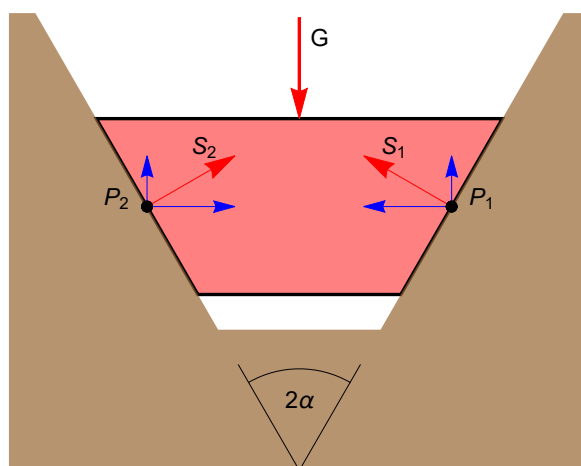


## Klinasti jermen

V tračnih pogonskih elementih želimo preprečiti drsenje traka oziroma jermena. Ena možnost je uporaba verižnega prenosa ali zobatega jermena, ki pa ima svoje druge pomanjkljivosti kot je naprimer mazanje ali obraba. Drsenje tračnega prenosa lahko omejimo z manjšo obremenitvijo ali s povečanjem trenja. Zadnje lahko dosežemo z uporabo klinastega jermena.



Slika 1: Klinasti jermnen.

Klinasti jermen je prikazan na sliki 1. Jermen je gibljiv v smeri, ki je pravokotna na slika. Privzeli bomo, da je jermen obremenjen s silo  $\vec{G}$  tako kot kaže skica. Ta obremenitev je posledica napetja jermena, bolj je jermen napet, večja je sila. To silo uravnovesita ploskovni sili na obeh stranej jermena. Ponovno imamo opravka s sistemom vzporednih sil, ki ima rezultanto  $\vec{S}_1$  oziroma  $\vec{S}_2$ . Kot je vidno s slike se vodoravni komponenti med seboj uravnovesita, vsota navpičnih komponent pa uravnovesi obremenitev  $\vec{G}$ . Sili  $\vec{S}_i$ ,  $i = 1, 2$  oklepata z vodoravno smerjo kot  $\alpha$ , glej slika 1. Iz simetrije sledi, da sta sili  $\vec{S}_1$  in  $\vec{S}_2$  enako veliki. Označimo njuni velikosti z  $S$ . Potemtakem je  $G = 2S \sin \alpha$ . Velikost normalne komponente je potem  $S = \frac{G}{2 \sin \alpha}$ . Po Coulombovem zakonu jermen ne zdrsne, če za velikost sile v smeri tendence zdrsa velja  $T \leq kS$  oziroma

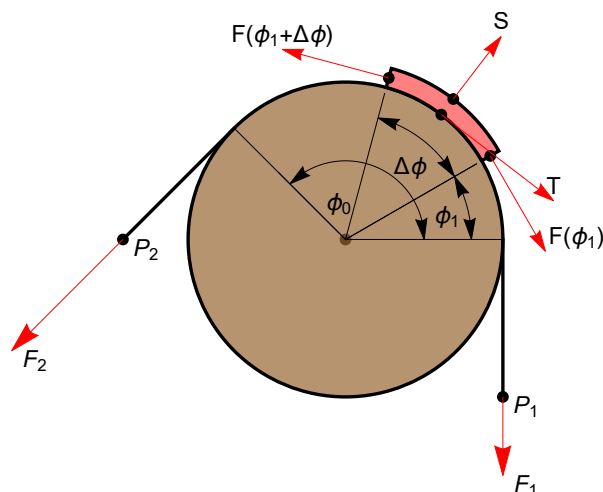
$$T \leq \frac{k}{\sin \alpha} G.$$

Tu smo upoštevali, da sila trenja deluje na levi in desni strani koluta.

Vidimo, da v neenakosti nastopa modificiran koeficient trenja  $k' = k / \sin \alpha > k$ , ki je pri majhnem kotu  $\alpha$  bistveno večji od koeficienta  $k$ . Klinasti jermen ima potemtakem bistveno boljši oprijem kot naveden jermen, ki se naslanja na obod. Manjši je  $\alpha$  večji je modificiran koeficient trenja, po drugi strani pa je tudi večja obraba jermena. Z obrabo jermen leze v utor in ko se nasloni na obod izgubi svojo učinkovitost.

## Trenje vrvi na kolutu

Iz vsakdanjega življenja vemo, da je dvigovanje bremena z vrvjo preko roba težavno, pri spuščanju pa se vrv zelo segreje in obrabi. Razlog je v trenju vrvi na robu. Trenje vrvi je tudi razlog zakaj držijo vozli in zakaj lahko z ovitjem vrvi okoli stebra zadržimo veliko silo na drugi strani vrvi.



Slika 2: Vrv na kolutu,  $\vec{S}$  je radialna,  $\vec{T}$  pa obodna komponenta ploskovne sile na del vrvi med  $\phi_1$  in  $\phi_1 + \Delta\phi$ .

