Predavanja 6. maja 2020

Prostorska deformacija

Pojem deformacije smo že spoznali na primeru enoosne deformacije. Tam smo uvedli pojem mera deformacije, ki ni omejen samo na enoosno deformacijo. Če na kratko ponovimo, spoznali smo tri mere deformacije, relativno spremembo dolžine, relativno spremembo kvadrata dolžine in logaritemsko mero. Mero smo nato lokalizirali z obravnavo sprememb dolžin samo na infinitezimalno bližnje točke. Na koncu smo nato mero še linealizirali. Te korake bomo sedaj ponovili za prostorsko deformacijo.

Naj bo P s koordinatami (X, Y, Z) poljubna točka v referenčnem položaju. V izbranem koordinatnem sistemu lahko točko P predstavimo s krajevnim vektorjem $\vec{R}$. Pri deformaciji se P preslika v točko p v prostorskem položaju b. Točko p predstavimo s krajevnim vektorjem $\vec{r}$. Vektorja $\vec{R}$ in $\vec{r}$ povezuje vektor pomika $\vec{U}$ tako, da je

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{U}.$$

Različnim točkam pripada različen vektor pomika. To pomeni, da je vektor pomika funkcija referenčnega položaja P oziroma njegovih koordinat,

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{U}(\vec{R}).$$

Infinitezimalno bližnja točka P', ki ji pripada krajevni vektor $\vec{R}' = \vec{R} + d\vec{R}$ se deformira v točko p', ki ji pripada krajevni vektor

$$\vec{r}' = \vec{R} + d\vec{R} + \vec{U}(\vec{R} + d\vec{R}).$$

Potem je

$$\vec{R}' - \vec{R} = d\vec{R} \quad \text{in} \quad \vec{r}' - \vec{r} = d\vec{R} + \vec{U}(\vec{R} + d\vec{R}) - \vec{U}(\vec{R}). \tag{1}$$

Naša naloga je, da izraz $d\vec{U} = \vec{U}(\vec{R} + d\vec{R}) - \vec{U}(\vec{R})$ zapišemo kot funkcijo diferenciala $d\vec{R}$. Zapišimo $\vec{U}$, $\vec{R}$ in $d\vec{R}$ po komponentah. Potem je k-ta komponenta diferenciala $d\vec{U}$ enaka

$$\begin{aligned} dU_k &= U_k(X + dX, Y + dY, Z + dZ) - U_k(X, Y, Z) \\ &= U_k(X + dX, Y + dY, Z + dZ) - U_k(X, Y + dY, Z + dZ) \\ &+ U_k(X, Y + dY, Z + dZ) - U_k(X, Y, Z + dZ) \\ &+ U_k(X, Y, Z + dZ) - U_k(X, Y, Z). \end{aligned}$$

Potem je po definiciji parcialnega odvoda po X, Y in Z

$$dU_k = \frac{\partial U_k}{\partial X}(X_1, Y + dY, Z + dZ)dX + \frac{\partial U_k}{\partial Y}(X, Y_1, Z + dZ)dY + \frac{\partial U_k}{\partial Z}(X, Y, Z_1)dZ,$$

kjer so $X_1 \in (X, X + dX)$, $Y_1 \in (Y, Y + dY)$ in $Z_1 \in (Z, Z + dZ)$. Do prvega reda $\left|d\vec{R}\right|$ natanko je potem

$$dU_k = \frac{\partial U_k}{\partial X}(X, Y, Z)dX + \frac{\partial U_k}{\partial Y}(X, Y, Z)dY + \frac{\partial U_k}{\partial Z}(X, Y, Z)dZ.$$

Enalost velja za $k = 1, 2, 3$. Velja torej

$$\begin{bmatrix} dU_1 \\ dU_2 \\ dU_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial U_1/\partial X & \partial U_1/\partial Y & \partial U_1/\partial Z \\ \partial U_2/\partial X & \partial U_2/\partial Y & \partial U_2/\partial Z \\ \partial U_3/\partial X & \partial U_3/\partial Y & \partial U_3/\partial Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{bmatrix} \tag{2}$$

oziroma v kompaktnem zapisu

$$d\vec{U} = \mathrm{Grad}\,\vec{U} d\vec{R},$$

kjer je $\mathrm{Grad}\,\vec{U}$ gradient pomika, ki je v koordinatnem zapisu (2) dan z matriko parcialnih odvodov. Velja torej

$$\mathrm{Grad}\,\vec{U} = \begin{bmatrix} \partial U_1/\partial X & \partial U_1/\partial Y & \partial U_1/\partial Z \\ \partial U_2/\partial X & \partial U_2/\partial Y & \partial U_2/\partial Z \\ \partial U_3/\partial X & \partial U_3/\partial Y & \partial U_3/\partial Z \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Zapis matrike je odvisen od izbire koordinatnega sistema. Tu smo zaradi enostavnosti pisave $\mathrm{Grad}\,\vec{U}$ v (3) izenačili z njegovim matričnim zapisom. Gradient ima veliko črko G, ker smo paricalne odvode izračunali glede na referenčne koordinate, ki jih označujemo z velikimim črkami.

