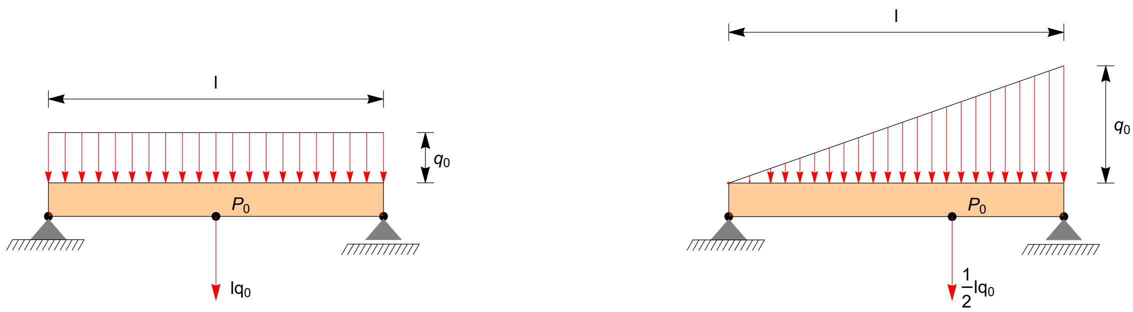
Predavanja 31. marec 2021

Ravni nosilci

Podobno kot palica je nosilec konstrukcijski element z eno prevladajočo dimenzijo. Tej dimenzij pravimo dolžina, ostalima dvema pa debelina in višina. Dimenzija je prevladajoče, če je vsaj za faktor 10 večja od prostalih. Z razliko od palice pa nosilec dopušča obremenitev v poljubni smeri vzdolž celotne dolžine elementa. V tem poglavju bomo nosilec obravnavali v okviru modela togega telesa. Deformacijo nosilcev bomo obravnavali pri Trdnosti. Omejili se bomo na ravne ravninske nosilce. Standarden nosilec v uporabi je raven, ukrivljeni so v večini izdelani po naročilu. Nadalje, če je raven nosilec obremenjen simetrično, lahko uporabimo ravninski model. Ker bomo v tem poglavju nosilce obravnavali kot toga telesa, oblika nosilca ni pomembna. Pomembna je samo njegova dolžina, podpore in sile obremenitve, zato je v tem poglavju pomembna samo os nosilca. Privzeli bomo, da imajo vse sile na nosilec prijemališče na tej osi. Kljub temu pa bomo zaradi lepše predstavitve nosilce na slikah upodobili kot razpotegnjene pravokotnike, ki so obremenjeni na zgornji stranici. Po polznosti lahko obremenitve pravokotne na zgornjo stranico prestavimo na spodnjo stranico na katero bodo delovale tudi sile podpor. Spodnja stranica bo tako predstavljala os nosilca.

Linijska obremenitev

Nosilec je lahko obremenjen vzdolž svoje dolžine. Pravimo, da je linijsko obremenjen. Linijska obremenitev je podana z dolžinsko gostoto obremenitve. Ker nosilce obravnavamo še v okviru modela togega telesa, želimo linijski obremenitvi prirediti ekvipolentno točkovno obremenitev. V ta namen se omejimo na dve posebna primera linijske obremenitve, konstantno oziroma enakomerno in linearno, glej sliko 1. V obeh primerih je sila pravokotna na nosilec. Taki sili pravimo *prečna sila.*

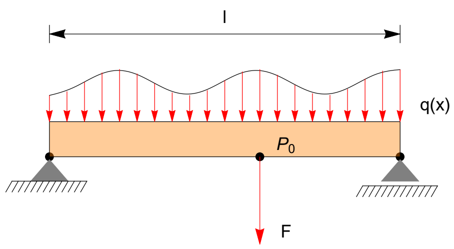


Slika 1: Linijska obremenitev z rezultanto: levo konstantna, desno linearna.

Pri konstantni obremenitvi je gostota obremenitve konstantna. Označimo jo s q_0 glej sliko 1 za shematski prikaz. Pri upodobitvi sil na skici velja opozoriti na potankost, ki smo jo do sedaj zamolčali. Konstrukcijo oziroma sistem togih teles narišemo v izbranem merilu, ki določa razdaljo med točkami. Nato narišemo na isto sliko še sile. Silo narišemo kot vektor, velikost tega vektorja na sliki bi naj bila velikost sile. Vendar ni, saj ima velikost objekta na sliki dolžinsko enoto. Če želimo torej, da slika v vseh potankostih opiše nalogo, moramo sliko opremiti še s podatkom, kakšno je razmerje med velikostjo sile in dolžinsko enoto na sliki. Ker pa je za vse sile, ki nastopajo v problemu to razmerje enako, nam tega razmerja pri risanju ni potrebno eksplicitno določiti. Razmerja celo ni potrebno določiti, če nalogo rešimo grafično. Grafično reševanje, tej metodi pravimo *grafostatika*, danes ne uporabljamo več. Na slki 1 je torej q_0 poljubno izbran. Nosilec smo ubremenili navzdol, seveda pa bi ga lahko obremenili navzgor. Ko govorimo o predzanku obremenitve nosilca smeri navzdol pravimo pozitivna. V nadaljevanju bomo tako postavili koordinatni sistem xz tako, da bo os x kazala v smeri nosilca, os z pa navzdol. Zakaj smo izbrali os z in ne osi y bomo kmalu videli. Rezultanta konstantne linijske obremenitvije je potem $q_0 l$, kjer je l dolžina nosilca. Linijska obremenitev je sistem vzporednih sil, za katerega vemo, da ga lahko reduciramo na silo s skupnim prijemališčem v "masnem"središču obremenitve. V primeru konstantne obremenitve je to na polovici nosilca. Glej sliko 1.

