevesni nosilec, ki je linijsko obremenjen na enem delu, točkovno pa na prevesnem koncu. Nosilec razdelim na štiri polja dolžine l_i, $i = 1, \ldots, 4$. Upogib na i-tem polju označimo z $w_i(x)$. Polja se stikajo v točkah $a_1 = l_1$, $a_2 = l_1 + l_2$ in $a_3 = l_1 + l_2 + l_3$. Dolžina nosilca je $l = l_1 + l_2 + l_3 + l_4$. Definirajmo $q_1 = q_3 = q_4 = 0$ in $q_2 = q_0$. Upogib nosilca i-tem polju je rešitev enačbe

$$w_i''''(x) = \frac{q_i}{EI}.$$

Splošna rešitev enačbe je oblike (11), kjer ima vsako polje svoje konstante C_k^i, $k = 1, \ldots, 4$. Konstante določajo robni pogoji oziroma sklopitvene enačbe med polji. Ker je skupno 16 konstant, potrebujemo 16 enačb. Zapišimo jih. Levo krajišče je členkasta podpora. Zato je

$$w_1(0) = 0 \quad \text{in} \quad w_1''(0) = 0.$$

Na stiku prvega in drugega polja, kjer ima gostota linijske obremenitve nezveznost, je upogib trikrat zvezno odvedljiva funkcija. Tako pri $x = l_1$ velja

$$w_1(a_1) = w_2(a_1), \quad w_1'(a_1) = w_2'(a_1), \quad w_1''(a_1) = w_2''(a_1), \quad \text{in} \quad w_1'''(a_1) = w_2'''(a_1).$$

Enaki sklopitveni pogoji veljajo tudi na stiku drugega in tretjega polja

$$w_2(a_2) = w_3(a_2), \quad w_2'(a_2) = w_3'(a_2), \quad w_2''(a_2) = w_3''(a_2), \quad \text{in} \quad w_3'''(a_2) = w_3'''(a_2).$$

V podpori na stiku tretjega in četrtega polja podpora deluje s točkovno silo na nosilec. V tem stiku je upogib dvakrat zvezno odvedljiv. Poleg tega je pomik v podpori enak nič. Tako je

$$w_3(a_3) = 0, \quad w_3(a_3) = w_4(a_3), \quad w_3'(a_3) = w_4'(a_3) \quad \text{in} \quad w_3''(a_3) = w_4''(a_3).$$

Konec nosilca je točkovno obremenjen. Potem je upogibni moment na koncu enak nič, prečna sila pa je enaka obremenitvi

$$w_4''(l) = 0 \quad \text{in} \quad w_4'''(l) = -\frac{F}{EI}.$$

Tako smo zapisali 16 robnih pogojev, natanko toliko kolikor jih potrebujemo za določitev upogiba nosilca.

V primeru, če bi nosilec na koncu bil obremenjen z upogibnim momentom M namesto s silo F, bi na koncu nosilca veljalo

$$w_4''(l) = -\frac{M}{EI} \quad \text{in} \quad w_4'''(l) = 0.$$

Superpozicija rešitev

Privzemimo, da poznamo za dve različni obremenitvi enostavno podprtega nosilca dolžine l dva pripadajoča upogibna momenta $M_1(x)$ in $M_2(x)$ za kateri je

$$M_1(0) = M_2(0) = M_1(l) = M_2(l) = 0.$$

Tema dvema upogibnima momentoma pripadata upogiba $w_1(x)$ in $w_2(x)$, ki rešita enačbo (3) z robinim pogojema

$$w_1(0) = w_2(0) = w_1(l) = w_2(l) = 0.$$

Potem je $w(x) = w_1(x) + w_2(x)$ upogib enostavno podprtega nosilca, ki je obemenjen z vsoto obeh obremenitev.

Za primer pokažimo, da lahko upogib enakomerno obremenjenega trotočkovno podprtega nosilca zapišemo kot vsoto upogiba enekomerno obremenjenega enostavno podprtega nosilca in točkovno obremenjenega nosilca.

