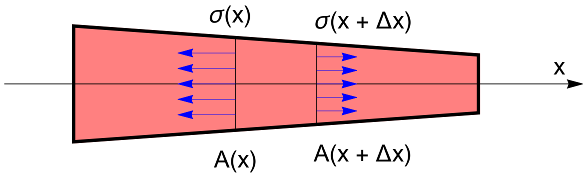
Predavanja 14. aprila 2021

Ravnovesna enačba

Izpeljali bomo ravnovesno enačbo za enoosno napetost $\sigma(x)$. Naj bo napetost v palici na sliki 1 enoosna. Ta napetost je posledica volumenske osne sile, ki deluje v smeri palice. Os palice označimo z x, enotski vektor v smeri palice pa z $\vec{\imath}$. Dolžinsko gostoto osne sile označimo s $p(x)$. Na vsak del palice z dolžino Δx tako deluje sila $d\vec{F} = p\Delta x\vec{\imath}$. Enota $p(x)$ je [N/m]. Dolžinska gostota sile teže v smeri osi x je $g\rho(x)A(x)$, kjer je ρ masna gostota.



Slika 1: Navidezni prerez med x in $x + \Delta x$.

Palico navidezno prerežemo pri x in $x + \Delta x$. Odrezani del je v ravnovesju, zato veljajo ravnovesne enačbe. Na odrezani del deluje z desne površinska sila $\sigma(x + \Delta x)A(x + \Delta x)$ v smeri osi x, z leve pa v nasprotni smeri $\sigma(x)A(x)$. Ravnovesna enačba v smeri osi x je tako

$$\sigma(x + \Delta x)A(x + \Delta x) - \sigma(x)A(x) + \int_x^{x+\Delta x} p(s)\,\mathrm{d}s = 0 \tag{1}$$

Tu smo upošteval, da je volumenska sila razporejena po celem voulmnu. Enačbo delimo z Δx

$$\frac{\sigma(x + \Delta x)A(x + \Delta x) - \sigma(x)A(x)}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} p(s)\,\mathrm{d}s = 0$$

in poženimo Δx proti 0. Kaj sledi, že dobro vemo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}A\sigma + p(x) = 0. \tag{2}$$

To je ravnovesna enačba za sile v smeri osi x. Ravnovesni enačbi v ostali dve smeri sta trivialni, saj v teh smereh ni obremenitev. Pri tihi predpostavki, da je os x os simetrije tako, da imajo vse rezultante obremenitve v smeri osi x prijemališča na osi x je tudi momentna enačba trivialna $\vec{0} = \vec{0}$.

Pri znani obremenitvi $p(x)$ in preseku $A(x)$ enačba (2) določa potek napetosti vzdolž osi x. Določimo še osno deformacijo palice. Po Hookovem zakonu je $\sigma = E\epsilon$. Izrazimo deformacijo s pomikom $\epsilon = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$. Praviloma bi morali zapisati $\epsilon = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}X}$, saj je pomik določen na referenčnem položaju. Vendar vemo, da je pomik majhen, zato lahko v okviru infinitezimalne teorije na pomik gledamo kot na funkcijo prostorskega položaja in tako izrazimo pomik z $u = u(x)$. Tako iz (2) dobimo enačbo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(AE\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) + p(x) = 0. \tag{3}$$

Produkt AE imenujemo osna togost. Njena enota je [N]. Pri znani obremenitvi $p(x)$ in preseku $A(x)$ enačba (3) določa pomik u. Enačba velja za majhne pomike, prvič, ker smo deformacijo izrazili z relativno spremembo dolžin in drugič, ker Hookov zakon velja samo za majhne pomike. Enačba je diferencialna enačba druge stopnje. Rešitev je enolično določena z robnim pogojem, ki določa pomik ali njegov odvod na robu. Na koncu, kjer je palica pritrjena, je pomik enak nič. Na prostem koncu pa je napetost enaka nič. Potem iz Hookovega zakona sledi, da je na prostem koncu odvod pomika po x enak nič, $du/dx = 0$.

Primeri

Razteg zaradi lastne teže

Homogeno palico dolžine l s konstantnim presekom A_0 in Youngovim modulom E obesimo na strop, da palca prosto visi. Zanima nas razteg palice zaradi lastne teže. Razteg palice bo majhen, zato jo lahko določimo s pomočjo (3).