Linearna linijska obremenitev je podana na desni sliki slike 1. Gostota narašča linearno od vrednosti nič na levem krajišču do vrednosti q_0 na desnem. Če označimo z x razdaljo vzdolž nosilca od levega krajišča, je potem gostota linijske obremenitve $q(x)$ funkcija $q(x) = q_0 x/l$. V primeru, ko gostota pada od vrednosti q_0 proti vrednosti nič pa je $q(x) = q_0(l - x))/l$. Linearno linijsko obremenitev si lahko predstavljamo kot na nosilec naložen pesek s konstantno strmino. Rezultanta linearne obemenitve je enak ploščini trikotnika, ki ga omejujeta os x in funkcija $q(x)$, rezultanta je potemtakem enaka $\frac{1}{2} q_0 l$. Linearna obrementev je tudi sistem vzporednih sil. Ekvipolentna rezultanta ima torej prijemališče v masnem središču trikotnika, to je v razdalji $\frac{2l}{3}$ od krajišča, kjer je gostota enaka nič, glej sliko 1.

Poleg prečne sile, ki smo jih obravnavali, je nosilec lahko obremenjen tudi v smeri nosilca. Tem silam pravimo osne sile. V okviru statike lahko po polznosti te sile prestavimo vzdolž osi na eno izmed krajišč osi nosilca. V tem poglavju osnim silam ne bomo posvečali večje pozornosti. Naloge z osnimi silami rešimo na podoben način kot naloge s prečnimi silami.



Slika 2: Linijska obremenitev z rezultanto.

Poglejmo še splošen primer. Naj bo $q(x)$ poljubna linijska prečna obremenitev, glej sliko 2. Potem je rezultanta F dana s ploščino med osjo nosilca in grafom funkcije $q(x)$.

$$F = \int_0^l q(x)\, dx. \tag{1}$$

Smer rezultante je v smeri osi z. Če je $F > 0$ kaže rezultanta navpično navzdol, torej v smeri osi z, če je $F < 0$ pa kaže navzgor. Navor linijske obremenitve s polom v levem krajišču je

$$N = \int_0^l x q(x)\, dx. \tag{2}$$

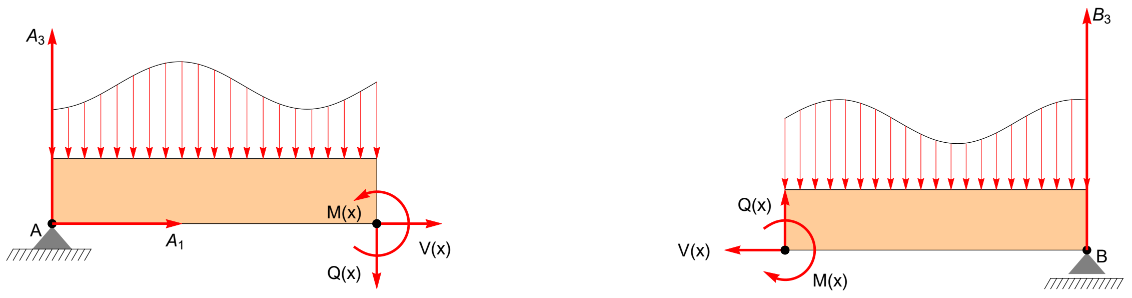
Smer navora je pravokotna na ravnino nosilca. Če je $N > 0$ navor kaže v ravnino sliko, pri $N > 0$ pa iz ravnine ven. Prvi smer je v smeri vektorja $-\vec{\jmath}$, druga pa $\vec{\jmath}$. Rezultanta s prijemališčem v

$$x_* = \frac{1}{F} N = \frac{\int_0^l x q(x)\, dx}{\int_0^l q(x)\, dx} \tag{3}$$

je ekvipolentna točkovna obremenitev.

Notranje količine nosilca

Če nosilec v statičnem ravnovesju navidezno prerežemo, dobimo dva konca nosilca, ki sta v statičnem ravnovesju. Ravnovesje ohranja delovanje enega dela odrezanega nosilca na drugi. Na prerezu nosilca se prenašajo vse komponente sil in navora. V ravninskem primeru torej komponenti sil v smeri x in z in navor okrog osi y. Komponento v smeri osi x imenujemo osno silo in jo označimo z $V(x)$, komponenta v smeri z je prečna sila $Q(x)$, navoru oziroma momentu v smeri y pa pravimo upogibni moment in ga označimo z $M(x)$. Vse te količine so odvisne od koordinate prereza x, zato so funkcije te koordinate. Pravimo jim *notranje količine nosilca.* V nadaljevanju bomo z $V(x)$, $Q(x)$ in $M(x)$ označevali komponente sil in navora desnega dela $\{s : x \leq s \leq l\}$ odrezanega nosilca pri koordinati x na levi del nosilca $\{s : 0 \leq s < x\}$. V definiciji smo rez $s = x$ vključili v desni del nosilca. Če je torej nosilec točkovno obremenjen v točki x, potem ta obremenitev pri rezu pri x pripada desnemu delu nosilca.