Upogib enakomerno obremenjenega enakomernega nosilca na sredini je $w_1(l/2) = \frac{5q_0l^4}{384EI}$, upogib točkovno obremenjeneg nosilca pa je $w_2(l/2) = \frac{Fl^3}{48EI}$. Trotočkovni nosilec je na sredini podprt, zato je

$$0 = w(l/2) = w_1(l/2) + w_2(l/2) = \frac{5q_0l^4}{384EI} + \frac{Fl^3}{48EI} = \frac{l^2}{48EI}\left(\frac{5q_0l}{8} + F\right).$$

Potemtakem je za obremenitev

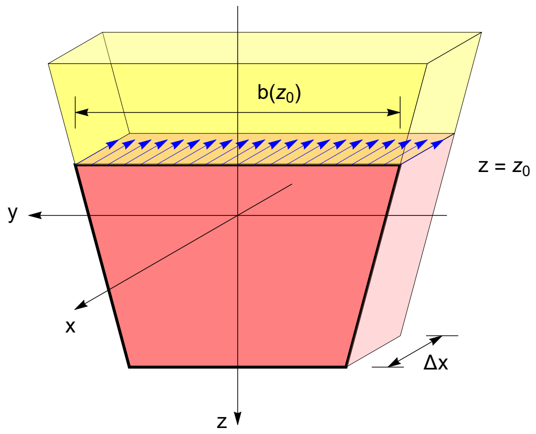
$$F = -\frac{5}{8}q_0l \tag{23}$$

navzgor pomik na sredini enak nič. Izračunana vrednost se ujema s silo podpore A_2. Direktni račun potrdi, da je vsota upogiba $w_1(x)$ enakomerno obremenjenega nosilca z gostoto q_0 in upogiba $w_2(x)$ točkovno obremenjenega nosilca s silo (23) enaka upogibu enakomerno obremenjenega trotočkovno podprtega nosilca (22).

Strižna napetost

Na preseku nosilca poleg normalne napetosti σ deluje tudi strižna napetost τ. Strižna napetost je gostota površinske sile v prečni smeri, torej sile, ki smo jo označili s Q. Strižno napetost bomo določili iz ravnovesja sil v smeri osi x za nosilec med odsekoma pri x in $x + \Delta x$, glej sliko 6, ki je dodatno odrezan pri $z = z_0$. Nosilec ni obremenjen na robu nosilca v smeri osi x, zato na odrezani del v smeri osi x deluje osna površinska sila na prerezih x in $x + \Delta$ in površinska sila na prerezu $z = z_0$. Gostota osne površinske sile na presekih x in $x + \Delta$ je $\sigma(x)$ oziroma $\sigma(x + \Delta x)$, na prerezu pa $\vec{\imath} \cdot \underline{\underline{t}}(-\vec{k})$, kjer je $\underline{\underline{t}}$ napetostni tenzor na prerezu $z = z_0$. Zaradi simetrije je $\underline{\underline{t}}$ odvisen samo od koordinate $z = z_0$ in nič od koordinate y. Ker je zaradi simetričnosti napetostnega tenzorja $\vec{\imath} \cdot \underline{\underline{t}}\vec{k} = \vec{k} \cdot \underline{\underline{t}}\vec{\imath}$, je to natanko iskana strižna napetost τ na osnem preseku. Površino nosilca od reza $z = z_0$ do njegovega spodnjega konca označimo z $A(z_0)$, širino nosilca pri $z = z_0$ pa z $b(z_0)$. Ravnovesna enačba na odrezan del nosilca v smeri osi x se potem glasi

$$\int_{A(z_0)} \sigma(x + \Delta x)\,\mathrm{d}A - \int_{A(z_0)} \sigma(x)\,\mathrm{d}A - \tau b(z_0)\Delta x = 0.$$



Slika 6: Presek nosilca med x in $x + \Delta x$.