Teoretični model trenja vrvi preko fiksnega roba kaže slika 2. Tu smo zaradi enostavnosti privzeli da je rob fiksn kolut oziroma valj. Naj bo tendenca gibanja vrvi v nasprotni smeri urinega kazalca, sila  $\vec{S}_2$  vleče,  $\vec{S}_1$  pa zadržuje. Pokazali bomo, da za sili velja zveza

$$F_2 = F_1 e^{k\phi_0}, \quad (1)$$

kjer je  $k$  koeficient trenja med vrvjo in kolutom,  $\phi_0$  pa ovojni kot, torej kot za koliko je vrv ovita. Kot ovitja je podan v radianih, za polni kot je torej  $\phi_0 = 2\pi$ . Vidimo, da sila ni odvisna od polmera koluta. Če je namesto vrvi napeljan preko utora klinasti jermen, v formuli nastopa namesto koeficienta  $k$  modificiran koeficient  $k'$ . Formula pove, da sila  $F_2$  narašča eksponentno s kotom ovitja. Za lažjo predstavbo si oglejmo razmerje  $F_2/F_1$  za različne kote ovitja v tabeli 1.

Tabela 1: Razmerje  $F_2/F_1$  za različne kote ovitja pri  $k = 1/2$ .

$\phi_0$	$F_2/F_1$
$\pi/4$	1.48
$\pi/2$	2.19
$3\pi/4$	3.25
$\pi$	4.81
$5\pi/4$	7.12
$3\pi/2$	10.55
$7\pi/4$	15.63
$2\pi$	23.14

Sedaj bomo dokazali formulo (1). Izpeljava formule temelji na uporabi Coulombovega zakona trenja, zato bo edina ravnovesna enačba ravnovesja sil

$$\vec{F}(\phi_1 + \Delta\phi) - \vec{F}(\phi_1) + \int_{\phi_1}^{\phi_1 + \Delta\phi} (\vec{s} + \vec{t}) d\phi = \vec{0}. \quad (2)$$

Tu smo rezultanto sile koluta na vrv izrazili z integralom dolžinske gostote sile, kjer je  $\vec{s}$  radialna gostota,  $\vec{t}$  pa obodna gostota. Rezultanto zvezno porazdeljene sile zapišemo z integralom, podobno kot rezultanto po točkah porazdeljene sile zapišemo z vsoto. Enačo (2) delimo z  $\Delta\phi$  in poženemo  $\Delta\phi$  proti nič. Upoštevajmo, da je limita diferenčnega kvocienta enaka odvodu, da velja

$$\lim_{\Delta\phi \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(\phi_1 + \Delta\phi) - \vec{F}(\phi_1)}{\Delta\phi} = \frac{d\vec{F}}{d\phi}(\phi_1). \quad (3)$$

Nadalje velja po izreku o povprečni vrednosti

$$\lim_{\Delta\phi \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\phi} \int_{\phi_1}^{\phi_1 + \Delta\phi} (\vec{s} + \vec{t}) d\phi = \vec{s}(\phi_1) + \vec{t}(\phi_1). \quad (4)$$

Veljavnost izreka o povprečni vrednosti sledi iz geometrijskega pomena določenega integrala, ki pravi, da je določen integral funkcije  $f(x)$  enak površini  $A$  lika med absciso osjo  $x$  in funkcijo na območju integracije  $x \in (a, b)$ ,

$$A = \int_a^b f(x) dx.$$

Uporabili bomo izrek o povprečni vrednosti, ki pravi, da je

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(\xi), \quad \text{kjer je } \xi \in (a, b).$$

Potem je po izreku o povprečni vrednosti

$$\lim_{b \rightarrow a} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(a).$$

Vstavimo (3) in (4) v (2). Dobimo

$$\frac{d\vec{F}}{d\phi} + \vec{s} + \vec{t} = \vec{0}. \quad (5)$$

Enačba velja pri  $\phi = \phi_1$  in ker je  $\phi_1$  poljuben, velja za katerikoli kot  $\phi$ . Sedaj upoštevamo, da je sila vrvi v obodni smeri, da je  $\vec{F} = F\vec{e}_\phi$ . Podobno  $\vec{s} = s\vec{e}_r$  in  $\vec{t} = -t\vec{e}_\phi$ . Nadalje je

$$\frac{d}{d\phi} F\vec{e}_\phi = \frac{dF}{d\phi} \vec{e}_\phi - F\vec{e}_r.$$

Uporabili smo pravilo za odvod produkta in enakost  $\frac{d}{d\phi} \vec{e}_\phi = -\vec{e}_r$ . Enačba (5) se potem po komponentah glasi

$$-F + s = 0, \quad \frac{dF}{d\phi} - t = 0.$$

Dobili smo dve enačbi za tri neznanke,  $F$ ,  $s$  in  $t$ . Tretja enačba, ki določa neznanke je zakon trenja  $t = ks$ , ki velja, ker vrv drsi po kolutu. Potem je

$$\frac{dF}{d\phi} = t = ks = kF.$$

Dobili smo diferencialno enačbo za  $F$ , ki pravi, da je odvod funkcije  $F$  sorazmeren vrednosti funkcije. To je naravni zakon rasti, ki pravi, da je sprememba neke količine sorazmerna količini. Rešitev je

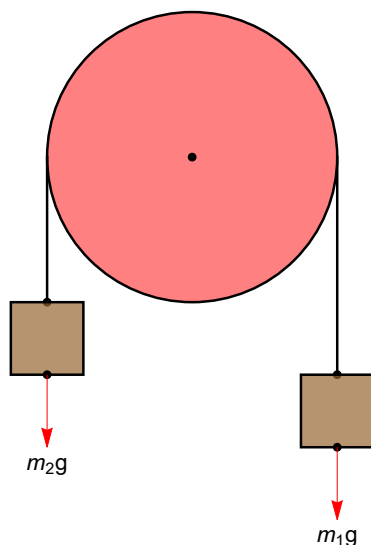
$$F = C e^{k\phi},$$

kjer je  $C$  konstanta. Konstanto določimo iz pogoja, da je  $F(\phi = 0) = C = F_1$ . Z besedami, vrednost sile vrvi na enem koncu določa vrednost vrvi na drugem koncu. Vrednost vrvi na drugem koncu pri  $\phi = \phi_0$  je potem

$$F_2 = F(\phi_0) = F_1 e^{k\phi_0}$$

in formula (1) je s tem dokazana. Dokazali smo jo za krožni kolut, velja pa za kolut poljubne oblike.