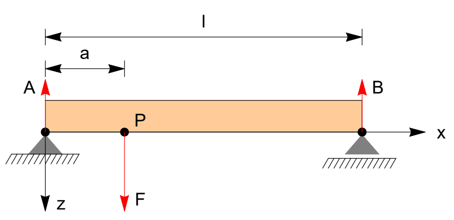


Slika 3: Navidezni prerez nosilca.

Na sliki 3 je prikazan prerez nosilca iz slike 2. Poleg linijske obremenitve in sil podpor so narisane tudi notranje količine. Vidimo da so vse notranje količine levega dela nosilca na desni nasprotno predznačene kot notranje količine desnega dela na levi del. Če postavimo koordinatni sistem z osjo x v smeri dolžine nosilca, osjo y v smeri iz ravnine nosilca in os z v smeri navzdol so sile in momenti desnega dela nosilca na levi $\vec{V} = V(x)\vec{\imath}$, $\vec{Q} = Q(x)\vec{k}$, $\vec{M} = M(x)\vec{\jmath}$, levega na desni pa $-\vec{V}$, $-\vec{Q}$ in $-\vec{M}$. Na sliki opazimo tudi, da so vertikalne sile podpor usmerjene navzgor. Tako bomo sile podpor na nosilec pisali v obliki $\vec{A} = A_1\vec{\imath} - A_3\vec{k}$ za fiksno podporo in $\vec{B} = -B\vec{k}$ za drsno podporo.

Notranje količine so odvisne od kraja prereza. Spoznali bomo dve metodi, kako jih določiti.

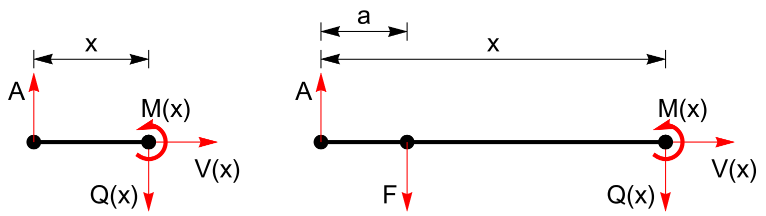
Prerezna metoda



Slika 4: Točkovno obremenjen nosilec.

Kako deluje metoda je najbolje razložiti na primeru. Začnimo s primerom točkovno obremenjenega nosilca, glej sliko 4. Prvi korak je določitev sil podpor. Ker je nosilec obremenjen samo vertikalno s silo $\vec{F} = F\vec{k}$, sta očitno obe sili podpor samo v vertikalni smeri. Torej je $\vec{A} = -A\vec{k}$ in $\vec{B} = -B\vec{k}$. Iz ravnovesja navorov s polom v točki A in B hitro dobimo, da je

$$A = (1 - \frac{a}{l})F \quad \text{in} \quad B = \frac{a}{l}F. \tag{4}$$



Slika 5: Prerez točkovno obremenjenega nosilca, levo: prerez pred točkovno obremdenitvijo; desno: po točkovni obremdenitvi.

Sile podpor so s tem določene. Izberimo $x \in (0, l)$. Pri določitvi notranjih količin nosilca, ki je točkovno obremenjen, je zelo pomembno mesto prereza glede na prijemališče obremenitve, glej sliko 5. Naj bo $x \in (0, a)$. Temu prerezu pred točkovno obremenitvijo ustreza leva slika na 5. Takoj vidimo, da je ta odrezani del v ravnovesju, če je $V(x) = 0$ in $Q(x) = A$. Navor prečne sile s polom v levem krajišču je $xQ(x)$ v smeri v ravnino nosilca. Potem iz momentne enčbe sledi $M(x) = xQ(x)$. Tako smo dobili

$$V(x) = 0, \qquad Q(x) = A = (1 - \frac{a}{l})F, \qquad M(x) = xA = x(1 - \frac{a}{l})F \quad \text{za} \quad 0 \leq x < a. \tag{5}$$

Primer $a \leq x \leq l$ je skiciran na desni sliki na 5. Tu smo dopustili $x = a$ po dogovoru, da desni del nosilca vsbuje prerez. Sedaj na odrezani desni del nosilca deluje sila obremenitve $\vec{F}$. Ravnovesne enačbe za ta del so tako:

$$V(x) = 0, \qquad -A + F + Q(x) = 0 \quad \text{in} \quad -aF - xQ(x) + M(x) = 0.$$

Tako dobimo

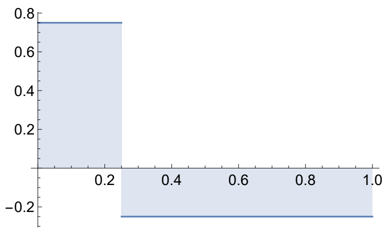
$$V(x) = 0, \qquad Q(x) = A - F = -\frac{a}{l}F, \qquad M(x) = aF + x(A - F) = a(1 - \frac{x}{l})F \quad \text{za} \quad a \leq x \leq l. \tag{6}$$

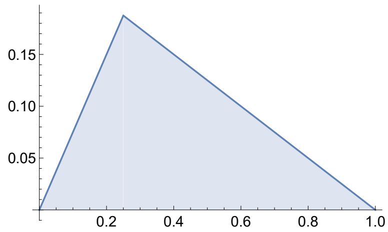
Dobili smo potek notranjih količin za cel nosilec. Kaj opazimo?