Upoštevajmo (2) v (1). Tako dobimo

$$d\vec{r} = \vec{r}' - \vec{r} = d\vec{R} + \mathrm{Grad}\,\vec{U} d\vec{R} = (\underline{\underline{i}} + \mathrm{Grad}\,\vec{U}) d\vec{R} = \underline{\underline{F}}\, d\vec{R}. \tag{4}$$

Tu smo z $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{i}} + \mathrm{Grad}\,\vec{U}$ označili *gradient deformacije*. Gradinet deformacije je izračunan v točki P.

Relativna mera deformacije je

$$\epsilon_1 = \frac{|d\vec{r}|}{\left|d\vec{R}\right|} - 1 = \frac{\left|\underline{\underline{F}}\, d\vec{R}\right|}{\left|d\vec{R}\right|} - 1.$$

Izraza naprej ne moremo poenostaviti, zato vzemimo raje Cuchyjevo mero deformacije

$$\epsilon_2 = \frac{|d\vec{r}|^2 - \left|d\vec{R}\right|^2}{\left|d\vec{R}\right|^2}.$$

Izračunajmo posebej

$$|d\vec{r}|^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = \underline{\underline{F}}\, d\vec{R} \cdot \underline{\underline{F}}\, d\vec{R} = d\vec{R} \cdot \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}}\, d\vec{R}.$$

V zadnji enakosti smo upoštevali definicijo transponiranja $\underline{\underline{F}}\,\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \underline{\underline{F}}^T \vec{b}$, ki velja za poljubna vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Upoštevajmo, da je $\left|d\vec{R}\right|^2 = d\vec{R} \cdot d\vec{R}$. Potem je

$$\epsilon_2 = \frac{d\vec{R} \cdot (\underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{i}})\, d\vec{R}}{d\vec{R} \cdot d\vec{R}} = 2\vec{e} \cdot \underline{\underline{E}}\, \vec{e}, \tag{5}$$

kjer je

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{i}})$$

deformacijski tenzor in $\vec{e} = d\vec{R} / \left|d\vec{R}\right|$. Vektor $\underline{\underline{e}}$ je enotski vektor. Formula (5) tako določa deformacijo, relativno spremembo kvadratov dolžin, v smeri enotskega vektorja $\vec{e}$. Vidimo, da deformacija lokalno določena z deformacijskim tenzorjem $\underline{\underline{E}}$. Defomacijski tenzor je brezdimenzijksi. Za majhne deformacije vemo, da je $\epsilon_2 = 2\epsilon_1$. Potem je za majhne deformacije

$$\epsilon_1 \approx \vec{e} \cdot \underline{\underline{E}}\, \vec{e}. \tag{6}$$

Izraz (6) je kvadratna forma, ki določa relativno spremembo dolžin v smeri enotskega vektorja $\vec{e}$. S tem ko poznamo deformacijski tenzor, poznamo relativno spremembo dolžin v poljubni smeri.

Deformacijski tenzor je simetričen, velja $\underline{\underline{E}}^T = \underline{\underline{E}}$ oziroma

$$\underline{\underline{E}}\,\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\underline{\underline{E}}\,\vec{b}$$

za poljubna vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Res, identiteta $\underline{\underline{i}}$ je očitno simetrična, simetričen pa je tudi produkt $\underline{\underline{F}}^T\underline{\underline{F}}$, saj je

$$\underline{\underline{F}}^T\underline{\underline{F}}\,\vec{a}\cdot\vec{b} = \underline{\underline{F}}\,\vec{a}\cdot\underline{\underline{F}}\,\vec{b} = \vec{a}\cdot\underline{\underline{F}}^T\underline{\underline{F}}\,\vec{b}.$$

Pomen komponent deformacijskega tenzorja

Podobno kot smo napetostnemu tenzorju priredili matrični zapis, priredimo matrični zapis tudi deformacijskemu tenzorju. Seveda je ta zapis odvisen od izbire koordinatnega sistema. Naj bo $\vec{e}_i$, $i = 1, 2, 3$ kartezična baza. Potem v tej bazi pripada deformacijskemu tenzorju $\underline{\underline{E}}$ matrika z elementi $E_{ij} = \vec{e}_i\cdot\underline{\underline{E}}\,\vec{e}_j$. Iz (6) sledi, da so pri majhnih deformacijah diagonalni elementi $E_{ii} = \vec{e}_i\cdot\underline{\underline{E}}\,\vec{e}_i$ deformacijskega tenzorja enaki relativnim spremembam dolžin v koordinatnih smereh.

Poiščimo še pomen izvendiagonalnih elementov. V referenčnem položaju v izbrani točki $P \in B$ vzemimo dva diferenciala $d\vec{R}_1$ in $d\vec{R}_2$. Tema dvema vektorjema v prostorskem položaju po (4) pripadata vektorja $d\vec{r}_1 = \underline{\underline{F}}\,d\vec{R}_1$ in $d\vec{r}_2 = \underline{\underline{F}}\,d\vec{R}_2$. Kosinus kota med vektorjema $d\vec{r}_1$ in $d\vec{r}_2$ je