## Zdrs vrvi na kolutu



Slika 3: Zdrs vrvi na kolutu.

Čez skripec potegnemo vrv, na en konec obesimo utež z maso  $m_1$ , na drugi konec pa z  $m_2$ , glej sliko 3. Koeficient trenja med škricem in vrvjo je  $k$ . Določiti moramo razmerje med masama, da vrv ne zdrsne. Uporabili bomo formulo za zdrs vrvi na kolutu (1). Ovojni kot je očitno pol kroga, torej  $\phi_0 = \pi$ . Privzemimo, da je  $m_1 > m_2$ . Potem je tendenca zdrsa v smeri urinega kazalca. Formula (1) določa kdaj vrv zdrsne. Vrv ne zdrsne, če je sila manjša kot po formuli, torej če je

$$m_1 g \leq m_2 g e^{k\pi}.$$

Iskani kvocient je

$$\frac{m_1}{m_2} \leq e^{k\pi}.$$

Vrednosti dopustnega kvocienta lahko preberemo iz tabele 1.

## Statika sistema togih teles

Številni mehanizmi in stroji so sestavljeni iz togih komponent in jih v enakomernem obratovalnem režimu lahko obrvnavamo v okviru statike sistema togih teles. Ravnovesne enačbe sistema togih teles so ravnovesne enačbe za vsako togo telo sistema. Te enačbe vežejo pogoji, kako so telesa med seboj sklopljena. Delovanje sosednjega telesa na izbrano togo telo je v bistvu enako, kot vpliv podpore na telo, zato je klasifikacija spojev med telesi podobna klasifikaciji podpor. Pri tem dodatno upoštevamo veljavnost tretjega Newtonovega zakona. Če telo  $\mathcal{B}_1$  deluje na  $\mathcal{B}$  s silo  $\vec{F}_{12}$  in navorom  $\vec{N}_{12}$ , potem telo  $\mathcal{B}_2$  deluje na  $\mathcal{B}_1$  s silo  $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$  in navorom  $\vec{N}_{21} = -\vec{N}_{12}$ .

Klasifikacijo spojev med dvema togima telesoma je naslednja. Spoju ki ne prenaša vseh komponent navora pravimo zglob, spoju, ki ne prenaša vseh komponent sil pa drsnik. Spoj lahko klasificiramo s parom števil  $(s, n)$ . Pvo število para pove koliko komponent sile prenaša spoj, drugo pa koliko komponent navora.

Tipični primeri spojev so naslednji:

- *Popolni spoj*. Ta spoj prenaša vse komponente sile in navorov med telesoma. Popolni spoj je v bistvu zvar in eno telo veže z drugim v togo telo. To pomeni, da lahko zvarjeni togi telesi obravnavamo kot eno togo telo. Pripadajoči par je  $(3, 3)$ .
- *Tečaj*  $(3, 2)$  prenaša vseh komponente sil in dve komponenti navora, ki sta pravokotni na os tečaja. Togo telo spojeno s tečajem z drugim telesom je prosto vrtljivo okrog osi tečaja. Drugo telo vrteža ne zazna. Primer je tečaj vrat, eno telo je krilo vrat, drugo pa okvir vrat.
- *Križni ali kardanski zglob*. Prenos komponent sil je popoln, momenta pa se prenaša samo v eni smeri. Primer križnega zgloba je prenos pogona na krmilno kolo. Par je  $(3, 1)$ .
- *Krogelni zglob* ne prenaša nobene komponente navora, prenaša pa vse komponente sile. Ta spoj omogoča prosto rotacijo enega telesa glede na drugo okrog točke spoja. Primer je kolčni zglob, par pa je  $(3, 0)$ .
- *Linijski drsnik* prenaša komponenti sile, ki sta pravokotni na smer drsnika, ne prenaša pa sile v smeri drsnika. Prenos momenta je popoln, zato mu pripada par  $(2, 3)$ . Primer so drsna vrata.
- *Ploskovni drsnik*. Kot pove ime spoj ne omejuje ravninskega gibanja spoja, ne dopušča pa gibanje spoja izven ravnine. Prenos momenta je popoln, par pa je  $(1, 3)$ .

Našteli nismo vseh možnih kombinacij spojev in drsnikov, naprimer kombinacije linijskega drsnika s krogelnim zglobom, ki je realizacija para  $(2, 0)$ . Vseh možnih parov  $(s, n)$  je 12, saj je  $s \in \{1, 2, 3\}$  in  $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ . Pri ravninski nalogi je  $s \in \{1, 2\}$  in  $n \in \{0, 1\}$  tako, da je sedaj vseh možnih parov 4: zvar, tečaj, drsnik in tečaj na drsniku.