- Osna sila je po celi dolžini enaka nič. To je zato, ker obremenitev $\vec{F}$ nima komponente v smeri osi nosilca.
- Prečna sila je odsekoma konstantna. Na intervalu od $0 \leq x < a$ ima vrednost desne podpore, na $a \leq x \leq l$ pa nasprotno vrednost desne podpore. V točki obremenitve ima skok velikosti obremenitve. Ta lastnost velja v splošnem za točkovne obremenitve. V vsaki točki točkovne obremenitve ima prečna sila skok v smeri in velikosti obremenitve. V točkah obremenitev je prečna sila zveza z desne.
- Upogibni moment je enak nič v krajiščih nosilca. To je posledica podpor. Upogibni moment na levem krajišču nosilca je nasprotno enak momentu podpore, na desnem pa je enak momentu podpore. Če je podpora členkasta je moment enak nič in potemtakem je upogibni moment v členkastih podporah na koncu nosilca enak nič. To velja za vse vrste podpor. V

primeru, če je nosilec prevesen, to pomeni, da ni podprt na krajišču nosilca, ampak nekje vmes, je upogibni moment na krajišču nosilca enak nič, razen v primeru, če na koncu deluje zunanji navor. V primeru točkovno podprtega nosilca upogibni moment narašča z x do $x = a$, nato pa pada. Če vstavimo $x = a$ v enačbi za moment (5) in (6) dobimo obakrat enako vrednost $M(a) = a(1 - a/l)F$. Upogibni moment točkovne obremenitve je torej zvezen. Upogibni moment je torej odsekoma linearen. Funkcija upogibnega momenta $M(x)$, je zvezna, ni pa odvedljiva v točkah obremenitve. Odsekoma linearen upogibni moment doseže ekstremalne vrednosti v točkah obremenitve.

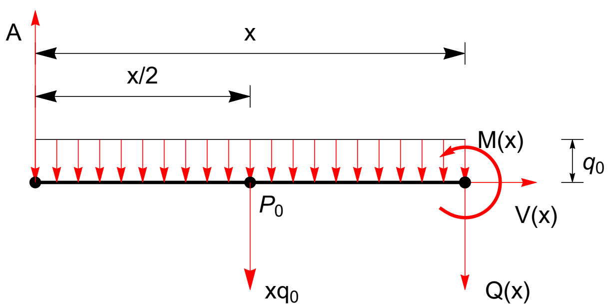
Slika 6 prikazuje grafa prečne sile in upogibnega momenta za primer $a = l/4$.





Slika 6: Prečna sila in upogibni moment točkovne obremenitve pri $a = l/4$. Slika je brezdimenzijska.

Poglejmo še primer uporabe prerezne metode na linijsko obremenjenem nosilcu. Naj bo nosilec konstantno obremenjen tako kot kaže leva slika v sliki 1, naj velja $q(x) = q_0$. V primeru zvezne linijske obremenitve lahko prerez naredimo kjerkoli neodvisno od položajana na nosilcu. Tudi sedaj je prvi korak določitev sil podpor. Linearni linijski obremenitvi je ekvipolentna točkovna obremenitev, ki kaže navzdol, ima velikost $F = q_0 l$ in ima prijemališče pri $a = \frac{1}{2}l$. Potem je po formuli (4) $A = B = \frac{1}{2}F$. To sledi tudi iz simetrije naloge, podpori sta enako obremenjeni in uravnovešata obremenitev F.



Slika 7: Prerez linearno obremenjenega nosilca.

Izberimo $0 \leq x \leq l$. Na del nosilca od 0 do x deluje sila podpore A, linijska obremenitev osna in prečna sila $\vec{V}(x)$ in $\vec{Q}(x)$ ter upogibni moment $M(x)$, glej sliko 7. Ravnovesne enačbe so

$$V(x) = 0, \qquad -A + xq_0 + Q(x) = 0, \qquad -\frac{1}{2}q_0 x^2 - xQ(x) + M(x) = 0.$$

Rešitev je

$$V(x) = 0, \qquad Q(x) = q_0(\frac{1}{2}l - x), \qquad M(x) = \frac{1}{2}q_0 x(l - x). \tag{7}$$

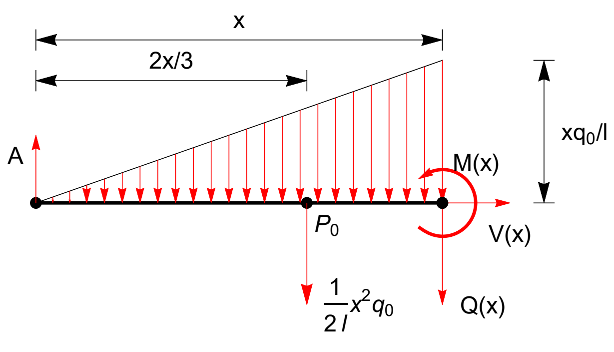
Na sliki 8 je upodobljena rešitev (7). Rešitev ima povsem drugačen značaj kot pri točkovni obremenitvi. Sedaj sta tako prečna sila in upogibni moment zvezni funkciji. Na levem krajišču

Slika 8: Prečna sila in upogibni moment za konstantno linijsko obremenitvijo. Slika je brezdimenzijska, abcisa je x/l, ordinata pa $1/q_0 l$ oziroma $1/q_0 l^2$.

ima prečna sila vrednost velikosti leve podpore, na desnem pa vrdnost nasprotno velikosti desne podpore. To se ujema s primerom točkovne obremenitve. Potek pa je drugačen. Sedaj prečna sila linearno pada od levega do desnega krajišča. Upogibni moment je kvadratna funkcija, ki je na krajiščih enaka nič. Upogibni moment doseže maksimalno vrdnost na polovici, to je v točki, kjer je prečna sila enaka nič. To ni naključje, Videli bomo, da je vrednost prečne sile enaka nič v točkah, kjer ima upogibni moment linijske obremenitve ekstramalen.