Postavimo koordinatno os x v smeri delovanja sile teže. Na stropu pri $x = 0$ je palica pritrjena, zato je $u(x = 0) = 0$. Drugi konec palice prosto visi, zato je $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x = l') = 0$. Tu smo z l' zapisali raztegnjeno dolžino palice. Ker pa je deformacija majhna, smemo uporabiti pogoj $du/dx(x = l) = 0$.

Dolžinska gostota sile teže je $p = \rho_0 g A_0$, kjer je ρ_0 masna gostota. Iz (3) tako dobimo enačbo

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{\rho_0 g}{E}. \tag{4}$$

Potem je

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\frac{\rho_0 g}{E}x + C_1 \tag{5}$$

in

$$u = -\frac{\rho_0 g}{2E}x^2 + C_1 x + C_2. \tag{6}$$

Iz robnega pogoja $u(x = 0) = 0$ takoj sledi $C_2 = 0$. Uporabimo še pogoj $du/dx(x = l) = 0$ na prostem koncu. Iz (5) potem sledi

$$C_1 = \frac{\rho_0 g}{E}l.$$

Rešitev je tako

$$u = \frac{\rho_0 g}{E}(l - x/2)\,x. \tag{7}$$

Pomik na koncu je

$$u(x = l) = \frac{\rho_0 g l^2}{2E} = \frac{mgl}{2A_0 E}, \tag{8}$$

kjer je $m = \rho_0 A_0 l$ masa palice. Palica se torej podaljša za $\Delta l = \frac{mgl}{2A_0 E}$. Poglejmo konkretni primer za aluminijasto palico dolžine 1 m. Potem je $E = 69\,\mathrm{GPa}$ in $\rho_0 = 2.7\,\mathrm{g/cm^3}$. Iz (8) potem sledi, da je

$$\Delta l = \frac{2.7 \times 10^{-3} \times 9.8 \times \mathrm{kgm^5}}{10^{-6} \times 2 \times 69 \times 10^9 \times \mathrm{m^3 s^2 N}} = 1.9 \times 10^{-7}\mathrm{m}.$$

Razteg zaradi lastne palce je res majhen.

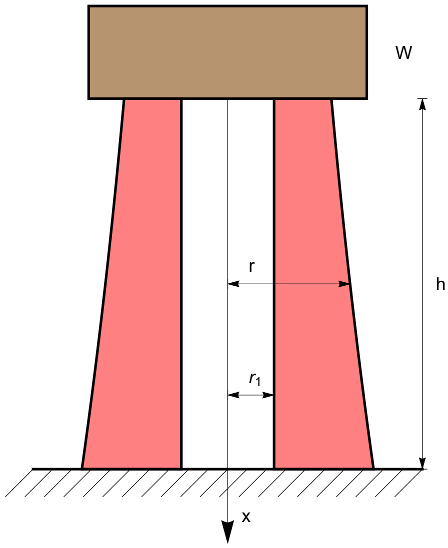
Iz (8) sledi, da se palica zaradi lastne teže raztegne za polovico manj. Res, če palico na koncu obremenimo s silo teže $F = mgh$, nastopi v palici osna napetost $\sigma = mg/A_0$. Po Hookovem zakonu $\epsilon = \sigma/E$ je potem

$$\Delta l = l\epsilon = \frac{mgl}{A_0 E},$$

kar je za faktor 2 več kot (8).

Problem stolpa

Slika kaže presek rotacijsko simetričnega stolpa. Stolp ima votlino s polmerom r_1. Na vrhu stolpa je vodni rezervar s težo W. Določiti moramo tako debelino stene stolpa, da bo osna napetost v steni stolpa konstantna. Pri tem moramo upoštevati težo stene. Ker stena pri tleh nosi tudi težo stolpa, mora biti stena pri tleh debelejša.
Postavimo os x navpično navzdol. Z debelino sten se spreminja ploščina preseka $A(x)$. Stolp je tlačno obremenjen, zato je napetost negativna. Velja torej $\sigma(x) = -\sigma_0$, kjer je σ_0 pozitivna konstantna enaka dopustni tlačni napetosti. Na stene stolpa deluje lstna teža. Njena dolžinska gostota je $p(x) = \rho_0 g A(x)$. Tu je ρ_0 masna gostota materiala iz katerega so narejene stene.



Slika 2: Presek vodnega stolpa.