### Potek reševanja naloge statike togega telesa

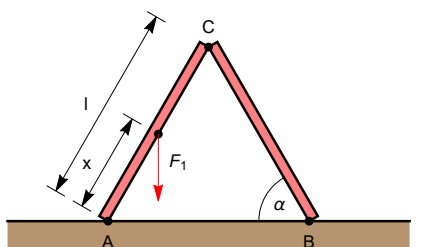
1. Prvi korak je razčelnitev sistema na toge komponente. Če sta dve telesi spojeni s popolnim spojem, ju obravnavamo kot eno telo.
2. Naslednji korak je identifikacija zunanjih sil. Med zunanje sile štejemo tudi sile podpor s katerimi je naš sistem togih teles uravnovešen.
3. Sledi identifikacija spojev. Spoje med telesi praviloma določa že opis naloge. Vrstni red prvih treh korakov lahko poljubno spremenimo.
4. Pred zapisom ravnovesnih enačb za vsako togo telo sistema praviloma narišemo diagram prostih teles. To pomeni, da za vsako togo telo identificiramo sistem sil, ki deluje na to telo. Sistem sil sestavljajo zunanje sile, ki imajo prijemališče znotraj telesa in vse sile in navori v spojih s sosednjimi telesi. Potem narišemo togo telo s pripadajočim sistemom sil.
5. Sledi zapis ravnovesnih enačb za vsako togo telo sistema. Po zapisu sistema enačb preštujemo število enačb in neznank in razmislimo ali je sistem statično določen ali nedoločen.
6. Sistem ravnovesnih enačb rešimo. Dimenzija sistema je lahko velika, če je sistem sestavljen iz  $n$  togih teles v prostoru je število enačb  $6n$ .

### Primer: A lestev

Na hrapavo podlago je postavljena A lestev brez vmesne vrvi, ki bi preprečevala razprtje lestve, glej sliko 4. Oba kraka lestve imata enako dolžino in oklepata kot  $\alpha$  z vodoravno podlago, levi krak

lestve pa je obremenjen s silo  $\vec{F}$ . Vprašanje je, ali pri danem koeficientu trenja  $k$  med podlago in lestvijo lestev stoji ali se razpre.

Lestev je sestavljena iz dveh krakov. Tako imamo sistem dveh togih teles, ki sta spojeni v točki  $C$ , glej sliko 4. A lestev lahko zložimo, zato je spoj  $C$  tečajaj. Zunanje sile, ki delujejo na lestev sta sili podpor  $\vec{A}$  in  $\vec{B}$  v podporah  $A$  in  $B$  ter obremenitev  $\vec{F}$ .



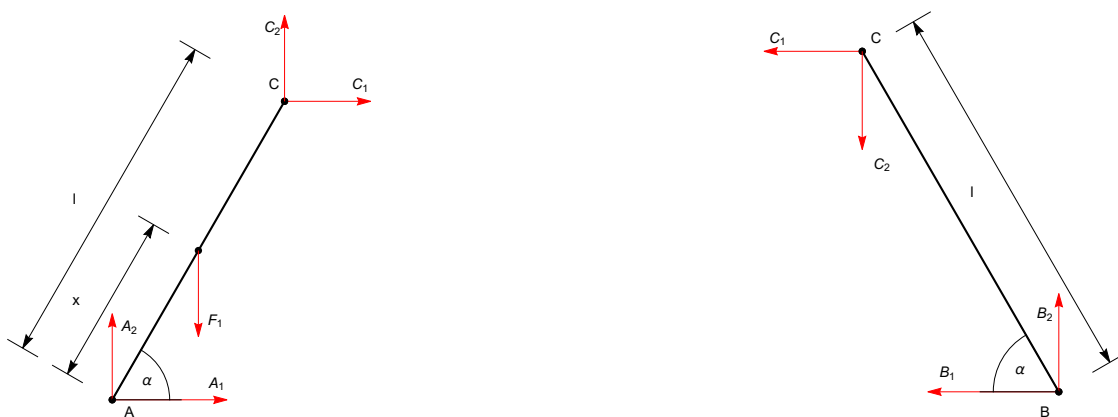
Slika 4: A lestev.

Sedaj narišemo diagrama prostih teles, glej sliko 5. Prvo obravnavajmo levi krak lestve. Na njega delujejo sile  $\vec{A}$ ,  $\vec{F}$  in sila desnega kraka lestve  $\vec{C}$ . Ker sta kraka spojena s tečajem, desni krak na levi ne deluje z navorom. Ravnovesne enačbe za levi krak so ravnovesne enačbe za togo telo. Enačbe so

$$A_1 + C_1 = 0, \quad A_2 + C_2 - F = 0, \quad -xF \cos \alpha - lC_1 \sin \alpha + lC_2 \cos \alpha = 0. \quad (6)$$

Zadnja enačba je momentna enačba s polom v točki  $A$ .

Ker je naloga ravninska imamo tri ravnovesne enačbe, neznanke pa so štiri, po dve komponenti za  $\vec{A}$  in  $\vec{C}$ . Ta primer je tipičen, neznanke za posamezno togo telo sistema togih teles ne moremo rešiti brez obravnavanja vseh togih teles hkrati. Z drugimi besedami, prvo moramo napisati ravnovesne enačbe za vsako togo telo sistema, šele potem se lahko lotimo reševanja teh enačb.



Slika 5: Diagram prostih teles za A lestev; levi in desni krak lestve.