$$\begin{aligned}
\cos\varphi = \frac{d\vec{r}_1\cdot d\vec{r}_2}{|d\vec{r}_1|\,|d\vec{r}_2|} &= \frac{\underline{\underline{F}}\,d\vec{R}_1\cdot\underline{\underline{F}}\,d\vec{R}_2}{\left|\underline{\underline{F}}\,d\vec{R}_1\right|\left|\underline{\underline{F}}\,d\vec{R}_2\right|} \\
&= \frac{d\vec{R}_1\cdot\underline{\underline{F}}^T\underline{\underline{F}}\,d\vec{R}_2}{\sqrt{d\vec{R}_1\cdot\underline{\underline{F}}^T\underline{\underline{F}}\,d\vec{R}_1}\sqrt{d\vec{R}_2\cdot\underline{\underline{F}}^T\underline{\underline{F}}\,d\vec{R}_2}} \\
&= \frac{d\vec{R}_1\cdot(2\underline{\underline{E}}+\underline{\underline{i}})\,d\vec{R}_2}{\sqrt{d\vec{R}_1\cdot(2\underline{\underline{E}}+\underline{\underline{i}})\,d\vec{R}_1}\sqrt{d\vec{R}_2\cdot(2\underline{\underline{E}}+\underline{\underline{i}})\,d\vec{R}_2}}.
\end{aligned}$$

Naj bo $d\vec{R}_1 = \left|d\vec{R}_1\right|\vec{e}_1$ in $d\vec{R}_2 = \left|d\vec{R}_2\right|\vec{e}_2$. Potem sta vektorja $d\vec{R}_1$ in $d\vec{R}_2$ med seboj pravokotna in zgornji rezultat se poenostavi v

$$\begin{aligned}
\cos\varphi &= \frac{2\left|d\vec{R}_1\right|\left|d\vec{R}_2\right|\vec{e}_1\cdot\underline{\underline{E}}\,d\vec{e}_2}{\sqrt{\left|d\vec{R}_1\right|^2(2E_{11}+1)}\sqrt{\left|d\vec{R}_2\right|^2(2E_{22}+1)}} \\
&= \frac{2E_{12}}{\sqrt{(2E_{11}+1)}\sqrt{(2E_{22}+1)}}.
\end{aligned}$$

Za majhne deformacije je sprememba dolžin majhna, zato sta člena E_{11} in E_{22} v primerjavi z 1 majhna in ju lahko v zgornji formuli zanemarimo. Tako dobimo

$$E_{12} \approx \frac{1}{2}\cos\varphi.$$

Upoštevajmo še, da sta v referenčnem položaju smeri pravokotni. Kot med φ med $d\vec{r}_1$ in $d\vec{r}_2$ potem izrazimo kot spremembo kota $\varphi = \frac{1}{2}\pi - \Delta\varphi$. Tako je

$$E_{12} \approx \frac{1}{2}\cos(\frac{1}{2}\pi - \Delta\varphi) = \frac{1}{2}\sin\Delta\varphi \approx \frac{1}{2}\Delta\varphi.$$

V zadnji enakosti smo uporabili aproksimacijo $\sin\Delta\varphi \approx \Delta\varphi$, ki velja za majhne kote $\Delta\varphi$. Podobni sklep velja tudi za ostale pare koordinatnih smeri. Izvendiagonalni elementi so torej enaki polovični spremembi kota med koordinatnimi smermi. Element E_{ij} je pozitiven, če je kot med deformiranima smerema $\vec{e}_i$ in $\vec{e}_j$ oster. Če je $E_{ij} = 0$ smeri ostaneta pravokotni, za $E_{ij} < 0$ pa je kot topi. Spremembi kota pravimo tudi *strižna deformacija*.

Komponentam deformacijskega tenzorja smo tako v primeru majhnih deformacij našli geometriski pomen. Diagonalnim elementom pravimo tudi osne deformacije, izvendiagonalnim pa strižne deformacije. V skladu s tem pomenom komponente deformacijskega tenzorja označujemo tudi na sledeči način

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \gamma_{12}/2 & \gamma_{13}/2 \\ \gamma_{12}/2 & \epsilon_{22} & \gamma_{23}/2 \\ \gamma_{13}/2 & \gamma_{23}/2 & \epsilon_{33} \end{bmatrix}.$$

Komponente γ_{ij} sedaj pomenijo spremembo kotov med koordinatnimi osmi.

Sled deformacijskega tenzorja je vsota njegovih diagonalnih elementov, $\mathrm{sl}\,\underline{\underline{E}} = E_{11} + E_{22} + E_{33}$. Sedaj bomo pokazali, da je za majhne deformacije $\mathrm{sl}\,\underline{\underline{E}}$ enaka relativni spremembi volumna. Zamislimo si v referenčnem položaju majhen paralelepiped napet na vektorje $d\vec{R}_i$, $i = 1, 2, 3$. Volumen tega paralelepipeda je $\Delta V = \left| d\vec{R}_1 \cdot (d\vec{R}_2 \times d\vec{R}_3) \right| = \left| (d\vec{R}_1, d\vec{R}_2, d\vec{R}_3) \right|$. Tu je $(d\vec{R}_1, d\vec{R}_2, d\vec{R}_3)$ mešani produkt vektorjev $d\vec{R}_i$. Vektor $d\vec{R}_i$ se preslika v $d\vec{r}_i = \underline{\underline{F}}\, d\vec{R}_i$. Volumen deformiranega paralelepipeda napetega na vektorje $d\vec{r}_i$, $i = 1, 2, 3$ je

$$\Delta v = |d\vec{r}_1 \cdot (d\vec{r}_2 \times d\vec{r}_3)| = \left| \underline{\underline{F}}\, d\vec{R}_1 \cdot (\underline{\underline{F}}\, d\vec{R}_2 \times \underline{\underline{F}}\, d\vec{R}_3) \right| = \left| (\underline{\underline{F}}\, d\vec{R}_1, \underline{\underline{F}}\, d\vec{R}_2, \underline{\underline{F}}\, d\vec{R}_3) \right|. \tag{7}$$