Zapišimo enačbo (2)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} A\sigma = -p = -\rho_0 g A$$

in upoštevajmo, da je $\sigma(x) = -\sigma_0$. Tako dobimo

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = \frac{\rho_0 g}{\sigma_0} A.$$

Dobljena enačba je diferencialna enačba za neznano površino $A(x)$. Odvod $A(x)$ je sorazmeren vrednosti $A(x)$. Pri obravnavi trenja vrvi na kolutu smo spoznali, da se rešitev take enačbe izraža z eksponentno funkcijo. V našem primeru je rešitev

$$A(x) = C\, \mathrm{e}^{\rho_0 g x/\sigma_0}\,.$$

Označimo površino preseka pri $x = 0$ z A_0. Potem je $C = A_0$ in

$$A(x) = A_0\, \mathrm{e}^{\rho_0 g x/\sigma_0}\,.$$

Površina preseka $A(x)$ je enaka $\pi(r^2(x) - r_1^2)$, kjer je r_1 notranji in $r(x)$ zunanji polmer stene. Tako je

$$r^2(x) = r_1^2 + \frac{W}{\pi\sigma_0}\, \mathrm{e}^{\rho_0 g x/\sigma_0}\,.$$

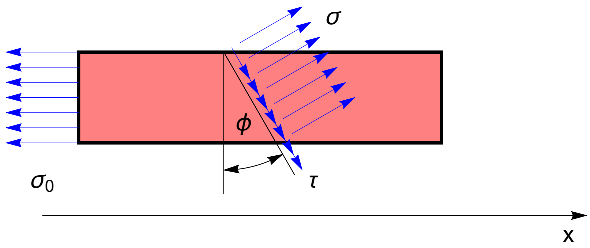
Tu smo upoštevali, da je $\sigma_0 = W/A_0$. Debelina stene narašča eksponentno z višino stolpa. To predstavlja pri visokih stolpih resen problem, zato gradnja visokih konstrukcij ni poceni. Rast debeline je odvisna od kvocienta ρ_0/σ_0. Konstanto σ_0 določa pogoj, da je kompresijska napetost manjša od kompresijske trdnosti oziroma meje tečenja. Če pogledamo tabelo 1 za tri materiale, les, jeklo in beton, vidimo, kako dober konstrukcijski material je les. Ni drag in ima majhen kvocient ρ_0/σ_0. Seveda pa je pri izbiri materiala pomembno upoštevati tudi stroške vzdrževanja.

Tabela 1: Tabela kvocienta ρ_0/σ_0.

material	$\rho_0[\mathrm{g/cm^3}]$	$\sigma_0[\mathrm{Mpa}]$	$\rho_0/\sigma_0 \times 10^{-6}[\mathrm{s^2/m^2}]$
Beton	1.5	50	30
Jeklo	7.8	500	15.6
Les	0.5	45	11.1

Napetostni tenzor

Poševni presek palice



Slika 2: Poševni navidezni prerez.

Do sedaj smo palico vedno navidezno prerezali z ravnino, ki je bila pravokotna na os palice. Presekajmo jo sedaj postrani pod kotom ϕ, glej sliko 2. Kot vedno postavimo koordinatno os x v smeri osi palice. Normalo na ravnino preseka označimo z $\vec{n}$. Hitro vidimo, da je $\vec{n} = \cos\phi\vec{\imath} + \sin\phi\vec{\jmath}$, kjer os $\vec{\jmath}$ kaže navzgor. Zapišimo še vektor v smeri preseka $\vec{m} = \sin\phi\vec{\imath} - \cos\phi\vec{\jmath}$. Vektor $\vec{m}$ ima komponento v smeri navzdol.

Odrezani del je v ravnovesju. Na njega delujejo površinske sile. Na levi deluje površinska sila z gostoto σ v levo, na poševnem preseku pa ima površinska sila dve komponenti. Komponento v smeri normale označimo z σ, komponento v smeri $\vec{m}$ pa s τ. Komponento v normalni smeri imenujemo *normalna napetost*, komponento v smeri ravnine pa *strižna napetost*. Označimo še površini preseka. Na levi z A, na desni pa z A_*. Ker je presek na desni pod kotom ϕ je $A_* = A/\cos\phi$. Ravnovesna enčba se tako glasi

$$-\sigma_0 A\vec{\imath} + \sigma A_*\vec{n} + \tau A_*\vec{m}.$$

Oo krajšem računu dobimo komponentni zapis v smeri baze $\vec{\imath}$ in $\vec{\jmath}$

$$\begin{aligned} -\sigma_0 + \sigma + \tau\tan\phi &= 0 \\ \sigma A\sin\phi - \tau\cos\phi &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Potem je $\tau = \sigma\tan\phi$. Vstavimo to v prvo enačbo v (9). Tako dobimo

$$\sigma_0 = (1 + \tan^2\phi)\sigma = \frac{\sigma}{\cos^2\phi}.$$

Potem je

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_0\cos^2\phi = \frac{1}{2}\sigma_0(1 + \cos 2\phi) \\ \tau &= \sigma_0\sin\phi\cos\phi = \frac{1}{2}\sigma_0\sin 2\phi \end{aligned} \tag{10}$$