Enačbo delimo z Δx in poženemo Δx proti nič. Tako dobimo

$$\int_{A(z_0)} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x}\, \mathrm{d}A = \tau b(z_0).$$

Iz enačbe $\sigma = \frac{M}{I} z$ potem sledi

$$\tau b(z_0) = \int_{A(z_0)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{M}{I} z\, \mathrm{d}A = \int_{A(z_0)} \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} \frac{z}{I}\, \mathrm{d}A = \frac{Q}{I} \int_{A(z_0)} z\, \mathrm{d}A. \tag{24}$$

Tu smo upoštevali, da sta prečna sila in ploskovni moment neodvisna od y in z. Označimo z

$$S(z_0) = \int_{A(z_0)} z\, \mathrm{d}A$$

linearni ploskovni moment dela preseka $A(z_0)$. Potem iz (24) sledi

$$\tau = \frac{QS(z_0)}{Ib(z_0)}. \tag{25}$$

Strižna napetost je odvisna od x in koordinate z na preseku. Povejmo brez dokaza, da je τ res gostota prečne sile Q, da velja

$$Q = \int_A \tau\, \mathrm{d}A,$$

kjer sedaj integriramo po celem preseku nosilca z ravnino pri konstantnem x. Iz definicije $S(z_0)$ vidimo, da je $S(z_0)$ enak produktu ploščine spodnjega preseka $A(z_0)$ z z koodinato njegovega središča.

Za primer izračunajmo linearni ploskovni moment za pravokotnik dimenzije $b \times h$. Koordinata z teče od $-\frac{1}{2}h$ do $\frac{1}{2}h$. Pri z_0 odrezan spodnji preseka je pravokotnik dimenzije $b \times (\frac{1}{2}h - z_0)$. Njegova ploščina je $b(\frac{1}{2}h - z_0)$, z koordinata masnega središča pa je $z_0 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}h - z_0) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}h + z_0)$. Potem je

$$S(z_0) = \frac{1}{2} b(\frac{1}{2}h - z_0)(\frac{1}{2}h + z_0) = \frac{b}{8}(h^2 - 4z_0^2).$$

Iz (25) potem sledi, da je strižna napetost enaka

$$\tau = \frac{Qb(h^2 - 4z_0^2)12}{8b^2h^3} = \frac{3Q}{2bh}(1 - 4(z_0/h)^2).$$

Stržna napetost na krajiščih $z_0 = \pm\frac{1}{2}h$ enaka nič. To že vemo. Novo pa je, da je za pravokotni presek potek strižne napetosti kvadratična funkcija z maksimumom pri z_0. Maksimalna vrednost je

$$\tau_{\max} = \frac{3Q}{2bh} = \frac{3Q}{2A}, \tag{26}$$

kjer je A površina preseka. Ta vrednost je za faktor $\frac{3}{2}$ večja od povprečne vrednosti Q/A.

Strižna napetost $\tau = t_{13}$ povzroči strižno deformacijo $\gamma = \tau/G$, kje je G strižni modul. Kot vemo, γ predstavlja spremembo kota med osjo x in z. V inženirski teoriji nosilcev preseki pravokotni na nevtralno os ostanejo po deformaciji pravokotni na deformirano nevtralno os. Po tej predpostavki bi moralo veljati $\gamma = 0$. Vendar je inženirska teorija aproksimativna teorija, zato preseki niso natančno pravokotni na deformirano nevtralno os. Strižna deormacija γ tako ni enaka nič, mora pa biti majhna za veljavnost inženirske aproksimacije. Preverimo, da je res majhna v že obravnavanem primeru enostavno podprtega nosilca z enakomerno linijsko obremenitvijo.