Mešani produkt treh vektorjev je enak determinanti matrike, ki ima za stolpce komponente teh treh vektorjev. Potem je

$$(\underline{\underline{F}}\, d\vec{R}_1, \underline{\underline{F}}\, d\vec{R}_2, \underline{\underline{F}}\, d\vec{R}_3) = \det \left[\underline{\underline{F}}\, d\vec{R}_1, \underline{\underline{F}}\, d\vec{R}_2, \underline{\underline{F}}\, d\vec{R}_3 \right],$$

kjer smo z oglatim oklepajem označili matriko s stolpci $\underline{\underline{F}}\, d\vec{R}_i$, $i = 1, 2, 3$. Po pravilu množenja matrike z matriko je i-ti stolpec produkta dveh matrik enak produktu prve matrike z i-tim stolpcem druge matrike. Tako je

$$\left[\underline{\underline{F}}\, d\vec{R}_1, \underline{\underline{F}}\, d\vec{R}_2, \underline{\underline{F}}\, d\vec{R}_3 \right] = \underline{\underline{F}} \left[d\vec{R}_1, d\vec{R}_2, d\vec{R}_3 \right].$$

Sedaj upoštevamo, da je determinanta produkta dveh matrik enaka produktu njunih determinant. Potem je

$$\left| (\underline{\underline{F}}\, d\vec{R}_1, \underline{\underline{F}}\, d\vec{R}_2, \underline{\underline{F}}\, d\vec{R}_3) \right| = \left| \det \underline{\underline{F}} \det \left[d\vec{R}_1, d\vec{R}_2, d\vec{R}_3 \right] \right| = \left| \det \underline{\underline{F}} \right| \Delta V.$$

Upoštevajmo ta izračun v (7). Tako dobimo

$$\Delta v = \left| \det \underline{\underline{F}} \right| \Delta V = \left| \det(\underline{\underline{i}} + \operatorname{Grad} \vec{U}) \right| \Delta V. \tag{8}$$

Formula (8) velja za poljubno deformacijo. Omejimo se sedaj na majhne deformacije. Prvo zapišimo

$$\det(\underline{\underline{i}} + \operatorname{Grad} \vec{U}) = \begin{vmatrix} 1 + \partial U_1/\partial X & \partial U_1/\partial Y & \partial U_1/\partial Z \\ \partial U_2/\partial X & 1 + \partial U_2/\partial Y & \partial U_2/\partial Z \\ \partial U_3/\partial X & \partial U_3/\partial Y & 1 + \partial U_3/\partial Z \end{vmatrix}$$

Determinanto izračunamo kot vsoto produktov z ustreznim predznakom tako, da iz vsake vrstice in stolpca vzamemo po en element. Potem je za majhne deformacije

$$\det(\underline{\underline{i}} + \operatorname{Grad} \vec{U}) \approx 1 + \partial U_1/\partial X + \partial U_2/\partial Y + \partial U_3/\partial Z,$$

kjer smo zanemarili člene, ki so enaki produktu dveh ali treh členov s parcialnimi odvodi komponent U_i po X, Y ali Z. Upoštevajmo to v (8)

$$\Delta v \approx |1 + \partial U_1/\partial X + \partial U_2/\partial Y + \partial U_3/\partial Z|\, \Delta V = \left|1 + \operatorname{sl} \underline{\underline{E}}\right| \Delta V = (1 + \operatorname{sl} \underline{\underline{E}})\Delta V.$$

V zadnji enakosti smo upoštevali, da je deformacija majhna in je zato $1 + \operatorname{sl} \underline{\underline{E}} > 0$. Potem je za majhne deformacije relativna sprememeba volumna enaka

$$\frac{\Delta v - \Delta V}{\Delta V} = \operatorname{sl} \underline{\underline{E}}.$$

Infinitezimalen deformacijski tenzor

Deformacijski tenzor je dan z izrazom $\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{i}})$, kjer je $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{i}} + \operatorname{Grad} \vec{U}$. Potem je

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}\left((\underline{\underline{i}} + \operatorname{Grad} \vec{U})^T (\underline{\underline{i}} + \operatorname{Grad} \vec{U}) - \underline{\underline{i}}\right) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{Grad} \vec{U} + (\operatorname{Grad} \vec{U})^T + (\operatorname{Grad} \vec{U})^T \operatorname{Grad} \vec{U}\right).$$

Vidimo, da je $\underline{\underline{E}}$ nelinearno odvisen od pomika $\vec{U}$. Pri velikih deformacijah moramo upoštevati nelinearni člen $(\operatorname{Grad} \vec{U})^T \operatorname{Grad} \vec{U}$. Pri majhnih deformacijah pa lahko ta nelinearni člen zanemarimo. Tenzorju brez tega člena pravimo *infinitezimalni deformacijski tenzor*