Izračunali smo normalno in strižno napetost. Vektorju

$$\vec{t} = \sigma\vec{n} + \tau\vec{m}$$

pravimo *vektor napetosti*. Vidimo, da je vektor napetosti gostota površinske sile na preseku. Zapišimo sedaj vektor napetosti v bazi $\vec{\imath}$ in $\vec{\jmath}$. V ta namen upoštevamo definicijo vektorjev $\vec{n}$ in $\vec{m}$. Po krajšem računu sledi

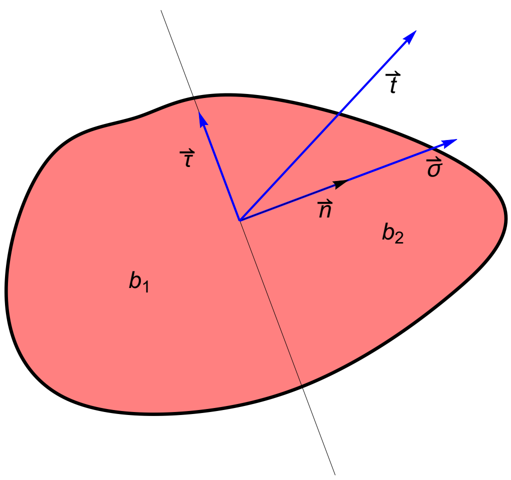
$$\vec{t} = \sigma_0 \cos^2\phi\,(\cos\phi\vec{\imath} + \sin\phi\vec{\jmath}) + \sigma_0 \sin\phi\cos\phi\,(\sin\phi\vec{\imath} - \cos\phi\vec{\jmath}) = \sigma_0\cos\phi\,\vec{\imath}. \tag{11}$$

Tenzor napetosti

Formula (11) določa vektor napetosti za enosno napetostno stanje. Enoosno napetostno stanje je posebne vrste napetostnega stanja. V splošnem napetostno stanje v deformabilnem telesu ni enoosno. Napetostno stanje telesa določa *napetostni tenzor*. Napetostni tenzor je linearna preslikava, ki ravnini navideznega preseka telesa priredi vektor napetosti $\vec{t}$, ki je gostota površinske sile na tem peseku. Integral gostote površinske sile po preseku potem določa silo s katero deluje end del telesa preko preseka na drugi del telesa. Naj bo p točka telesa $\mathcal{B}$ v prostorskem položaju b in Σ ravnina preseka skozi točko p. Označim z $\vec{n}$ normalo na to ravnino preseka. Ne pozabimo, da je normala enotski vektor, velja torej $|\vec{n}| = 1$. Normala kaže v smer tistega dela telesa, ki deluje na drugi del telesa, na nasprotni strani normale, glej sliko 3, kjer del telesa b_2 deluje na b_1 z gostoto površinske sile $\vec{t}$. Napetostni tenzor $\underline{\underline{t}} = \underline{\underline{t}}(p)$ v točki p je tako linearna preslikava

$$\underline{\underline{t}}(p) : \vec{n} \mapsto \vec{t}(p) = \underline{\underline{t}}(p)\vec{n}. \tag{12}$$

Beseda tenzor je v bistvu sinonim za linearno preslikavo. Tenzorje bomo označevali z dvakrat podčrtanim simbolom. Vektor napetosti je odisen od položaja in smeri preseka. Odvisnost od točke sledi od odvisnosti napetostnega tenozorja od od točke, odvisnost od normale pa sledi iz predpisa $\vec{t} = \underline{\underline{t}}\vec{n}$. Napetostni tenzor je tenzorska funkcija definirana na prostorskem položaju. V mehaniki kontinuuma mu pravimo tudi *Cauchyjev napetostni tenzor*. Če je napetostni tenzor neodvisen od položaja, pravimo, da je napetostno stanje *homogeno*. Enoosno napetostno stanje palice s konstantnim presekom je primer homogenega napetostnega stanja.



Slika 3: Navidezni prerez telesa b.

