

Ravnovesna enačba

Ravnovesno enačbo za enososno napetostno stanje že poznamo. Sedaj nas zanima ravnovesna enačba za poljubno napetostno stanje. Naj bo \underline{t} napetostno stanje, ki ga v telesu \mathcal{B} povzroči volumenska sila \vec{G} . Njeno gostoto označimo z \vec{g} . Volumenska sila deluje na prostorskem, torej deformiranem položaju b . Če vzamemo majhen volumen ΔV v okolici poljubne točke $p \in b$, potem deluje volumenska sila na ta volumen s silo $\vec{g}\Delta V$.

Za majhen volumen izberimo kocko z volumnom Δx s središčem v poljubno izbrani točki $p \in b$. V točko p postavimo izhodišče koordinatnega sistema. Osi koordinatnega sistema usmerimo v smeri kocke. Kocka je v ravnovesju. Videli smo že, da simetričnost napetostnega tenzorja sledi iz momentne ravnovesne enačbe. Poglejmo sedaj, kaj sledi iz ravnovesja sil.

Na kocko deluje volumenska sila $\vec{g}(\Delta x)^3$ in površinske sile na mejnih ploskvah kocke. Gostota površinske sile na ploskev $x = \frac{1}{2}\Delta x$ je $\vec{t}_1 = \underline{t}(\frac{1}{2}\Delta x, y_x, z_x)\vec{i}$. Na nasprotni ploskvi $x = -\frac{1}{2}\Delta x$ pa je gostota $\vec{t}_3 = \underline{t}(-\frac{1}{2}\Delta x, y_x, z_x)(-\vec{i})$. Tu smo z y_x, z_x zapisali y in z koordinati točk na ploskvah $x = \pm\frac{1}{2}\Delta x$. Na obeh presekih $x = \pm\frac{1}{2}\Delta x$ imata gostoti enaki y in z koordinati. Skupni prispevek ploskev $x = \pm\frac{1}{2}\Delta x$ je potem

$$\underline{t}(\frac{1}{2}\Delta x, y_x, z_x)\vec{i} + \underline{t}(-\frac{1}{2}\Delta x, y_x, z_x)(-\vec{i}) = \begin{bmatrix} t_{11}(\Delta x/2, y_x, z_x) - t_{11}(-\Delta x/2, y_x, z_x) \\ t_{21}(\Delta x/2, y_x, z_x) - t_{21}(-\Delta x/2, y_x, z_x) \\ t_{31}(\Delta x/2, y_x, z_x) - t_{31}(-\Delta x/2, y_x, z_x) \end{bmatrix}. \quad (1)$$

V zapisu (1) nismo upoštevali simetrije napetostnega tenzorja. Razliko $t_{k1}(\Delta x/2, y_x, z_x) - t_{k1}(-\Delta x/2, y_x, z_x)$, $k = 1, 2, 3$ v (1) lahko zapišemo v obliki

$$t_{k1}(\Delta x/2, y_x, z_x) - t_{k1}(-\Delta x/2, y_x, z_x) = \frac{\partial t_{k1}}{\partial x}(x_k, y_x, z_x)\Delta x, \quad x \in (-\frac{1}{2}\Delta x, \frac{1}{2}\Delta x). \quad (2)$$

Tu smo na znanje vzeli dobro znano enakost iz diferencialnega računa

$$f(b) - f(a) = (b - a)\frac{df}{dx}(x), \quad a < x < b, \quad (3)$$

ki velja za zvezno odvedljivo funkcijo $f(x)$. V (2) smo uporabili (3) za funkcije t_{k1} , ki so funkcije spremenljivk x, y in z . Odvod funkcije več spremenljivk označujemo s simbolom $\frac{\partial}{\partial x}$ namesto z $\frac{d}{dx}$. Odvodu $\frac{\partial}{\partial x}$ pravimo parcialni odvod po x . Za parcialni odvod veljajo enake lastnosti kot za navadni odvod. Za dovolj majhno kocko je

$$t_{k1}(\Delta x/2, y_x, z_x) - t_{k1}(-\Delta x/2, y_x, z_x) = \frac{\partial t_{k1}}{\partial x}(p)\Delta x + O((\Delta x)^2), \quad (4)$$