Prečna sila je enaka $Q = -EIw'''$. Iz (9) in (12) potem sledi

$$w''' = \frac{q_0}{EI}\left(x - \frac{1}{2}l\right).$$

Izraz je ekstremalen v podporah, $x = 0, l$. Potem je

$$Q_{max} = \frac{q_0 l}{2},$$

kar je, kot vemo, enako sili leve podpore. Po (26) je potem

$$\tau_{\max} = \frac{3q_0 l}{4A}$$

in

$$\gamma_{\max} = \frac{\tau_{\max}}{G} = \frac{3q_0 l(1+\nu)}{2AE}.$$

Za aluminijasti nosilec z $E = 70\,\mathrm{GPa}$ in $\nu = 1/3$ dolžine $1\,\mathrm{m}$ s kvadratnim presekom $a = 3\,\mathrm{cm}$, ki je obremenjen z linijsko gostoto $q_0 = 10\,\mathrm{kN/m}$ je potem $\gamma_{max} = 3.2 \times 10^{-4}$. Izračunana vrednost je v tem primeru dovolj majhna za veljavnost inženirske teorije.

Termalni upogib nosilca

V prostoru je temperaturna deformacija enaka $\underline{\underline{e}}_T = \alpha\underline{\underline{i}}\Delta T$. Ker v inženirski teoriji nosilcev dovolimo samo osno deformacijo, se bomo omejili na temperaturno deformacijo v smeri osi x, kjer je ΔT funkcija koordinate z. Celotna deformacija je enaka elastični ϵ_E in temperaturni ϵ_T deformaciji. Velja torej

$$\epsilon = \frac{z}{R} = \epsilon_E + \epsilon_T = \epsilon_E + \alpha\Delta T.$$

Potem je osna napetost

$$\sigma = E\epsilon_E = \frac{E}{R}z - \alpha E\Delta T.$$

Upogibni moment dobimo z integracijo $\vec{r}\times\sigma\vec{\imath}$ po preseku A. Če se omejimo na linearno spremembo temperature

$$\Delta T = T_0 + \beta(T_2 - T_1)z,$$

kjer je β sorazmernostni faktor z enoto [1/m], je

$$M = \frac{EI}{R} - \alpha\beta(T_2 - T_1)EI = -EIw'' - \alpha\beta(T_2 - T_1)EI.$$

Tako je

$$w'' = -\frac{M}{EI} - \alpha\beta(T_2 - T_1) = \frac{M + M_T}{EI},$$

kjer je

$$M_T = \alpha\beta(T_2 - T_1)EI. \tag{27}$$

Če je $T_2 > T_1$ in $\beta > 0$, temperatura narašča z z. Spodnji del nosilca ima višjo temperaturo, zato se bolj raztegne in povzroči upogib nosilca. Zato izrazu M_T pravimo *temperaturni moment.*

Za primer si poglejmo temperaturni upogib konzolno vpetega nosilca brez obremenitve. Potem je $M = 0$ in tako

$$w'' = \frac{M_T}{EI},$$

kjer je M_T dan z (27). Splošna rešitev je

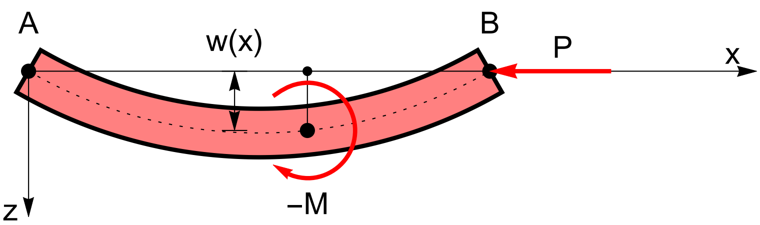
$$w(x) = -\frac{M_T}{2EI}x^2 + C_1x + C_2.$$

Robna pogoja za konzolno vpeti nosilec na krajišču $x = 0$ sta $w(0) = w'(0) = 0$. Potem je $C_1 = 0$ in $C_2 = 0$. Temperaturni upogib je

$$w(x) = -\frac{M_T}{2EI}x^2 = -\frac{1}{2}\alpha\beta(T_2 - T_1)x^2.$$

Pri $\beta > 0$ in $T_2 > T_1$ se nosilec upogne navzgor. Maksimalni upogib je pri $x = l$.