V kartezičnem koordinatnem sistemu napetostnemu tenzorju pripada matrika dimenzije 3×3

$$\underline{\underline{t}} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_2 & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_3 \end{bmatrix}.$$

Tu smo uporabili dve pisavi. V prvi smo poljubni element matrike zapisali v obliki t_{ij}, v drugi pa smo diagonalne in izvendiagonalne označili drugače. Pomen oznak bom kmalu razkrili. Vektorju $\vec{t} = t_1\vec{\imath} + t_2\vec{\jmath} + t_3\vec{k}$ priredimo stolpec $[t_1, t_2, t_3]^T$. Tu oznaka veliki T pomeni transponiranje, ki vrstico postavi v stolpec. Podobno vektorju $\vec{n}$ priredimo stolpec $[n_1, n_2, n_3]^T$. V matričnem zapisu se tako enakost $\vec{t} = \underline{\underline{t}}\vec{n}$ glasi

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Komponente vektorja napetosti dobimo z matričnim produktom matrike s stolpcem. Pogostokrat zaradi enostavnosti pisave vektor identificiramo z njegovim stolpcem komponent. Tako bomo naprimer uporabljali zapis

$$\vec{t} = t_1\vec{\imath} + t_2\vec{\jmath} + t_3\vec{k} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix},$$

ki matematično ni povsem korekten, saj vektor ni trojica števil.

Sedaj bomo pokazali, da enoosni napetosti v smeri osi $\vec{\imath}$ pripada napetostni tenzor $\underline{\underline{t}}$

$$\underline{\underline{t}} = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Res, za $\vec{n} = \cos\phi\,\vec{\imath} + \sin\phi\,\vec{\jmath}$ izračunajmo

$$\begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_0\cos\phi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pripadajoča napetost je torej $\vec{t} = \sigma_0\cos\phi\,\vec{\imath}$. Dobljeni rezultat se ujema z (11). Enoosni napetosti res pripada napetostni tenzor (14).

Pojma normalna in strižna napetost smo že definirali za primer enoosne napetosti. Njuno definicijo bomo sedaj razširili na poljubno napetostno stanje. *Normalna napetost* t_n je projekcija vektorja napetosti na normalno smer,

$$t_n = \vec{t}\cdot\vec{n} = \vec{n}\cdot\underline{\underline{t}}\vec{n}.$$

Vektorju $\vec{t}_n = t_n\vec{n}$ pravimo *vektor normalne napetosti*. *Vektor strižne napetosti* je $\vec{t}_s = \vec{t} - \vec{t}_n$. Njegovi velikosti pravimo *strižna napetost*. Kvadrat strižne napetosti je

$$t_s^2 = \vec{t}_s\cdot\vec{t}_s = (\vec{t} - t_n\vec{n})\cdot(\vec{t} - t_n\vec{n}) = \left|\vec{t}\right|^2 - t_n^2. \tag{15}$$

Primer strižna napetost je na steno prilepljen obešalnik. Na stiku obešalnika in stene deluje strižna napetost v nasprotni smeri kot je obešalnik obremenjen. Če obešalnik preobremenimo, se odlepi in zdrsne. Vzrok loma je pogostokrat v tem, da strižna napetost v smeri zdrsa preseže dopustno napetost.

Raziščimo sedaj pomen komponent napetostnega tenzorja v danem koordinatnem sistemu. Ravnina preseka v izbrani točki p s koordinatami (x_0, y_0, z_0) naj bo ravnina yz. Normala ravnine je potem v smeri osi x. Del telesa $x > x_0$ deluje na del telesa $x < x_0$ z gostoto površinske sile

$$\vec{t} = \underline{\underline{t}}(x_0.y_0, z_0)\vec{\imath} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ t_{31} \end{bmatrix}.$$

Normalna napetost je

$$t_n = \vec{t} \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ t_{31} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = t_{11}.$$

Vektor strižne napetosti je potem

$$\vec{t_s} = \vec{t} - t_n\vec{n} = \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ t_{31} \end{bmatrix} - t_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t_{21} \\ t_{31} \end{bmatrix}.$$

Diagonalni element t_{11} je torej normalna napetost, ki jo pogostokrat označimo z σ_1, izvendiagonalni elementi pa so komponente stržne napetosti, zato jih radi označimo tudi z τ_{21} in τ_{31}. Podobno velja za ostale diagonalne in izvendiagonalne elemente.

Simetričnost tenzorja napetosti

Tenzor je $\underline{\underline{a}}$ simetričen, če velja enakost

$$\vec{a} \cdot \underline{\underline{a}}\vec{b} = \vec{b} \cdot \underline{\underline{a}}\vec{a}$$

za poljubna vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Hiro lahko ugotovimo, da je tenzor simetričen natanko tedaj, ko tenzorju v matričnem zapisu pripada simetrična matrika.