kjer je p središče kocke, $O((\Delta x)^2)$ pa je simbol, ki pove, da je napaka aproksimacije velikostnega reda $(\Delta x)^2$. Vsota površinske sile na mejnih ploskvah kocke $x = \pm\Delta x/2$ je integral njene gostote. Iz (1) in (4) sledi, da je k -ta komponenta te vsote enaka

$$\int_A (t_{k1}(\Delta x/2, y, z) - t_{k1}(-\Delta x/2, y, z)) dA = \frac{\partial t_{k1}}{\partial x}(p)(\Delta x)^3 + O((\Delta x)^4). \quad (5)$$

Tu smo z A zapisali integracijsko območje $A = [-\frac{1}{2}\Delta x, \frac{1}{2}\Delta x] \times [-\frac{1}{2}\Delta x, \frac{1}{2}\Delta x]$ po katerem integriramo spremenljivki y in z . Integral smo izračunali s pomočjo (5), kjer smo upoštevali, da je površinski integral konstante enak konstanti pomnoženi s ploščino integracijskega območja. V našem primeru $|A_1| = (\Delta x)^2$.

Upoštevatni moramo še prispevek napetosti na ploskvah $y = \pm\Delta x/2$ in $z = \pm\Delta x/2$. Na povsem enak način dobimo

$$\int_A (t_{k2}(x, \Delta x/2, z) - t_{k2}(x, -\Delta x/2, z)) \, dA = \frac{\partial t_{k2}}{\partial y}(p)(\Delta x)^3 + O((\Delta x)^4). \quad (6)$$

in

$$\int_A (t_{k3}(x, y, \Delta x/2) - t_{k3}(x, y, -\Delta x/2)) \, dA = \frac{\partial t_{k3}}{\partial z}(p)(\Delta x)^3 + O((\Delta x)^4). \quad (7)$$

K-ta komponenta ravnovesja sil na kocko se tako glasi

$$g_k(\Delta x)^3 + \frac{\partial t_{k1}}{\partial x}(\Delta x)^3 + \frac{\partial t_{k2}}{\partial y}(\Delta x)^3 + \frac{\partial t_{k3}}{\partial z}(\Delta x)^3 + O((\Delta x)^4) = 0. \quad (8)$$

Enačbo delimo z $(\Delta x)^3$ in nato poženemo Δx proti nič. Potem je

$$g_k + \frac{\partial t_{k1}}{\partial x} + \frac{\partial t_{k2}}{\partial y} + \frac{\partial t_{k3}}{\partial z} = 0 \quad (9)$$

oziroma v vektorskem zapisu

$$\vec{g} + \operatorname{div} \underline{t} = \vec{0}. \quad (10)$$

Enakost velja za poljubno točko telesa. Tu smo z $\operatorname{div} \underline{t}$ zapisali *divergenco tenzorja*

$$\operatorname{div} \underline{t} = \begin{bmatrix} \frac{\partial t_{11}}{\partial x} + \frac{\partial t_{12}}{\partial y} + \frac{\partial t_{13}}{\partial z} \\ \frac{\partial t_{12}}{\partial x} + \frac{\partial t_{22}}{\partial y} + \frac{\partial t_{23}}{\partial z} \\ \frac{\partial t_{13}}{\partial x} + \frac{\partial t_{23}}{\partial y} + \frac{\partial t_{33}}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Pri prepisu (10) v (11) smo upoštevali simetrijo napetostnega tenzorja, $t_{ij} = t_{ji}$.