Konstantni linijski obremenitvi je ekvipolentna točkovna obremenitev s prijemališčem na polovici nosilca. Obremenitvi sta ekvipolenti, kar pomeni, da imata v statiki enak učinek. Vendar ta enakovrednost ne velja za notranje količine. Potek prečne sile in upogibnega momenta je za točkovno obremenitvijo bistveno drugačen od ekvipolentne linijske obremenitvije, primerjaj sliki 6 in 8. Notranje količine torej presegajo okvir modela togega telesa. To nas ne sme presenetiti, saj če se spomnemo, je enačba gibanja masnega središča togega telesa neodvisna od notranjih sil, izrek o vrtilni količini pa od notranjih momentov. Enak zaključek, da dve ekvipolentni obremenitvi nimata enakih notranjih količin velja tudi za paličje. Tam so sile palic notranje količine in so odvisne od obremenitev v vozliščih.

Poglejmo še primer, ko je nosilec linearno obremenjen. Naj velja $q(x) = q_0 x$, glej desno sliko v sliki 6. Prvi korak je, kot že vemo, določitev sil podpor. Linearni linijski obremenitvi je ekvipolentna točkovna obremenitev, ki kaže navzdol, ima velikost $F = \frac{1}{2} q_0 l$ in ima prijemališče pri $a = \frac{2}{3} l$. Potem je po formuli (4) $A = \frac{1}{3} F = \frac{1}{6} q_0 l$ in $B = \frac{2}{3} F = \frac{1}{3} q_0 l$.



Slika 9: Prerez linearno obremenjenega nosilca.

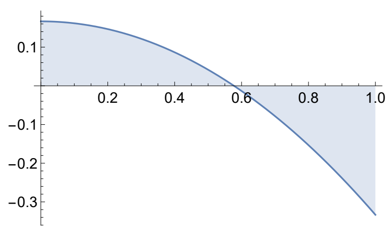
Izberimo $0 \leq x \leq l$. Na del nosilca od 0 do x deluje sila podpore A, linijska obremenitev osna in prečna sila $\vec{V}(x)$ in $\vec{Q}(x)$ ter upogibni moment $\vec{M}(x)$, glej sliko 9. Ravnovesne enačbe so

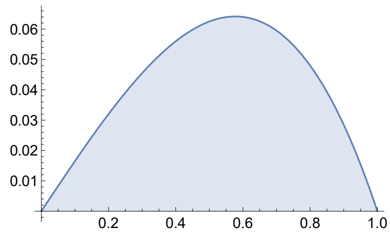
$$V(x) = 0, \qquad -A + \frac{1}{2l} q_0 x^2 + Q(x) = 0, \qquad -\frac{1}{3l} q_0 x^3 - xQ(x) + M(x) = 0.$$

Rešitev je

$$V(x) = 0, \qquad Q(x) = \frac{1}{6} q_0 l (1 - 3(x/l)^2), \qquad M(x) = \frac{1}{6} q_0 l x (1 - (x/l)^2) \tag{8}$$

Rešitev je upodobljena na sliki 10. Sedaj je prečna sila kvadratna funkcija, upogibni moment pa kubična. Ta lastnost, da je pri polinomski linijski obremenitvi stopnje n prečna sila polinom stopnje $n+1$, upogibni moment pa stopnje $n+2$ velja vedno.

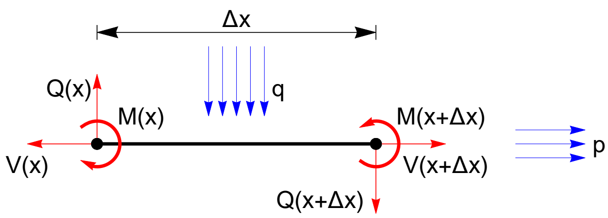




Slika 10: Prečna sila in upogibni moment za linearno linijsko obremenitvijo. Slika je brezdimenzijska, abcisa je x/l, ordinata pa $1/q_0 l$ oziroma $1/q_0 l^2$.

Določitev notranjih količin nosilca je linearna naloga. To pomeni, če je obremenitev nosilca vsota dveh obremenitev, so potem notranje količine enake vsoti notranjih količin posameznih obremenitev. Tako lahko iz obravnavanih primerov takoj sestavimo notranje količine za obremenitev sestavljeno iz točkastih in linijskih obremenitev.

Diferencialna metoda



Slika 11: Odsek nosilca med x in $x + \Delta x$.

Z diferencialno metodo bomo izpeljali diferencialne zveze med notranjimi količinami. Izberimo $x \in (0, l)$ in $\Delta x > 0$, tako da je $x + \Delta x \in (0, l)$ in navidezno prerežimo nosilec pri x in $x + \Delta x$, glej sliko 11. Privzemimo, da je na intervalu od x do $x + \Delta x$ linijska obremenitev $f = p\vec{\imath} + q\vec{k}$ zvezna in da ima prijemališče na osi nosilca. Sile in momenti na odrezan del nosilca so prikazane na sliki 11.