Pokažimo, da je tenzor napetosti simetričen. Kot bomo videli, to sledi iz ravnovesne enačbe za navor. V telesu $\mathcal{B}$, ki je v ravnovesju pod vplivom volumenske sile $\vec{G}_0$ izberimo poljubno točko p. V dovolj majhni okolici točke p lahko predpostavimo, da je napetostno stanje homogeno. V to majhno okolico postavimo dovolj majhno kocko z dolžino stranice Δa. V središče kocke postavimo izhodišče koordinatnega sistema, katerega os usmerimo v smeri stranic kocke. Če je kocka dovolj majhna, je volumenska sila na kocko konstantna in je ekvipolentna točkovni sili $\vec{g}_0(\Delta a)^3$ s prijemališčem v središču kocke. Tu smo z $\vec{g}_0$ zapisali gostoto volumenske sile $\vec{G}_0$. Na vsako ploskev kocke deluje vektor napetosti, ki je sistem vzporednih sil. Ker obravnavamo ravnovesje, lahko temu sistemu sil priredimo ekvipolentno rezultanto, točkovno silo s prijemališčem v središču te ploskve. Tako dobimo naslednji sistem sil

$$\mathcal{F} = \cup_{k=0}^{6}\{(P_k\vec{f_k})\},$$

kjer je $P_0 = (0, 0, 0)$ koordinatno izhodišče, $\vec{f_0} = \vec{g}_0(\Delta a)^3$,

$$\begin{aligned} P_1 &= (\frac{1}{2}\Delta a, 0, 0), & P_2 &= (-\frac{1}{2}\Delta a, 0, 0), \\ P_3 &= (0, \frac{1}{2}\Delta a, 0), & P_4 &= (0, -\frac{1}{2}\Delta a, 0), \\ P_5 &= (0, 0, \frac{1}{2}\Delta a), & P_6 &= (0, 0, -\frac{1}{2}\Delta a) \end{aligned} \tag{16}$$

in

$$\vec{f}_1 = (\Delta a)^2 \underline{\underline{t}}\,\vec{\imath}, \qquad \vec{f}_2 = -(\Delta a)^2 \underline{\underline{t}}\,\vec{\imath},$$
$$\vec{f}_3 = (\Delta a)^2 \underline{\underline{t}}\,\vec{\jmath}, \qquad \vec{f}_4 = -(\Delta a)^2 \underline{\underline{t}}\,\vec{\jmath},$$
$$\vec{f}_5 = (\Delta a)^2 \underline{\underline{t}}\,\vec{k}, \qquad \vec{f}_6 = -(\Delta a)^2 \underline{\underline{t}}\,\vec{k}.$$

Tu je $\underline{\underline{t}}$ vredonst tenzorja napetosti v središču kocke. Pri izračunu sil $\vec{f}_i$, $i = 1, \ldots, 6$ smo upoštevali, da so normale na ploskve kocke v smeri koordinatnih osi in da so nasprotno usmerjene na nasprotnih straneh. Vidimo, da velja

$$\vec{f}_2 = -\vec{f}_1, \qquad \vec{f}_4 = -\vec{f}_3, \qquad \vec{f}_6 = -\vec{f}_5. \tag{17}$$

Izračunajmo sedaj navor sistema sil $\mathcal{F}$ glede na pol v središču kocke

$$\vec{N}(\mathcal{F}, P_0) = \left(\vec{\imath} \times \vec{f}_1 + \vec{\jmath} \times \vec{f}_3 + \vec{k} \times \vec{f}_5\right) \Delta a = \left(\vec{\imath} \times \underline{\underline{t}}\,\vec{\imath} + \vec{\jmath} \times \underline{\underline{t}}\,\vec{\jmath} + \vec{k} \times \underline{\underline{t}}\,\vec{k}\right) (\Delta a)^3. \tag{18}$$