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{Grad} \vec{U} + (\operatorname{Grad} \vec{U})^T\right).$$

Marični zapis infinitezimalnega deformacijskega tenzorja je

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial X} & \frac{1}{2}(\frac{\partial U_1}{\partial Y} + \frac{\partial U_2}{\partial X}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial U_1}{\partial Z} + \frac{\partial U_3}{\partial X}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial U_1}{\partial Y} + \frac{\partial U_2}{\partial X}) & \frac{\partial U_2}{\partial Y} & \frac{1}{2}(\frac{\partial U_2}{\partial Z} + \frac{\partial U_3}{\partial Y}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial U_1}{\partial Z} + \frac{\partial U_3}{\partial X}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial U_2}{\partial Z} + \frac{\partial U_3}{\partial Y}) & \frac{\partial U_2}{\partial Y} \end{bmatrix}.$$

Razložiti moramo še, kaj sploh je majhna deformacija. Pogoj, da je deformacija majhna ni enak pogoju, da je pomik majhen. Pomik je lahko velik, deformacija pa je še vedno lahko majhna. Nenazadnje, če je pomik togi, je deformacija enaka nič ne glede kako velik je togi pomik. Prav tako majhen pomik, ko govorimo o majhnem pomiku mislimo na to, da je kvocient velikosti pomika z dimenzijo telesa majhen, ne zagotavlja majhne deformacije. Spomnimo se samo na funkcijo $\sin nx$. Očitno je vedno $|\sin nx| \leq 1$, njen odvod pa je lahko zelo velik za velik n. Majhna deformacija je torej deformacija za katero je gradient pomika $\operatorname{Grad} \vec{U}$ majhen. To pomeni, da so v komponentnem zapisu parcialni odvodi komponent pomika majhni. Če primerjamo deformacijski tenzor in infinitezimalni deformacijski tenzor je

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{\epsilon}} + \frac{1}{2}(\operatorname{Grad} \vec{U})^T \operatorname{Grad} \vec{U}.$$

Pri majhnih deformacijah sta oba tenzorja majha. Razlika je v tem, da smo pri infinitezimalnem deformacijskem tenzorju zanemarili produkt dveh majhnih količin, to je člen $(\operatorname{Grad} \vec{U})^T \operatorname{Grad} \vec{U}$. Člene, ki so enaki produktu dveh majhnih količin imenujemo majhne količine drugega reda. Podobno imenujemo majhne količine višjih redov. Iz znanega deformacijskega tenzorja infinitezimalni deformacijski tenzor dobimo tako, da zanemarimo vse majhne količine drugega ali višjega reda.

Vektor pomika $\vec{U}$ smo definirali na referenčnem položaju. Definicijo $\vec{U}(P)$ lahko prenesemo na prostorski položaj. Naj točki p prostorskega položaja pripada refrenčni položaj P. Definirajmo $\vec{u}(p) = \vec{U}(P)$ oziroma $\vec{u}(\vec{r}) = \vec{U}(\vec{R})$, kjer sta $\vec{R}$ in $\vec{r}$ krajevna vektorja do P in p. Upoštevajmo, da je $\vec{r} = \vec{R} + \vec{U}(\vec{R})$. Potem je

$$\left|\vec{U}(\vec{r}) - \vec{U}(\vec{R})\right| = \left|\vec{U}(\vec{R} + \vec{U}) - \vec{U}(\vec{R})\right| = O((\operatorname{Grad} \vec{U})\vec{U}).$$

Tu smo s simbolom veliki O označili velikostni red argumenta simbola O. Če je deformacija majhna, se $\vec{U}(\vec{r})$ in $\vec{U}(\vec{R}) = \vec{u}(\vec{r})$ malo razlikujeta. Potemtakem je pri majhnih deformacijah funkcija pomika na prostorskem položaju kar enaka funkciji pomika na referenčnem položaju. Velja torej

$$\vec{u}(\vec{r}) = \vec{U}(\vec{r}).$$

V nadaljevanju se bomo omejili na majhne deformacije in bomo tam, kjer ne bo nevarnosti za zmedo infinitezimalni deformacijski tenzor na kratko imenovali kar deformacijski tenzor. Pomen komponent infinitezimalnega deformacijskega tenzorja je enak pomenu komponent deformacijskega tenzorja. Relativna sprememba dolžin v smeri enotskega vektorja $\vec{e}$ je tako enaka

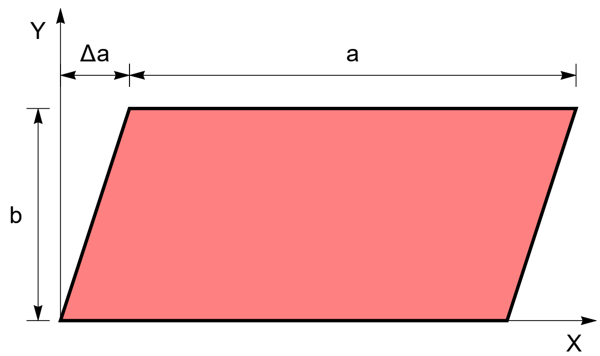
$$\epsilon_1 = \vec{e} \cdot \underline{\underline{\epsilon}}\, \vec{e}. \tag{9}$$

Za matriko infinitezimalnega deformacijskega tenzorja bomo tudi uporabljali zapis

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \gamma_{12}/2 & \gamma_{13}/2 \\ \gamma_{12}/2 & \epsilon_{22} & \gamma_{23}/2 \\ \gamma_{13}/2 & \gamma_{23}/2 & \epsilon_{33} \end{bmatrix}.$$

Primer

Pravokotnik dimenzija $a \times b$ se deformira v romboid tako kot kaže slika 1. Privzeli bomo, da je deformacija majhna, da je $\Delta a/b$ majhna količina. Na sliki zaradi boljse predstave deformacija ni majhna. Naša naloga je poiskati deformacijski tenzor. Nalogo bomo rešili na dva načina.