Enačba (10) oziroma njen komponentni zapis (9) je ravnovesna enačba. Pravimo ji *Cauchyjeva momentna enačba* ali na kratko kar *momentna enačba*. Telo pod vplivom volumenske sile je v ravnovesju natanko tedaj, ko je tenzor napetosti simetričen in velja momentna enačba v vsaki točki telesa. Iz momentne enačbe vidimo, da je homogeno ravnovesno napetostno stanje možno samo brez prisotnosti volumenskih sil. Netrivialna volumenska sila ne dopušča homogenega ravnovesnega stanja. Primer netrivialne volumenske sile smo videli pri deformaciji palice zaradi lastne teže. V tem primeru je bila volumenska sila konstantna, napetost pa je bila v primeru palice s konstantnim presekom linearna funkcija osne koordinate. Za enoosno napetostno stanje, kjer je $t_{11} = \sigma(x)$, vse ostale komponente napetostnega tenzorja pa so enake nič, se momentna enačba poenostavi v

$$\vec{g} + \frac{d\sigma}{dx}\vec{v} = 0. \quad (12)$$

Potem je $\vec{g} = g_1\vec{v}$ in (12) se poenostavi v ravnovesno enačbo za enoosno napetost

$$\frac{d}{dx}A\sigma + p = 0,$$

kjer je A konstantni presek in $p = g_1A$ dolžinska gostota osne sile. Vidimo torej, da je enoosno napetostno stanje možno samo pri palici s konstantnim presekom. Če se presek palice spreminja, je enoosno napetostno stanje aproksimacija, ki je lahko dobra za počasno spreminjanje preseka.

Komponentni zapis

Matrični zapis tenzorja napetosti je odvisen od koordinatnega sistema. Naj v danem koordinatnem sistemu z baznimi vektorji \vec{e}_i , $i = 1, 2, 3$ pripada tenzorju \underline{t} matrika

$$\underline{t} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{21} & t_{33} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Tu v zapisu namenoma nismo upoštevali simetrije tenzorja. Potem je

$$\underline{t}\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{21} & t_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ t_{31} \end{bmatrix} = t_{11}\vec{e}_1 + t_{21}\vec{e}_2 + t_{31}\vec{e}_3$$

in

$$\vec{e}_i \cdot \underline{t}\vec{e}_1 = t_{i1}. \quad (14)$$

V zadnji enakosti smo upoštevali, da so vektorji \vec{e}_i med seboj paroma ortonormirani. Podobno lahko pokažemo, da je

$$\vec{e}_i \cdot \underline{t}\vec{e}_2 = t_{i2} \quad \text{in} \quad \vec{e}_i \cdot \underline{t}\vec{e}_3 = t_{i3}. \quad (15)$$

Če združimo (14) in (15) sledi

$$\vec{e}_i \cdot \underline{t}\vec{e}_j = t_{ij}. \quad (16)$$

Izpeljali smo formulo, ki tenzorju \underline{t} priredi komponente v bazi \vec{e}_i , $i = 1, 2, 3$.

Poglejmo primer. V dani kartezični bazi \vec{e}_i , $i = 1, 2, 3$ naj ima tenzor napetosti \underline{t} matrični zapis

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Zanima nas matrični zapis tega tenzorja napetosti v novi bazi z baznimi vektorji

$$\vec{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_2, \quad \vec{e}'_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_2, \quad \vec{e}'_3 = \vec{e}_3.$$

Vektor \vec{e}'_1 oklepa z \vec{e}_1 kot $\pi/4$ in prav tako tudi vektor \vec{e}'_2 z vektorjem \vec{e}_2 . Koordinatni sistem z bazo \vec{e}'_i , $i = 1, 2, 3$ je tako glede na koordinatni sistem \vec{e}_i zavrten okrog osi \vec{e}_3 za kot $\pi/4$. Priredimo sedaj tenzorju \underline{t} matrični zapis v novi bazi. Označimo to matriko s \mathbf{t}' . Po formuli (16) je

$$t'_{ij} = \vec{e}'_i \cdot \underline{t}\vec{e}'_j.$$

Potem je

$$t'_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ -\sigma_1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Nadalje je

$$t'_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sigma_1 \\ -\sigma_1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

in

$$t'_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sigma_1 \\ -\sigma_1 \\ 0 \end{bmatrix} = -\sigma_1.$$