Tu smo upoštevali (16) in (17). Tenzor napetosti na baznem vektorju je stolpec matrike napetostnega tenzorja v tej bazi. Iz ravnovesne enačbe $\vec{N}(\mathcal{F}, P_0) = \vec{0}$ in (18) potem sledi

$$\vec{0} = \vec{\imath} \times \left(t_{11}\vec{\imath} + t_{21}\vec{\jmath} + t_{31}\vec{k}\right) + \vec{\jmath} \times \left(t_{12}\vec{\imath} + t_{22}\vec{\jmath} + t_{32}\vec{k}\right) + \vec{k} \times \left(t_{13}\vec{\imath} + t_{23}\vec{\jmath} + t_{33}\vec{k}\right) \tag{19}$$

in tako

$$\vec{0} = t_{21}\vec{k} - t_{31}\vec{\jmath} - t_{12}\vec{k} + t_{32}\vec{\imath} + t_{13}\vec{\jmath} - t_{23}\vec{\imath} = (t_{32} - t_{23})\,\vec{\imath} + (t_{13} - t_{31})\,\vec{\jmath} + (t_{21} - t_{12})\,\vec{k}.$$

Od tod sledi $t_{21} = t_{12}$, $t_{31} = t_{13}$ in $t_{32} = t_{23}$ in matrika napetostnega tenzorja je res simetrična.

Tako smo dokazali, da je tenzor napetosti simetričen. Velja torej

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{12} & t_{22} & t_{23} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \sigma_2 & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Pomembna lastnost simetričnih tenzorjev, ki je ne bomo dokazali, je, da za simetrični tenzor obstaja tak koordiatni sistem, da v tem koordinatnem sistemu tenzorju pripada diagonalna matrika. Obstaja torej tak koordinatni sistem, da je

$$\underline{\underline{t}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}.$$

Takemu koordinatnemu sistemu pravimo *lastni koordinatni sistem*, diagonalnim elementom *lastne vrednosti*, baznim vektorjem v smereh koordinatnih osi pa *lastni vektorji.* Potem je

$$\underline{\underline{t}}\,\vec{\imath} = \sigma_1\vec{\imath}, \qquad \underline{\underline{t}}\,\vec{\jmath} = \sigma_2\vec{\jmath}, \qquad \underline{\underline{t}}\,\vec{k} = \sigma_1\vec{k}.$$

Vidimo, da strižna napetost na ravninah, ki imajo normale v smeri lastnih vektorjev napetosti enaka nič. To je pomembna lastnost. Tu se porodi sorodno vprašanje, ali obstaja smer, v kateri je normalna napetost enaka nič. Odgovor je, da obstaja natanko tedaj, ko je vsota diagonalnih elementov napetostnega tenzorja enaka nič. Vsoti diagonalnih elementov matrike pravimo *sled matrike.* Velja, da je sled matrike neodvisna od koordinatnega sistema v katerem priredimo tenzorju matriko, zato rečemo sledi matrike kar *sled tenzorja.* Sled tenzorja $\underline{\underline{t}}$ označimo s $\operatorname{sl}\underline{\underline{t}}$. Vidimo, da je sled napetostnega tenzorja enaka vsoti lastnih vrednosti napetostnega tenzorja.

Osnovna napetostna stanja

Sedaj si bomo ogledali osnovna napetostna stanja.

1. Enoosno napetostno stanje. To napetostno stanje že poznamo. V koordinatnem sistemu, ki ima os x v smeri osi napetosti napetostnemu tenzorju pripada matrika (14). Matrika je diagonalna. Pripadajoče lastni vrednosti sta σ_0, in 0, lastni vektorji pa so bazni vektorji koordinatnega sistema. Vektor napetosti na ravnino z normalo $\vec{n} = n_1\vec{\imath} + n_2\vec{\jmath} + n_3\vec{k}$ je

$$\vec{t} = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_0 n_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \sigma_0 n_1 \vec{\imath}.$$

   Normalna napetost je $t_n = \vec{t} \cdot \vec{n} = \sigma_0 n_1^2$. Vektor normalne napetosti je $\vec{t_n} = \sigma_0 n_1^2 \vec{n}$. Po formuli (15) je strižna napetost

$$t_s = \sqrt{\left|\vec{t}\right|^2 - t_n^2} = |\sigma_0 n_1| \sqrt{1 - n_1^2} = |\sigma_0 n_1| \sqrt{n_2^2 + n_3^2}.$$

   Strižna napetost je enaka nič samo pri $n_1 = 0$, torej na koordiatni ravnini yz, ki ima normalo v smeri osi x. Strižna napetost je maksimalna, ko doseže maksimum funkcija $f(n_1) = n_1\sqrt{1 - n_1^2}$ na intervalu $n_1 \in [-1, 1]$. Ekstrem nastopi, ko je $f'(n_1) = 0$. Izračunajmo

$$f'(n_1) = \sqrt{1 - n_1^2} - \frac{2n_1^2}{2\sqrt{1 - n_1^2}} = \frac{1 - 2n_1^2}{\sqrt{1 - n_1^2}}.$$