Ravnovesne enačbe za odrezani del nosilca med x in $x + \Delta x$ so

$$\begin{aligned} V(x+\Delta x) - V(x) + \int_x^{x+\Delta x} p(s)\, ds = 0, \\ Q(x+\Delta x) - Q(x) + \int_x^{x+\Delta x} q(s)\, ds = 0, \\ M(x+\Delta x) - M(x) - \int_x^{x+\Delta x} (s-x) q(s)\, ds - \Delta x Q(x+\Delta x) = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Prva enčba je ravnovesna enačba v vodoravni smeri. Tu smo upoštevali, da je osna sila desnega dela nosilca na odrezani nosilec v točki $x+\Delta x$ enaka $V(x+\Delta x)$, sila levega dela v x na odrezani del pa $-V(x)$. Gostota vodoravne komponente linijske sile je porazdeljena po dolžini od x do $x+\Delta x$. Njena rezultanta je vsota vseh teh prispevkov. Ker gre za zvezno porazdelitev, se ta vsota izraža z določenim integralom. Podobno velja za rezultanto v smeri osi $\vec{k}$. Tretja enačba je ravnovesna enačba navora s polom v levem krajišču odrezanega nosilca. Poleg navorov na krajiščih, ki jih prispevata dela nosilca levo in desno od odrezanega dela nastopa še navor prečne sile na desnem krajišču in navor prečne linijske obremenitve. Ta navor je zapisan z integralom.

Sedaj delimo vse enačbe z Δx in poženimo Δx proti nič. Na ta način bomo enačbe lokalizirali in dobili iskane diferencialne zveze. Po definiciji je odvod limita diferenčnega kvocienta. Nadalje je po izreku o povprečni vrednosti

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} p(s)\,ds = p(x).$$

Tu se velja spomniti, da izrek o povprečni vrednosti velja, če je funkcija pod integralskim znakom zvezna. Tako dobimo iz prvih dveh enačb

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}(x) = -p(x), \quad \text{in} \quad \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}(x) = -q(x). \tag{10}$$

Osna in prečna sila sta torej odvedljivi, njuna odvoda določata enačbi (10). Odvedljiva funkcija je tudi zvezna. Potem $\lim_{\Delta x\to 0} Q(x+\Delta x) = Q(x)$. Iz tretje enačbe v (9) potem dobimo

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}(x) = Q(x). \tag{11}$$

Tu smo upoštevali, da je limita povprečna vrednost intgrala navora v (9) enaka nič. Enačbe (10) in (11) so diferencialne enačbe notranjih količin nosilca. Iz diferncialnega računa je znano, da ima funkcija $f(x)$ v točki x_0 lokalni maksimum/minimum, če je v tej točki odvod funkcije enak nič in je drugi odvod negativen/pozitiven. V našem primeru to pomeni, da je upogibni moment maksimalen/minimalen, če je v tej točki prečna sila enaka nič in je gostota linijske sile q v tej točki pozitivna/negativna. Tu smo upoštevali, da iz (10) in (11) sledi

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -q(x).$$

Kako uporabimo diferencialno metodo, si oglejmo na primeru.

Linearna linijska obremenitev

Za primer uporabe diferencialne metode bomo rešili že po prerezni metodi rešeno nalogo linearne linijske obremenitve $q(x) = q_0 x/l$ na enostavno podprtemu nosilcu. Osna sila je enaka nič. Za določitev prečne sile rešimo enačbo

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} = -q(x) = -q_0\frac{x}{l}.$$

Vprašajmo se, kaj moramo odvajati, da dobimo x. Odgovor je $\frac{1}{2}x^2$ oziroma $\frac{1}{2}x^2 + C_1$, saj je odvod konstante enak nič. Potem je rešitev zgornje enačbe

$$Q(x) = -\frac{q_0x^2}{2l} + C_1.$$

Konstanto C_1 bi lahko določili iz vrednosti prečne sile na krajišču. Vendar to ne bomo storili. Določili jo bomo kasneje iz robnega pogoja na upgibni moment. Sedaj, ko je prečna sila izračunana, vstavimo to v enačbo (11). Tako dobimo

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}(x) = -\frac{q_0 x^2}{2l} + C_1.$$

Odvod monoma x^n je nx^{n-1}. Potem je

$$M(x) = -\frac{q_0 x^3}{6l} + C_1 x + C_2.$$

Odvod izračunanega momenta potrdi pravilnost izračuna. Na vrsti je določitev konstant C_1 in C_2. Upoštevajmo, da sta podpori členkasti. Potem je $M(x=0) = M(x=l) = 0$. Iz enačbe $M(0) = 0$ sledi takoj $C_2 = 0$. Izračunajmo še C_1. Velja

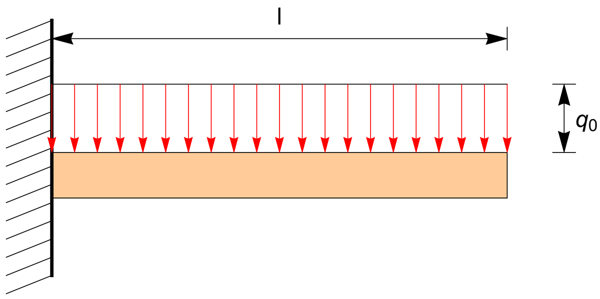
$$0 = M(l) = -\frac{q_0 l^2}{6} + C_1 l.$$

Potem je $C_1 = q_0 l/6$. Iskani notranji količini sta potem

$$Q(x) = \frac{q_0 l}{6}\left(1 - 3(x/l)^2\right) \quad \text{in} \quad M(x) = \frac{q_0 l}{6} x \left(1 - (x/l)^2\right).$$

Dobili smo enako rešitev kot pri prerezni metodi (8). Pot po diferencialni metodi je elegantnejša, je pa zato matematično zahtevnejša, saj je pri njej potrebno rešiti diferencialne enačbe. Poleg tega lahko prerezno metodo uporabimo vedno, diferencialno metodo pa samo, če je linijska obremenitev zvezna. V kratkem pa bomo prednosti obeh metod združili in tako dobili metodo, ki jo lahko vedno uporabimo. Še prej pa poglejmo primer konzolno vpetega nosilca.