Slika 1: Strižna deformacija pravokotnika.

- Prvi bo geometrijski, kjer bomo upoštevali pomen komponent deformacijskega tenzorja za majhne deformacije. Postavimo koordinatni sistem z osema X in Y v smeri stranic pravokotnika, os Z pa pravokotno na ravnino XY. V smeri Z ni deformacije, zato so komponente E_{13}, E_{23} in E_{33} deformacijskega tenzorja enake nič. Komponenta E_{11} je enaka relativni spremembi v smeri osi X. Kot vidimo na sliki se dolžina X stranice ne spremeni, zato je $E_{11} = 0$. Določimo sedaj E_{22}. Stranica z dolžino b se deformira v stranico romboida z dolžino $\sqrt{b^2 + (\Delta a)^2}$. Potem je

$$E_{22} = \frac{\sqrt{b^2 + (\Delta a)^2}}{b} - 1 = \sqrt{1 + (\Delta a/b)^2} - 1. \tag{10}$$

Sedaj upoštevamo, da je

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x \quad \text{za} \quad |x| << 1. \tag{11}$$

Ta ocena sledi iz enakosti

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(\xi)h, \qquad \xi \in (x_0, x_0 + h)$$

za funkcijo $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$ in $h = x$. Potem lahko (10) zapišemo v obliki

$$E_{22} = \sqrt{1 + (\Delta a/b)^2} - 1 = \frac{1}{2}(\Delta a/b)^2.$$

Določiti moramo še izvendiagonalni element E_{12}. Pri majhnih deformacijah je enak polovični spremembi kota med osema X in Y. Iz slike vidimo, da je

$$\tan \Delta\varphi = \frac{\Delta a}{b}.$$

Za majhne kote je $\tan \Delta\varphi \approx \sin \Delta\varphi \approx \Delta\varphi$. Potem je

$$E_{12} = \frac{1}{2}\frac{\Delta a}{b}.$$

Deformacijski tenzor je potemtakem enak

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\Delta a/b & 0 \\ \frac{1}{2}\Delta a/b & \frac{1}{2}(\Delta a/b)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Infinitezimalni deformacijski tenzor pa je

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\Delta a/b & 0 \\ \frac{1}{2}\Delta a/b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dobili smo ga iz $\underline{\underline{E}}$ tako, da smo zanemarili majhne količine drugega reda.

- Deformacijski tenzor bomo določili preko funkcije pomika. Iz slike vidimo, da se daljice pravokotnika, ki so vzporedne osi X pomaknejo v desno. Pomik narašča linearno z Y. Na začetku je enak nič, na vrhu pa Δa. Funkcija pomika je torej

$$\vec{U} = \frac{\Delta a}{b} Y \vec{\imath}.$$

Velja torej $U_1 = \frac{\Delta a}{b} Y$ in $U_2 = U_3 = 0$. Matrika gradient pomika je po (3) sestavljena iz parcialnih odvodov. Edini neničelni parcialni odvod je

$$\frac{\partial U_1}{\partial Y} = \frac{\Delta a}{b}.$$

Potem je

$$\mathrm{Grad}\,\vec{U} = \begin{bmatrix} 0 & \Delta a/b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vidimo, da je gradient pomika konstanten oziroma neodvisen od položaja. Deformaciji za katero je gradient pomika konstanten pravimo *homogena deformacija*.

Infinitezimalni deformacijski tenzor je

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Grad}\,\vec{U} + (\mathrm{Grad}\,\vec{U})^T\right) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\Delta a/b & 0 \\ \frac{1}{2}\Delta a/b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

kar se seveda ujema z rešitvijo po prvi poti.

Po kratkem računu dobimo

$$(\mathrm{Grad}\,\vec{U})^T\,\mathrm{Grad}\,\vec{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\Delta a/b)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Potem je

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{\epsilon}} + \frac{1}{2}(\mathrm{Grad}\,\vec{U})^T\,\mathrm{Grad}\,\vec{U} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\Delta a/b & 0 \\ \frac{1}{2}\Delta a/b & \frac{1}{2}(\Delta a/b)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Deformacijski tenzor smo tako določili. Za primer njegove uporabe izračunajmo spremembo dolžine diagonale pravokotnika. Označimo z D dolžino diagonale v referenčnem položaju in z d v deformiranem. Iz slike hitro vidimo

$$D = \sqrt{a^2+b^2} \quad \text{in} \quad d = \sqrt{(a+\Delta a)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + 2a\Delta a + b^2 + (\Delta a)^2}.$$

Relativna sprememba dolžin je

$$\epsilon_1 = \frac{d}{D} - 1 = \sqrt{\frac{a^2 + 2a\Delta a + b^2 + (\Delta a)^2}{a^2+b^2}} - 1 = \sqrt{1 + \frac{2a\Delta a + (\Delta a)^2}{a^2+b^2}} - 1 \approx \frac{a\Delta a}{a+b^2}.$$

V zadnjem koraku smo uporabili aproksimacijo (11).