Pri konstrukciji diagrama za desni krak upoštevajmo, da levi krak deluje na desni krak s silo  $-\vec{C}$ . Ravnovesne enačbe za desni krak so tako

$$-B_1 - C_1 = 0, \quad B_2 - C_2 = 0, \quad lC_1 \sin \alpha + lC_2 \cos \alpha = 0. \quad (7)$$

Dobili smo 6 enačb za šest komponent. Opazimo, da sta momentni enačbi (6-7) dve enačbi za neznanke  $C_1$  in  $C_2$ . Rešitev je

$$C_1 = -\frac{x}{2l}F \cot \alpha, \quad C_2 = \frac{x}{2l}F. \quad (8)$$

Potem, ko poznamo  $C_1$  in  $C_2$ , brez težav iz (6-7) dobimo

$$A_1 = \frac{x}{2l}F \cot \alpha, \quad A_2 = F - C_2 = \left(1 - \frac{x}{2l}\right)F, \quad B_1 = \frac{x}{2l}F \cot \alpha, \quad B_2 = \frac{x}{2l}F. \quad (9)$$

Sile so sedaj znane. Odgovoriti moramo še na vprašanje, ali se lestev razpre ali ne. Pogoja, da podpori ne zdrsneta je

$$A_1 \leq kA_2 \quad \text{in} \quad B_1 \leq kB_2,$$

oziroma po (9)

$$\frac{x}{2l}F \cot \alpha \leq k \left(1 - \frac{x}{2l}\right)F, \quad \frac{x}{2l}F \cot \alpha \leq k \frac{x}{2l}F. \quad (10)$$

Tako dobimo pogoja

$$\frac{x}{2l} \cot \alpha \leq k \left(1 - \frac{x}{2l}\right), \quad \cot \alpha \leq k. \quad (11)$$

Drugi pogoj se nanaša na podporo  $B$ . Ta ne zdrsne, če je lestev postavljena dovolj strmo, če je  $\cot \alpha \leq k$ . Pogoj v podpori  $A$  je odvisen od  $x$ . Pri  $x = 0$  je vedno izpolnjen, potem pa z naraščajočim  $x$  postaja vedno strožji. Pri  $x = l$  dobimo že znani pogoj  $\cot \alpha \leq k$ . Potemtakem ta pogoj zagotavlja, da se lestev ne razpre. Če pa se razpre, potem zdrsne podpora  $B$ .

## Paličje

Paličje je togi sistem togih teles sestavljen iz palic s spoji, ki ne prenašajo navore. Spojem paličja pravimo *vozllišča*. Primeri, ki jih modeliramo z modelom paličja so daljnovodni stebri, žerjavi, mostovi in podobne strukture sestavljene iz palic. V naravi palice niso spojene z zglobi, lahko so zavarjene ali zakovane. Vendar pa je kljub temu zaradi tankosti palic prenos momenta iz ene palice na drugo palico majhen, zato je model paličja uporaben model.

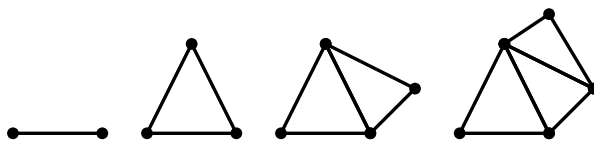
Paličje je sestavljeno iz palic. Palica je konstrukcijski element, ki prenaša silo samo v osni smeri, ne prenaša pa prečne sile. Neznanke paličja so tako osne sile palic oziroma na kratko sile palic. Sila palice je lahko natezna ali tlačna. Prevelika natezna sila lahko palico strga, nevarnost tlačne sile pa je uklon palice. Tlačna sila palico stiska, in to silo palica dobro prenaša. Če je tlačna sila natanko v smeri palice, je vse v redu, vendar že najmanjše odstopanje od te smeri povzroči upogib palice in ker je palica členkasto vpeta, to odstopanje povzroči upogib oziroma uklon palice. Lep primer je špaget. Z vlečenjem ga težko zlomimo, če ga pa stisnemo v njegovi smeri, se zelo hitro ukloni in zlomi. Primer so tudi od požledi podrta stebri daljnovoda. Slika podrtega stebra razkrije, da je le redko katera palica strgana, številne pa so zvite. Palice paličja tako dobro prenašajo natezne sile in slabše tlačne sile. Zato moramo pri konstrukciji paličja pozornost posvetiti tlačnim silam in po potrebi spremeniti konstrukcijo paličja.

Ker palice prenašajo samo osno silo, smemo paličje v okviru modela sistema togih teles obremeniti samo v vozlliščih. Lastne teže palic tako v modelu paličja praviloma ne upoštevamo. To v večini primerov ne predstavlja problema, ker so sile obremenitve paličja dominantne. Če jih moramo, potem teže sile palice razporedimo po njenih krajiščih.

Paličje je seveda tudi podprto. Ker je paličje togi sistem, podpore paličja določajo ravnovesne enačbe togega telesa. Enolično jih lahko določimo, če so podpore statično določene. Nadalje so sile palic notranje sile paličja. Določajo jih pogoji, da mora biti v vsakem vozllišču vsota sil enaka nič. V tej vsoti nastopajo sile palic s krajišči v izbranem vozllišču in morebitna obremenitev paličja, ki ima tu prijemališče. Ker ima ta sistem sil skupno prijemališče, je momentna enačba trivialna  $\vec{0} = \vec{0}$ . Če lahko določimo vse sile paličja, pravimo, da je paličje *statično določeno*.