Hitro lahko tudi izračunamo, da je

$$t'_{13} = t'_{23} = 0 \quad \text{in} \quad t'_{33} = \sigma_2.$$

V novi bazi tako napetostemu tenzorju pripada matrika

$$\mathbf{t}' = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_1 & 0 \\ -\sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Istemu napetostnemu tenzorju pripadata v dveh različnih bazah dve različni matriki. Elementi matrike \mathbf{t} in \mathbf{t}' so med seboj različni. Matriki pa imata nekaj skupnega, obe matriki imata enako sled, torej vsoto diagonalnih elementov, in determinanto. Sled je σ_2 , determinanta pa $-\sigma_1^2 \sigma_2$. To ni naključje, je pravilo. Vsi matrični zapisi tenzorja imajo enako sled in determinanto. Sled in determinanta sta tako lastnost tenzorja. Pravimo, da sta *tenzorski invarianti*.

Ravninski primer

Poglejmo si podrobneje odvisnost matričnega zapisa od izbire baze za ravninski primer. V tem primeru lahko vse izbire koordinatnih sistemov izrazimo z enim parametrom, ki je enak kotu zavrtitve.

Naj bo torej \underline{t} ravninski tenzor napetosti. To pomeni, da obstaja tak koordinatni sistem z bazo \vec{i}, \vec{j} in \vec{k} , da je pripadajoča matrika oblike

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & 0 \\ t_{12} & t_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{12} & t_{22} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Kot vidimo, se lahko pri matričnem zapisu ravninskega napetostnega stanja omejimo na matrike velikosti 2×2 . Izberimo sedaj novo bazo

$$\vec{i}' = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j} \quad \text{in} \quad \vec{j}' = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}.$$

Novo bazo smo dobili iz prvotne baze tako, da smo bazna vektorja \vec{i} in \vec{j} zasukali za kot φ okrog osi \vec{k} . V novi bazi pripada tenzorju \underline{t} matrika z elementi t'_{ij} . Po formuli (16) je v novi bazi

$$\begin{aligned} t'_{11} &= \vec{i}' \cdot \underline{t} \vec{i}' = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{12} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_{11} \cos \varphi + t_{12} \sin \varphi \\ t_{12} \cos \varphi + t_{22} \sin \varphi \end{bmatrix} \\ &= t_{11} \cos^2 \varphi + 2t_{12} \cos \varphi \sin \varphi + t_{22} \sin^2 \varphi. \end{aligned}$$

Upoštevajmo, da je $\cos^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi)$ in $\sin^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi)$ v zgornjem izračunu. Potem je

$$t'_{11} = \frac{1}{2}(t_{11} + t_{22}) + \frac{1}{2}(t_{11} - t_{22}) \cos 2\varphi + t_{12} \sin 2\varphi. \quad (20)$$

Podobno izračunamo

$$\begin{aligned} t'_{22} &= \vec{j}' \cdot \underline{t} \vec{j}' = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{12} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -t_{11} \sin \varphi + t_{12} \cos \varphi \\ -t_{12} \sin \varphi + t_{22} \cos \varphi \end{bmatrix} \\ &= t_{11} \sin^2 \varphi - 2t_{12} \cos \varphi \sin \varphi + t_{22} \cos^2 \varphi \\ &= \frac{1}{2}(t_{11} + t_{22}) - \frac{1}{2}(t_{11} - t_{22}) \cos 2\varphi - t_{12} \sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (21)$$

Izvediagonalni element pa je

$$\begin{aligned}
t'_{12} &= \vec{i}' \cdot \underline{t} \vec{j}' = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{12} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -t_{11} \sin \varphi + t_{12} \cos \varphi \\ -t_{12} \sin \varphi + t_{22} \cos \varphi \end{bmatrix} \\
&= -t_{11} \cos \varphi \sin \varphi + t_{12} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + t_{22} \cos \varphi \sin \varphi \\
&= -\frac{1}{2} (t_{11} - t_{22}) \sin 2\varphi + t_{12} \cos 2\varphi.
\end{aligned} \tag{22}$$