Poglejmo še kakšna je relativna sprememba kvadratov dolžin

$$\epsilon_2 = \frac{d^2 - D^2}{D^2} = \frac{2a\Delta a + (\Delta a)^2}{a^2+b^2}.$$

Ponovno vidimo, da je za majhne deformacije $\epsilon_2 \approx 2\epsilon_1$.

Sedaj izračunajmo relativno spremembo dolžine diagonale s pomočjo formul (5) in (6). Prvo moramo določiti enotski vektor v smeri diagonale pravokotnika. Ta je

$$\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ne pozabimo, vektor smeri mora biti normiran. Potem je

$$\begin{aligned} \epsilon_2 = 2\vec{e}\cdot\underline{\underline{E}}\,\vec{e} &= \frac{2}{a^2+b^2} \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\Delta a/b & 0 \\ \frac{1}{2}\Delta a/b & \frac{1}{2}(\Delta a/b)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{a^2+b^2} \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta a \\ a\Delta a/b + (\Delta a)^2/b \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2a\Delta a + (\Delta a)^2}{a^2+b^2}. \end{aligned}$$

Rezultat se ujema z izračunom po geometrijski poti.

Preverimo še izračun relativne spremembe dolžin. Sedaj je

$$\begin{aligned} \epsilon_1 = \vec{e}\cdot\underline{\underline{\epsilon}}\,\vec{e} &= \frac{1}{a^2+b^2} \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\Delta a/b & 0 \\ \frac{1}{2}\Delta a/b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{a^2+b^2} \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\Delta a \\ \frac{1}{2}a\Delta a/b \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{a\Delta a}{a^2+b^2}, \end{aligned}$$

kar se tudi ujema z že izračunanim.

Osnovni načini deformacije

Podobno kot pri napetosti definiramo osnovna deformacijska stanja. Omejili se bomo na majhne deformacije in pripadajoči infinitezimalni deformacijski tenzor.

1. Enoosna deformacija. To deformacijo že poznamo. V koordinatnem sistemu, ki ima os X v smeri osi deformacije je pomik oblike $\vec{U} = U_1(X)\vec{\imath}$. Edini neničelni element matrike $\mathrm{Grad}\,\vec{U}$ je element $\partial U_1/\partial X = dU_1/dX$. Tu smo parcialni odvod zamenjali z navadnim odvodom, ker je U_1 funkcija samo spremenljivke X. Infinitezimalni deformacijski tenzor zapišemo z matriko
$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
kjer je $\epsilon = \frac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}X}$. Deformacijski tenzor $\underline{\underline{E}}$ je enake oblike, edini neničelni element E_{11} pa je $E_{11} = \epsilon + \frac{1}{2}\epsilon^2$. Relativna sprememba dolžin v smeri $\vec{e} = e_1\vec{\imath} + e_2\vec{\jmath} + e_3\vec{k}$ je po formuli (6) enaka ϵe_1^2. Očitno je največja deformacija v smeri osi deformacije. V kateri smeri je največja sprememba kota bomo spoznali pri obravnavi ekstremalnih lastnosti deformacijskega tenzorja.

2. *Strižna deformacija.* Deformacija je strižna, če je sled deformacijskega tenzorja enaka nič. Ker je sled enaka nič, strižna deformacija ohranja volumen. Za primer si poglejmo deformacijo, ki ji bazi $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ in $\vec{k}$ pripada matrika
$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
Poglejmo kakšna matrika pripada tej deformaciji v koordinatnem sistemu, ki ima bazne vektorje $\vec{\imath}\,' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath}+\vec{\jmath})$ $\vec{\jmath}\,' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{\imath}+\vec{\jmath})$ in $\vec{k}\,' = \vec{k}$. Matriko v novi bazi označimo z $\mathbf{e}'$, njene elemente pa z ϵ'_{ij}. Izračunajmo
$$\epsilon'_{11} = \vec{\imath}\,' \cdot \underline{\underline{\epsilon}}\,\vec{\imath}\,' = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tau \\ -\tau \\ 0 \end{bmatrix} = 0,$$
$$\epsilon'_{22} = \vec{\jmath}\,' \cdot \underline{\underline{\epsilon}}\,\vec{\jmath}\,' = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\tau \\ -\tau \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$
in
$$\epsilon'_{12} = \vec{\imath}\,' \cdot \underline{\underline{\epsilon}}\,\vec{\jmath}\,' = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\tau \\ -\tau \\ 0 \end{bmatrix} = -\tau$$
Ostale komponente so očitno enake nič. Iskana matrika je
$$\mathbf{e}' = -\begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
Pri strižni deformaciji pride do spremembe kota med smerema $\vec{\imath}\,'$ in $\vec{\jmath}\,'$. Kot se poveča za 2τ.