Konzolno vpeti nosilec



Slika 12: Enakomerno obremenjen konzolni nosilec.

Konzolno vpeti nosilec je enakomerno linijsko obremenjen $q(x) = q_0$, glej sliko 12. Zanima nas potek prečne sile in upogibnega momenta. Rešitev enačbe $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} = -q_0$ je $Q(x) = -q_0 x + C_1$. Potem je $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = -q_0 x + C_1$ in $M(x) = -\frac{1}{2} q_0 x^2 + C_1 x + C_2$. Na vrsti je določitev konstant C_1 in C_2. Za določitev konstant moramo poznati vrednosti prečne sile ali upogibnega momenta na krajiščih nosilca. Konzolni nosilec je prost na svojem desnem koncu.To pomeni, da sta na desnem krajišču prečna sila in upogibni moment oba enaka nič. Velja torej $Q(x=l) = 0$ in $M(x=l) = 0$. Tako imamo dve enačbi za dve neznani konstanti. Iz enačbe $Q(x=l) = 0$ takoj dobimo $C_1 = q_0 l$. Potem je $M(x) = -\frac{1}{2} q_0 x^2 + q_0 l x + C_2$ in ker je $M(x=l) = 0$, je $C_2 = -\frac{1}{2} q_0 l^2$. Tako smo dobili

$$Q(x) = q_0 (l - x) \quad \text{in} \quad M(x) = -\frac{1}{2} q_0 l^2 \left(1 - x/l\right)^2. \tag{12}$$

Sedaj ko poznamo prečno silo in upogibni moment lahko tudi zapišemo sile in navor v konzolni podpori. Vodoravna komponenta sile konzolnega vpetja A_1 je očitno enaka nič, saj na nosilec ne deluje obremenitev v vodoravni smeri. Vertikalna komponenta A_2 je enaka prečni sili pri $x = 0$, torej $A_2 = q_0 l$. Iz ravnovesja momenta pri $x \to 0$ pa sledi, da je navor N podpore nasprotno enak upogibnemu momentu $M(x = 0)$, saj mora biti njuna vsota enaka nič. Tako smo dobili $N = -\frac{1}{2} q_0 l^2$. Silo in navor konzolnega vpetja bi lahko izračunali seveda tudi direktno, z upoštevanjem ravnovensnih enačb za nosilec.

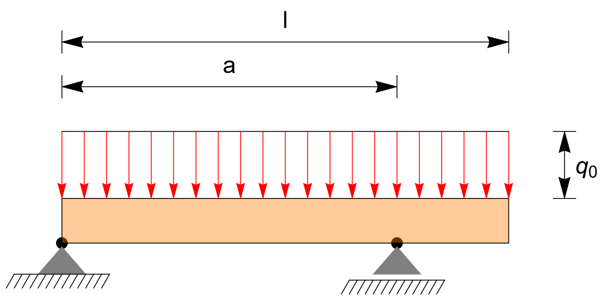
V rešitev (12) opazimo, da je upogibni moment vseskozi negativen. Po drugi strani pa je upogibni moment vseskozi pozitiven v (7) in (8). Zakaj? Odgovor je v upogibu, če nosilec ni tog, ga obremenitev upogne. Če je tendenca upogiba navzdol, je upogibni moment pozitiven, če je tendenca upogiba navzgor, je upogibni moment negativen. Pogostokrat lahko tendenco upogiba predvidimo iz obremenitve nosilca, tako da je to kontrola ali je izračunani upogibni moment v pravi smeri.

Robni pogoji

Konstante pri diferencialni metodi smo določili z robnimi pogoji na prečno silo ali upogibni moment. Velja naslednje:

- Na prostem koncu nosilca, torej če nosilec na koncu ni obremenjen, niti podprt, je tam upogibni moment enak nič, nič pa sta tudi osna in prečna sila.
- Če je desni konec nosilca pri $x = l$ obremenjen s silo v smeri pravokotno na nosilec, je prečna sila enaka sili obremenitve, če pa je obremenjen levi konec, je prečna sila enaka nasprotni sili obremenitve. To že poznamo iz naloge enostavno podprtega nosilca. Če je sila leve podpore $\vec{A} = -A\vec{k}$ in desne $\vec{B} = -B\vec{k}$, je $\vec{Q}(0) = -\vec{A} = A\vec{k}$ in $\vec{Q}(l) = \vec{B} = -B\vec{k}$. Enako velja tudi za osno silo in upogibni moment. Obremenitev nosilca na koncu z upogibnim momenti smo spoznali pri konzolnem nosilcu.

Prevesni nosilec



Slika 13: Enakomerno obremenjen prevesni nosilec.