Pripadajoči matrični zapis v bazi \vec{i}', \vec{j}' je tako

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}' &= \begin{bmatrix} t'_{11} & t'_{12} \\ t'_{12} & t'_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(t_{11} + t_{22}) + \frac{1}{2}(t_{11} - t_{22}) \cos 2\varphi + t_{12} \sin 2\varphi & -\frac{1}{2}(t_{11} - t_{22}) \sin 2\varphi + t_{12} \cos 2\varphi \\ -\frac{1}{2}(t_{11} - t_{22}) \sin 2\varphi + t_{12} \cos 2\varphi & \frac{1}{2}(t_{11} + t_{22}) - \frac{1}{2}(t_{11} - t_{22}) \cos 2\varphi - t_{12} \sin 2\varphi \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{23}$$

Hitro vidimo, da je

$$\text{sl } \mathbf{t}' = t'_{11} + t'_{22} = t_{11} + t_{22} = \text{sl } \mathbf{t}.$$

Po nekoliko daljšem računu pa

$$\begin{aligned}
\det \mathbf{t}' &= t'_{11} t'_{22} - t_{12}^2 \\
&= \frac{1}{4} (t_{11} + t_{22})^2 - \frac{1}{4} (t_{11} - t_{22})^2 \cos^2 2\varphi - \frac{1}{4} (t_{11} - t_{22})^2 \sin^2 2\varphi - t_{12}^2 \\
&= t_{11} t_{22} - t_{12}^2 = \det \mathbf{t}.
\end{aligned}$$

Ekstremalne lastnosti

Za dano napetostno stanje, je napetost na preseku odvisna od normale preseka. Zanima nas, za kateri presek je normalna napetost ekstremalna in za kateri presek je ekstremalna strižna napetost. Pri odgovoru na te vprašanji se bomo zaradi enostavnosti omejili na ravninsko napetostno stanje. Prostorski primer zahteva nekoliko več matematičnega predznanja. Omenimo, da ekstremalni normalni napetosti pravimo tudi *glavna napetost*, njuni smeri pa *glavna smer*. Na enak način kot za napetostni tenzor lahko obravnavamo ekstremalne lastnosti poljubnega simetričnega tenzorja. Kasneje bomo spoznali deformacijski tenzor \underline{e} . Definirali bomo normalno deformacijo $\vec{n} \cdot \underline{e} \vec{n}$ in tudi strižno deformacijo. Vse kaj velja normalno in strižno napetost bo potem veljalo tudi za normalno in strižno deformacijo.

Za odgovor za ravninski primer imamo že vse pripravljeno. Spomnimo se, da je t_{11} normalna napetost na ravnino z normalo \vec{i} . Potem je t'_{11} normalna napetost na ravnino z normalo $\vec{i}' = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}$. Označimo $t_n = t'_{11}$ in $\vec{n} = \vec{i}'$. Po formuli (20) je potem

$$t_n = \frac{1}{2} (t_{11} + t_{22}) + \frac{1}{2} (t_{11} - t_{22}) \cos 2\varphi + t_{12} \sin 2\varphi. \tag{24}$$

Normalna napetost t_n je odvisna od kota φ . Očitno je normalna napetost v smeri φ enaka kot normalna napetost v smeri $\varphi + \pi$. To sledi neposredno iz (24) in periodičnosti funkcije $\cos 2\varphi$ in $\sin 2\varphi$ ali pa kar direktno iz definicije normalne napetosti, saj je $t_n = \vec{n} \cdot \underline{t} \vec{n} = -\vec{n} \cdot \underline{t} (-\vec{n}) = t_{-n}$.

Določiti moramo pri katerem kotu je normalna napetost ekstremalna in kakšna je ta vrednost. V ta namen prepisimo (24) v

$$t_n = \frac{1}{2} (t_{11} + t_{22}) + A \cos 2\varphi + B \sin 2\varphi,$$

kjer je

$$A = \frac{1}{2} (t_{11} - t_{22}) \quad \text{in} \quad B = t_{12}.$$

Očitno o ekstremu odloča izraz $A \cos 2\varphi + B \sin 2\varphi$. Zapišimo ga v obliki

$$A \cos 2\varphi + B \sin 2\varphi = C \cos(2\varphi - \delta) = C \cos 2\varphi \cos \delta + C \sin 2\varphi \sin \delta.$$