3. *Enakomerna deformacija.* Deformacijski tenzor enakomerne deformacije je $\underline{\underline{\epsilon}} = \epsilon\underline{\underline{i}}$. Enakomerna deformacija povzroči relativno spremembo volumna $\epsilon\,\mathrm{sl}\,\underline{\underline{i}} = 3\epsilon$. Relativne spremembe

dolžin so v vse smeri enake. Pravimo, da je deformacija *izotropična*. Sprememb kotov ni. Naj bosta $\vec{e}$ in $\vec{f}$ dva enotska med seboj pravokotna vektorja. Sprememba kota pri deformaciji med smerema $\vec{e}$ in $\vec{f}$ je enaka

$$\Delta\varphi = 2\vec{e} \cdot \underline{\underline{\epsilon}}\,\vec{f} = 2\epsilon\vec{e} \cdot \underline{\underline{i}}\,\vec{f} = 2\epsilon\vec{e} \cdot \vec{f} = 0,$$

saj sta vektorja med seboj pravokotna.

Poljubno deformacijo lahko zapišemo v obliki

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{3}(\mathrm{sl}\,\underline{\underline{\epsilon}})\underline{\underline{i}} + \left(\underline{\underline{\epsilon}} - \frac{1}{3}(\mathrm{sl}\,\underline{\underline{\epsilon}})\underline{\underline{i}}\right). \tag{12}$$

Prvi del je enakomerna deformacija, drugi pa je strižna deformacija, saj je njegova sled enaka

$$\mathrm{sl}\left(\underline{\underline{\epsilon}} - \frac{1}{3}(\mathrm{sl}\,\underline{\underline{\epsilon}})\underline{\underline{i}}\right) = \mathrm{sl}\,\underline{\underline{\epsilon}} - \frac{1}{3}\,\mathrm{sl}\,\underline{\underline{\epsilon}}\,\mathrm{sl}\,\underline{\underline{i}} = \mathrm{sl}\,\underline{\underline{\epsilon}} - \mathrm{sl}\,\underline{\underline{\epsilon}} = 0.$$

Tu smo upoštevali, da je sled tenzorja linearna preslkava, da velja $\mathrm{sl}(\underline{\underline{a}} + \underline{\underline{b}}) = \mathrm{sl}\,\underline{\underline{a}} + \mathrm{sl}\,\underline{\underline{b}}$ in $\mathrm{sl}\,\alpha\underline{\underline{a}} = \alpha\,\mathrm{sl}\,\underline{\underline{a}}$. Tenzorju z ničelo sledjo pravimo *deviatorični tenzor*. Poljubni deformacijski tenzor lahko torej zapišemo kot vsoto enakomerne deformacije in srižne deformacije. Razcep (12) velja seveda za poljubni tenzor. Poljubni tenzor lahko torej zapišemo kot vsoto krogelnega in deviatoričnega tenzorja.

4. *Ravninska deformacija.* Deformacijsko stanje je ravninsko, če obstaja tak koordinatni sistem, da je pripadajoča matrika deformacijskega tenzorja oblike

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & 0 \\ e_{12} & e_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & \frac{1}{2}\gamma & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ravninsko deformacijsko stanje nastopi, ko je pomik ravninski in je samo odvisen od ravninskih koordinat. V ndaljevanju se bomo večinoma omejili na ravninske deformacije.

Relativna sprememba dolžin v smeri enotskega vektorja $\vec{e} = \cos\varphi\vec{\imath} + \sin\varphi\vec{\jmath}$ je po formuli (9) enaka

$$\begin{aligned}
\epsilon = \vec{e} \cdot \underline{\underline{\epsilon}}\,\vec{e} &= \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & 0 \\ e_{12} & e_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_{11}\cos\varphi + e_{12}\sin\varphi \\ e_{12}\cos\varphi + e_{22}\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= e_{11}\cos^2\varphi + e_{12}\sin 2\varphi + e_{22}\sin^2\varphi \\
&= \frac{1}{2}(e_{11} + e_{22}) + \frac{1}{2}(e_{11} - e_{22})\cos 2\varphi + e_{12}\sin 2\varphi.
\end{aligned}$$

Če poznamo relativno spremembo dolžin v treh smereh, potem lahko s pomočjo zgornje formule določimo ravninski deformacijski tenzor.

Vprašanja in naloge

1. Izračunaj parcialne odvode funkcije $f(X, Y, Z) = XY^2 \sin Z$.

2. Naj bo $\mathbf{a}$ matrika reda 2×2. Z računom pokaži, da je $\vec{a} \cdot \mathbf{a}\,\vec{b} = \mathbf{a}^T\vec{a} \cdot \vec{b}$ za poljubna vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

3. Pokaži, da res velja $\mathrm{sl}(\alpha\underline{\underline{a}} + \beta\underline{\underline{b}}) = \alpha\,\mathrm{sl}\,\underline{\underline{a}} + \beta\,\mathrm{sl}\,\underline{\underline{b}}$.

4. Opiši deformacijo. ki ima deformacijski tenzor

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Za strižno deformacijo pravokotnika $a \times b$, kjer je $a = 3\,\mathrm{cm}$, $b = 2\,\mathrm{cm}$ in $\Delta a = 1\,\mathrm{mm}$ izračunaj razliko med dejansko relativno spremembo dolžine diagonale in spremembo, ki jo dobimo z uporabo deformacijskega tenzorja.