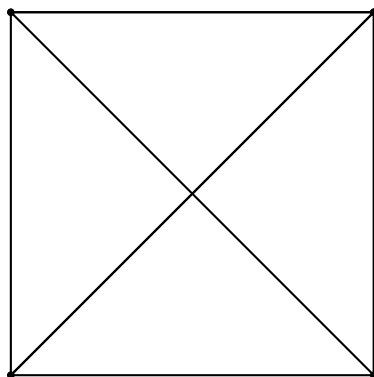
Označimo s  $p$  število palic in z  $v$  število vozllišč. Vsako vozllišče prinese v ravninskem primeru  $2v$  enačb, v prostorskem pa  $3v$ . Ker so neznane tudi sile podpor, je paličje statično določeno, če velja zveza  $2v = p + 3$  za ravninsko paličje in  $3v = p + 6$  za prostorsko paličje. Najenostavnejše paličje je ena sama palica, potem  $v = 2$  in  $p = 1$ . Očitno je statično določeno. Naslednje paličje je trikotno.

Dodamo eno vozlišče in to vozlišče povežemo s krajiščima prve palice z dvema palicama. Tudi to paličje je statično določeno. Če ostanemo pri ravninskem paličju, nadaljujemo po naslednjem postopku. Dodamo novo vozlišče in dve palici s katerima povežemo novo vozlišče z že obstoječimi vozlišči, glej sliko 6. Tako konstruiranem paličju pravimo *enostavno paličje*. V prostorskem primeru novo vozlišče povežemo s tremi že obstoječimi vozlišči.



Slika 6: Ravninsko enostavno paličje; ena, dve, tri, štiri palice.

Ni pa seveda vsako paličje enostavno ali statično določeno. Primer je paličje na sliki 7. Sedaj je  $p = 6$  in  $v = 4$ , zato  $2v = 8 < 9 = p + 3$ . Ena palica je odveč, odstranimo lahko katerokoli palico in paličje bo še vedno tog sistem. Paličja sestavljena iz takih elementov, kakor ga kaže slika, pogostokrat vidimo. Pri izvedbi konstrukcij zaradi varnosti oziroma varnostnega faktorja v pravokotnik vključimo obe diagonali, čeprav zadostuje že ena sama diagonala. Z metodami statike sistema togih teles sil palic statično nedoločenega paličja ne moremo enolično izračunati. Na silo jih lahko izračunamo, če dodamo kakšno, po možnosti čim boljše predpostavko o vrednosti sil palic, naprimer da sta sili diagonalnih palic enaki. Seveda jo to res samo ob določeni obremenitvi, zato moramo biti pri tem zelo previdni. Prava rešitev problema statično nedoločenega paličja je, da opustimo model sistema togih teles in dopustimo osno deformacijo palic. Enostavne primere tega pristopa bomo srečali pri Trdnosti.



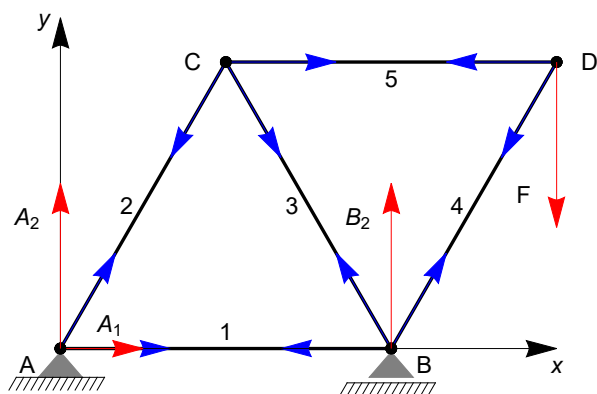
Slika 7: Statično nedoločeno paličje.

## Vozliščna metoda

Ravnovesne enačbe paličja so ravnovesne enačbe sil za vsako vozlišče paličja. Metodi izračuna sil paličja, ki temelji na reševanju ravnovesnih enačb za vsako vozlišče pravimo *vozliščna metoda*. Kako deluje vozliščna metoda si bomo ogledali na naslednjem primeru. Dano je paličje sestavljeno iz dveh enakostrančnih trikotnikov tako kot kaže slika 8. Paličje je podprto s fiksno členkasto podporo v točki  $A$ , pomično členkasto v  $B$  in je obremenjeno navpično navzdol s silo  $\vec{F}$ . Palice oštevilčimo in vsaki palici priredimo silo palic  $\vec{F}_i$ . Na sliki 8 so z modro barvo narisane sile palic na vozlišča. Po tretjem Newtonovem zakonu je sila palice na levo vozlišče nasprotno enaka sili na desno vozlišče, glej sliko. Prva palica ima krajišči  $A$  in  $B$ , silo prve palice na  $A$  zapišemo v obliki  $\vec{F}_1 = F_1 \vec{z}$ , silo prve palice na  $B$  pa kot  $\vec{F}_1 = -F_1 \vec{z}$ . Tu je  $F_1$  neznana količina. Če je sila palice



natezna, je  $F_1 > 0$ , če je kompresijska je  $F_1 < 0$ . Podobno naredimo za ostale palice. Tako dobimo neznanke  $F_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Na sliki 8 smo vse sile palice narisali kot natezne sile in smo tako sile palic na vozlišča usmerili navznoter. To naredimo neglede na to ali so sile natezne ali tlačne, čeprav iz obremenitve paličja na sliki pričakujemo, da bo sila na četrto palico tlačna.



Slika 8: Paličje sestavljeno iz dveh enakostraničnih trikotnikov.