Prevesni nosilec, glej sliko 13, je enakomeno obremenjen. Sedaj diferencialne metode ne moremo direktno uporabiti, saj je nosilec v desni podpori B točkovno podprt s silo podpore. Nalogo bomo rešili s kombinacijo obeh metod. Prvo določimo sile podpor. Enakomerna linijska obremenitev je ekvipolentna točkovni obremenitvi $F = q_0 l$ s prijemališčem na polovici dolžine nosilca $l/2$. Potem iz ravnovesja momenta s polom v desni podpori B sledi $(a - l/2)F = aA$ in

$$A = (1 - l/(2a))F = lq_0 - \frac{1}{2a} q_0 l^2.$$

Ravnovesna enačba s polom v A je $aB = lF/2$ in

$$B = \frac{1}{2a} q_0 l^2.$$

Linijska obremenitev na intervalu $(0, a)$ je enakomerna. Zato lahko na tem intervalu uporabimo enakost $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} = -q_0$. Potem je $Q(x) = -q_0 x + C_1$. Ker je $Q(0) = A$, je $C_1 = A$ in tako

$$Q(x) = l q_0 \left(1 - \frac{l}{2a}\right) - q_0 x \quad \text{za} \quad 0 \leq x < a. \tag{13}$$

V $x = a$ deluje sila podpore B, zato ima prečna sila v tej točki skok velikosti podpore, $\vec{Q}(a) = \vec{Q}(a-) - \vec{B} = Q(a-)\vec{k} + B\vec{k}$. Tu smo z $Q(a-)$ zapisali levo limto $x \to a$ in uporabili formulo za obremenitev z leve strani. Potem je

$$Q(x = a) = Q(a-) + B = l q_0 \left(1 - \frac{l}{2a}\right) - q_0 a + \frac{1}{2a} q_0 l^2 = q_0 (l - a).$$

Za $x \in (a, l)$ je nosilec ponovno samo linijsko obremenjen. Velja torej $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} = -q_0$. Potem je $Q(x) = -q_0 x + C_2$. Konstanto C_2 lahko določimo na dva načina, veljati mora $Q(a) = Q(a+)$ in $Q(l) = 0$. Prva enačba pravi, da je prečna sila v $x = a$ enaka desni limiti $\lim_{x \to a+} Q(x)$. Z drugimi besedami, prečna sila je zvezna z desne. Eno enakost bomo uporabili za izračun konstante, drugo pa za kontrolo. Zapišimo

$$Q(a) = Q(a+) \Longrightarrow q_0 (l - a) = -q_0 a + C_2 \Longrightarrow C_2 = q_0 l$$

in tako

$$Q(x) = l q_0 \left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad \text{za} \quad a \leq x \leq l. \tag{14}$$

Iz (14) vidimo, da je velja tudi $Q(x = l) = 0$ saj je desni konec nosilca prost.

Na vrsti je izračun upogibnega momenta. Tu uporabimo formulo $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = Q$. Tako dobimo

$$\begin{aligned} M &= l q_0 \left(1 - \frac{l}{2a}\right) x - \frac{1}{2} q_0 x^2 + C_3, \quad \text{za} \quad 0 \leq x < a \\ M &= l q_0 \left(x - \frac{x^2}{2l}\right) + C_4, \quad \text{za} \quad 0 \leq x < a. \end{aligned} \tag{15}$$

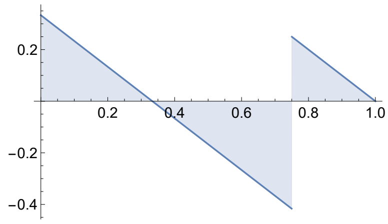
Pri izračunu smo upoštevali že zapisano formulo, da je $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{1}{2} x^2 = x$ in $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = 1$. Konstanti C_3 in C_4 določimo iz robnih pogojev. Leva podpora je členkasta, zato $M(x = 0) = 0$, desno krajišče je prosto, $M(x = l) = 0$. Potem $C_3 = 0$ in $C_4 = -\frac{1}{2} q_0 l^2$. Upogibni moment je pri točkasti obremenitvi zvezen. Preverimo enakost $M(a-) = M(a+)$. Res, če vstavimo $x = a$ v (15), obakrat dobimo

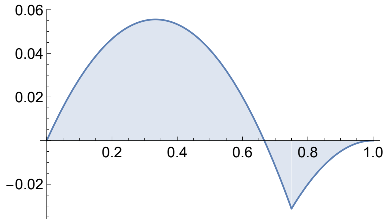
$$M(a-) = M(a+) = -\frac{1}{2} q_0 (l - a)^2.$$

Grafa prečne sile in upogibnega momenta sta prikazanana sliki 13.

Vprašanja in naloge

1. Izračunaj rezultanti konstantne in linearne obremenitve z integralom (1).
2. Za konstantno in linearno obremenitev preveri, da se izračunane vrednosti ujemajo z integralom (3).





Slika 14: Prečna sila in upogibni moment za prevesni nosilec s konstantno linijsko obremenitvijo. Slika je brezdimenzijska, $a/l = 3/4$, abcisa je x/l, ordinata pa $1/q_0 l$ oziroma $1/q_0 l^2$.

3. Določi potek osne sile za točkovno obremenjen nosilec z obremenitvijo, ki ima neničelno komponento smeri nosilca.
4. Izračunaj maksimalno vredost upogibnega momenta za konstantno linijsko obremenitvijo in jo primerjaj z maksimalno vrednostjo upogibnega momenta ekvipolentne točkovne obremenitve.
5. Zapiši notranje količine enostavno podprtega nosilca, ki je obremenjen točkovno in z konstantno linijsko obremenitvijo.
6. Določi potek notranjih količin enakomerno obremenjenega konzolnega nosilca s prerezno metodo.