Uklon nosilca



Slika 7: Uklon členkasto podprtega nosilca.

Upogibu nosilca zaradi kompresijske osne sile pravimo uklon. Uklon je posledica nestabilnosti, ko deformacija iz osne smeri preskoči v lateralno smer. Na sliki 7 je členkasto podprt nosilec, leva podpora A je fiksna, desna B pa je drsna. Na nosilec na strani desne podpore deluje kompresijska sila P. Če pride do uklona, se nosilec upogne v lateralno smer, na naši sliki v smer osi z. Za del nosilca od x do l velja ravnovesje momentov. V polu v točki $(x, w(x))$ je moment sile P v smeri osi y enak $w(x)P$. Na odrezani del nosilca deluje upogibni moment levega dela nosilca na desni, ki je enak $-M(x)$. Ravnovesna enačba momenta je tako $wP - M = 0$. Upoštevajmo sedaj enačbo (3). Tako dobimo

$$w'' + \frac{P}{EI}w = 0. \tag{28}$$

Iščemo rešitev enačbe pri robnih pogojih

$$w(0) = w(l) = w''(0) = w''(l) = 0. \tag{29}$$

Ena rešitev je očitno trivialna rešitev $w(x) = 0$. Ta rešitev ustreza osni deformaciji. Vendar to ni edina rešitev. Hitro vidimo, da (28) reši tudi

$$w = A \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\, x\right), \tag{30}$$

saj je

$$w'' = -A\frac{P}{EI} \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\, x\right). \tag{31}$$

Iz (30) in (31) vidimo, da je $w(0) = w''(0) = 0$. Da bo (30) res iskana rešitev morata veljati še preostala robna pogoja (29). Pogoja sta izpolnjena, če je

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} = k\pi,$$

saj so ničle sinusa pri $k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Vidimo, da do uklona pride v primeru, ko osna sila P doseže kritično vrednost, ki je rešitev zgornje enačbe. Prva kritična sila je pri $k = 1$. Tako je kritična sila, ki povzroči upogib enaka

$$P_{\mathrm{k}ri} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

Ta formula je pomembna pri konstrukciji paličja, kjer moramo zagotoviti, da so vse kompresijske sile po absolutni vrednosti manjše od $P_{\mathrm{k}ri}$. Kritično vrednost lahko povečamo tako da povečamo upogibno togost ali pa da dodamo nova vozlišča s katerimi zmanjšamo dolžine palic s kompresijsko osno silo. Pri uklonu velja opozoriti, da lahko nastopi v katerikoli lateralni smeri, zato mora biti ploskovni moment preseka dovolj velik okrog poljubne smeri. To je tudi razlog pogoste uporabe nosilcev z I presekom.

Vprašanja in naloge

1. Zapiši splošno rešitev enačbe (7) za $q_0 = 0$.
2. Pokaži, da se maksimalni upogib točkovno obremenjenega nosilca na sredini za faktor 1.6 večji od upogiba linijsko obremenjenega nosilca.
3. Pokaži z računom, da (21) res reši (19).
4. Z računom pokaži, da je za $x \in (0, l/2)$ vsota upogiba enakomerno obremenjenega nosilca z gostoto q_0 in upogiba točkovno obremenjenega nosilca s silo (23) enaka upogibu enakomerno obremenjenega trotočkovno podprtega nosilca (22).
5. Zapiši robne pogoje za konzolni nosilec, ki je enakomerno linijsko obremenjen.
6. Zapiši robne pogoje za konzolni nosilec, ki je točkovno obremenjen na svojem koncu.
7. Za izračunane primere paličja zapiši pogoj, da ne pride do uklona.