Sedaj se lotimo računanja. Prvo bomo poiskali sile podpor. Ta korak ni obvezen, sile palic lahko dobimo tudi tako, da zapišemo vse ravnovesne enačbe hkrati in nato dobljeni linearni sistem enačb za neznanke sil podpor in palic rešimo. Tako bi postopali, če bi nalogo rešili s pomočjo računalnika. Za pravo nalogo, ki ni šolska in vsebuje na desetine palic je to seveda edina prava pot.

Za izračun sil podpor upoštevamo, da je paličje togo telo, ki je obremenjeno s silama podpor  $\vec{A}$  in  $\vec{B}$  in obremenitvijo  $\vec{F}$ . Očitno je  $A_1 = 0$ . Momentna enačba s polom v  $A$  se glasi

$$aB_2 - \frac{3a}{2}F = 0 \implies B_2 = \frac{3}{2}F.$$

Tu smo z  $a$  zapisali dolžino stranice enakostraničnega trikotnika. Momentna enačba s polom v  $B$  nam da

$$-\frac{a}{2}F - aA_2 = 0 \implies A_2 = -\frac{a}{2}F.$$

Sile podpor so sedaj določene. Izberimo sedaj vozlišče, ki je povezano s paličjem s samo dvema palicama. V našem primeru je to vozlišče  $D$ . Ravnovesni enačba je  $\vec{F} + \vec{F}_4 + \vec{F}_5 = \vec{0}$ . Upoštevajmo, da je  $\vec{F} = -F\vec{j}$ ,  $\vec{F}_4 = -F_4 \cos \alpha \vec{i} - F_4 \sin \alpha \vec{j}$  in  $\vec{F}_5 = -F_5 \vec{i}$ . Tu je  $\alpha$  notranji kot enakostraničnega trikotnika,  $\alpha = \pi/3$ . Po komponentah je

$$-\cos \alpha F_4 - F_5 = 0 \quad \text{in} \quad -\sin \alpha F_4 - F = 0.$$

Rešitvi sta

$$F_4 = -\frac{2F}{\sqrt{3}} \quad \text{in} \quad F_5 = \frac{F}{\sqrt{3}}.$$

Tu smo uporabili  $\sin \pi/3 = \sqrt{3}/2$  in  $\cos \pi/3 = 1/2$ .

Sedaj se lotimo vozlišča  $C$ . Ravnovesna enačba je  $\vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_5 = \vec{0}$ . Sila  $\vec{F}_5$  je že znana, neznanke sta  $\vec{F}_2$  in  $\vec{F}_3$ . Po komponentah dobimo sedaj

$$-\cos \alpha F_2 + \cos \alpha F_3 + F_5 = 0 \quad \text{in} \quad -\sin \alpha F_2 - \sin \alpha F_3 = 0.$$

Rešitev

$$F_2 = \frac{F}{\sqrt{3}} \quad \text{in} \quad F_3 = -\frac{F}{\sqrt{3}}.$$

Tu smo upoštevali že znano vrednost za  $F_5$ .

Nadljudjemo z vozliščem  $A$ . Ravnovesna enačba je  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{A} = \vec{0}$ . Po komponentah

$$A_1 + \cos \alpha F_2 + F_1 = 0 \quad \text{in} \quad A_2 + \sin \alpha F_2 = 0.$$

Dobili smo dve enačbi za eno neznanico, saj  $F_2$  že poznamo, poznamo pa tudi silo podpore  $\vec{A}$ . Rešimo sistem korak, da  $F_2$  ne bi poznali. To storimo zato, da preverimo pravilnost dosedanjih računov. Rešitev je

$$F_1 = -\frac{F}{2\sqrt{3}} \quad \text{in} \quad F_2 = \frac{F}{\sqrt{3}}.$$

Izračunani  $F_2$  se ujema z že izračunano vrednostjo. Dobili smo vse sile palic. Kompresijske so  $F_1$ ,  $F_3$  in  $F_4$ . Največja kompresijska sila nastopa v četrti palici. Če želimo, lahko preverimo pravilnost izračuna sil z ravnovesnimi enačbami vozlišča  $B$ .

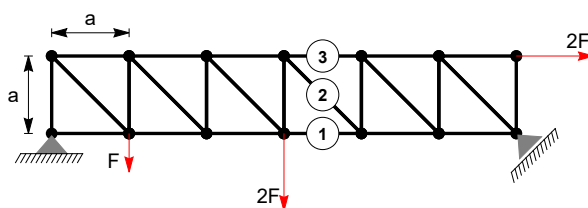
## Prerezna metoda

Pogostokrat želimo izračunati sile palic samo za posamezne palice paličja. Kot smo videli pri vozliščni metodi, je lahko pot od vozlišča do vozlišča zaželenih palic dolgotrajna. Ta težavo reši *prerezna metoda* po kateri izračunamo samo tiste sile palic, ki jih seka navidezni prerez paličja. Metoda pa ni vsemogočna, uporabimo jo lahko samo v primerih:

- Navidezni prerez prereže samo tri palice ravninskega paličja oziroma šest palic prostorskega paličja.
- Prerezane palice nimajo skupnega presečišča.

Prvi pogoj velja zato, ker imamo v statiki na voljo samo tri oziroma šest ravnovesnih enačb, drugi pa zato, ker je v primeru skupnega presečišča momentna enačba trivialna in je tako naloga statično nedoločena. Z drugo omejitvijo se redko soočimo, prva pa pogosto nastopi pri bolj zapletenih paličjih.