   Ekstrem nastopi pri $n_1 = \pm 1/\sqrt{2}$. Ekstremna strižna napetost je potem

$$\max |t_s| = \left|\sigma_0/\sqrt{2}\right| \sqrt{1 - 1/2} = \frac{1}{2}|\sigma_0|.$$

   Če je enoosna napetost natezna, $\sigma_0 > 0$, je maksimalna strižna napetost enaka $\frac{1}{2}\sigma_0$. Dosežena je na ravnini z normalo, ki oklepa z osjo x kot $\pi/4$. Kot smo že omenili, lom pogostokrat nastopi na ravnini vzdolž katere je strižna napetost maksimalna. In to dejansko opazimo, lom palce je pogostokrat žagasto nazobčan z avninami loma, ki oklepajo kot $\pi/4$ s smerjo natega.

2. *Hirostatično napetostno stanje.* Pripadajoči napetosotni je diagonalen

$$\underline{\underline{t}} = -p \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -p\,\underline{\underline{i}}$$

   Tu smo z $\underline{\underline{i}}$ označili identiteto oziroma enotsko matriko. Tenzorju, ki je mnogokratnik identitete pravimo tudi *sfrerični* oziroma *krogelni tenzor.* Številu p pravimo tlak. V zapisu smo izbrali negativni predznak, ker to ustreza hidrostatičnemu tlaku tekočine. Pomembna lastnost enotskega tenzorja $\underline{\underline{i}}$ je, da tenzorju v vseh koordinatnih sistemih pripada ista matrika, enotska matrika. Lastna vrednosti je $-p$, lastni vektor pa je poljubni vektor, saj je

$$\underline{\underline{t}}\,\vec{u} = -p\underline{\underline{i}}\,\vec{a} = -p \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = -p \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = -p\vec{u}$$

   Vektor napetosti je $\vec{t} = \underline{\underline{t}}\,\vec{n} = -p\underline{\underline{i}}\,\vec{n} = -p\vec{n}$. Enkost potrjuje, da je $-p$ lastna vrednost, lastni vektor pa je poljubni vektor. Normalna napetost je $t_n = \vec{t} \cdot \vec{n} = -p$, strižna napetost pa je enaka nič. Napetostni tenzor, ki ima to lastnost, da je strižna napetost enaka nič v pojubni smeri, je natanko hidrostatični napetostni tenzor.

3. *Strižno napetostno stanje.* Napetostno stanje je strižno, če je sled napetostnega tenzorja enaka nič, če velja torej sl$\underline{\underline{t}} = 0$. Primer strižnega napetostnega tenzorja je

$$\underline{\underline{t}} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vektor napetosti na ravnino z normalo $\vec{n}$ je

$$\vec{t} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma n_1 \\ -\sigma n_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \sigma(n_1\vec{\imath} - n_2\vec{\jmath}).$$

Normalna napetost je $t_n = \vec{t} \cdot \vec{n} = \sigma(n_1^2 - n_2^2)$. Vidimo, da je normalna napetost enaka nič, če je $|n_1| = |n_2|$. Če je normalna napetost enaka nič, je vektor napetosti enak vektorju strižne napetosti. Potem je

$$|t_s| = \left|\vec{t}\right| = |\sigma|\sqrt{n_1^2 + n_2^2} = |\sigma|\sqrt{1 - n_3^2}.$$

Maksimalna strižna napetost nastopi pri $n_3 = 0$. Potem je njena maksimalna vrednost $|\sigma|$. Ekstremalna vrednost strižne napetosti tako nastopi v ravnini, ki ima normalo v smeri

$$\vec{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\imath} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath}.$$

To so ravnine pravokotne na ravnino xy in v smeri diagonal $y = \pm x$.

4. *Ravninsko napetostno stanje.* Napetostno stanje je ravninsko, če obstaja tako koordinatni sistem, da je

$$\underline{\underline{t}} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & 0 \\ t_{12} & t_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau_{12} & 0 \\ \tau_{12} & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ravninsko napetostno stanje nastopi pri obremenitvah, ki so ravninske. V ndaljevanju se bomo večinoma omejili na ravninsko napetostno stanje.

Vprašanja in naloge

1. Izračunaj kvocient σ_0/ρ_0 še za nekatere ostale materiale.

2. Zapiši strižne komponente vektorja napetosti na ravnini z normalo v smeri osi $\vec{k}$.