Pri prerezni metodi paličje navidezno prerežemo na dva dela. Nato si izberemo en del. Odrezani del je tudi togo telo in ker je del celotnega paličja, ki miruje, veljajo tudi za ta del ravnovesne enačbe in te enačbe določajo sile prerezanih palic, ki so za odrezani del zunanje sile. Poglejmo na primeru, kako deluje prerezna metoda.



Slika 9: Paličje sestavljeno kvadratov.

Za podano paličje na sliki 9 moramo določiti sile označenih palic. Uporabili bomo presečno metodo, ki z navideznim presekom skozi označene palice razdeli paličje na dva dela. Prvi korak pri presečni metodi je izračun sil podpor. Levo podporo, ki je nepomična členkasta podpora označimo z  $A$ , desno pa z  $B$ . Desna podpora je drsna v smeri, ki oklepa kot  $\pi/4$  z vodoravno smerjo. V levo podporo postavimo izhodišče koordinatnega sistema z osjo  $x$  v vodoravni smeri. Potem je sila leve podpore  $\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j}$ , sila desne podpore pa je  $\vec{B} = B(-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j})$ . Tu smo upoštevali, da je podpora drsna pod kotom  $\pi/4$ , in je zato sila podpore v smeri  $\pi/4 + \pi/2$ . Paličje je obremenjeno

v treh točkah s prijemališči  $P_1 = (a, 0)$ ,  $P_2 = (3a, 0)$  in  $P_3 = (6a, 0)$  s silami  $\vec{F}_1 = -F\vec{j}$ ,  $\vec{F}_2 = -2F\vec{j}$  in  $\vec{F}_3 = 2F\vec{i}$ . Komponento  $A_2$  dobimo iz ravnovesja momenta s polom v  $B$

$$-6a \times A_2 + 5a \times F + 3a \times 2F - a \times 2F = 0.$$

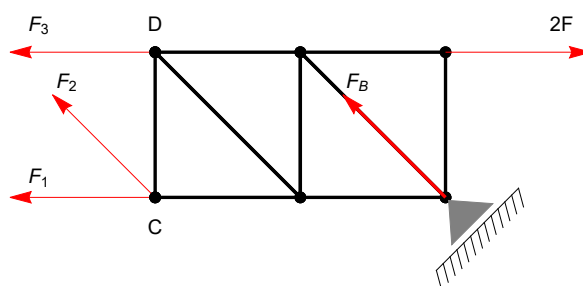
Rešitev je  $A_2 = 3F/2$ . Momentna enačba s polom v  $A$  je

$$-a \times F - 3a \times 2F - a \times 2F + 6a \times B \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.$$

Rešitev je  $B = \frac{3F\sqrt{2}}{2}$ . Komponento  $A_1$  izračunamo iz ravnovesja sil v vodoravni smeri. Enačba se glasi

$$A_1 - B/\sqrt{2} + 2F = 0.$$

V enačbo vstavimo že izračunano vrednost za  $B$ . Potem je  $A_1 = -F/2$ .



Slika 10: Odrezani desni del paličja.

Po izračunu sil podpor je na vrsti izračun sil označenih palic. Izberimo si desni del odrezanega paličja, glej sliko 10. Določiti moramo sile  $F_1$ ,  $F_2$  in  $F_3$ . Silo  $F_3$  dobimo iz ravnovesja momenta s polom v točki  $C$

$$-a \times F_3 + a \times 2F - 2a \times B/\sqrt{2} = 0.$$

Potem  $F_3 = -F$ . Tu smo upoštevali že znano vrednost  $B$ . Silo  $F_1$  dobimo iz momentne enačbe s polom v presečišču sile  $\vec{F}_2$  in  $\vec{F}_3$

$$-a \times F_1 - a \times B/\sqrt{2} + 3a \times B/\sqrt{2} = 0.$$

Rešitev je  $F_1 = 3F$ . Silo  $F_2$  izračunamo iz ravnovesja sil. Vsota sil v navpični smeri je

$$F_2/\sqrt{2} + B/\sqrt{2} = 0 \implies F_2 = -\frac{3F\sqrt{2}}{2}.$$

Pravilnost izračuna lahko še peverimo z izračunom vsote v vodoravni smeri. Tako smo dobili iskane sile palic

$$F_1 = 3F, \quad F_2 = -\frac{3F\sqrt{2}}{2} \quad \text{in} \quad F_3 = -F.$$

Seveda lahko kombiniramo obe metodi. S prerezno metodo izračunamo sile presekanih palic, nato pa z vozliščno metodo nadaljujemo z izračunom sil sosednjih palic. Če presek seka več kot tri oziroma šest palic, začnemo z vozliščno metodo v vozlišču, ki je povezano samo z dvema (trema) palicama (palicami) in nato usmerimo vozliščno metodo proti vozliščem presekanih palic.

## Vprašanja

1. Kolikšen je ovojni kot, če vrv ovijemo dvakrat okrog koluta?
2. Za koliko moramo povečati ovojni kot, če se koeficient trenja zmanjša za polovico?
3. Naštej kombinacije zglobov in drsnikov, ki jih nismo našeli v klasifikaciji spojev.
4. Skiciraj tri primere statično nedoločenega paličja.
5. Skiciraj primer paličja pri katerem ne moreš uporabiti prerezne metode.
6. Kaj je prednost prerezne metode in kaj so njene slabosti?
7. Kaj je prednost vozliščne metode in kaj so njene slabosti?
8. Za prostorsko paličje, ki je podprto v treh točkah, najdi primer statično določene podpore.