Ta enakost velja za vsak φ natanko takrat, ko je

$$A = C \cos \delta \quad \text{in} \quad B = C \sin \delta. \quad (25)$$

Konstanti A in B sta dani. Določiti moramo C in δ . Konstanti C pravimo amplituda, δ pa je fazni zamik. Hitro vidimo, da je

$$A^2 + B^2 = C^2 \quad \text{in} \quad \frac{B}{A} = \tan \delta.$$

Potem je

$$C = \pm \sqrt{A^2 + B^2} \quad \text{in} \quad \delta = \arctan \frac{B}{A} \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Iz (25) vidimo, da lahko vzamemo pri korenu pozitivni predznak, saj lahko negativni predznak pri C -ju v (25) dobimo, če faznemu zamiku prištejemo π , saj to ne spremeni δ , spremeni pa predznaka v (25). Naj bo torej $C > 0$. Potem po krajšem premisleku ugotovimo, da je

$$\delta = \arctan \frac{B}{A} + \begin{cases} 0 & A \geq 0 \\ \pi & A < 0 \end{cases} = \arctan \frac{2t_{12}}{t_{11} - t_{22}} + \begin{cases} 0 & t_{11} \geq t_{22} \\ \pi & t_{11} < t_{22} \end{cases} \quad (26)$$

Vstavimo ugotovljeno v (24). Tako je

$$t_n = \frac{1}{2}(t_{11} + t_{22}) + \sqrt{\frac{1}{4}(t_{11} - t_{22})^2 + t_{12}^2} \cos(2\varphi - \delta), \quad (27)$$

kjer je δ dan z (26). Ekstremna vrednost normalne napetosti nastopi, ko je kosinus enak ± 1 . Označimo s σ_{\max} maksimalno normalno napetost in s σ_{\min} minimalno normalno napetost. Potem po krajšem računu sledi

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{1}{2} \left(t_{11} + t_{22} + \sqrt{(t_{11} - t_{22})^2 + 4t_{12}^2} \right), \\ \sigma_{\min} &= \frac{1}{2} \left(t_{11} + t_{22} - \sqrt{(t_{11} - t_{22})^2 + 4t_{12}^2} \right). \end{aligned} \quad (28)$$

Dobljeno formulo lahko zapišemo v invariantni obliki. Izračunajmo

$$(t_{11} - t_{22})^2 + 4t_{12}^2 = t_{11}^2 - 2t_{11}t_{22} + t_{22}^2 + 4t_{12}^2 = t_{11}^2 + 2t_{11}t_{22} + t_{22}^2 - 4(t_{11}t_{22} - t_{12}^2) = (\text{sl } \underline{t})^2 - 4 \det \underline{t}.$$

Potem je

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{1}{2} \left(\text{sl } \underline{t} + \sqrt{(\text{sl } \underline{t})^2 - 4 \det \underline{t}} \right), \\ \sigma_{\min} &= \frac{1}{2} \left(\text{sl } \underline{t} - \sqrt{(\text{sl } \underline{t})^2 - 4 \det \underline{t}} \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Ker sta sled in determinanta neodvisni od koordinatnega sistema, vidimo iz (29), da so ekstremalne vrednosti normalne napetosti oziroma glavne vrednosti neodvisne od koordinatnega sistema v katerem smo tenzorju napetosti priredili matrični zapis.

Določiti moramo še smeri normale oziroma kot φ v katerih nastopi ekstremalna normalna napetost. Z razliko od glavnih vrednosti so te smeri odvisne od koordinatnega sistema. Iz (27) sledi, da nastopi ekstrem, ko je $2\varphi - \delta = 0$ ali $2\varphi - \delta = \pi$. Ekstremalni oziroma glavni smeri sta tako

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \arctan \frac{2t_{12}}{t_{11} - t_{22}} \quad \text{in} \quad \varphi_2 = \frac{1}{2} \arctan \frac{2t_{12}}{t_{11} - t_{22}} + \frac{\pi}{2}. \quad (30)$$

Tu smo upoštevali, da je smer $\varphi + \pi$ enakovredna smeri φ . Vidimo, da glavni smeri oklepata pravi kot. Določiti moramo še katera smer je maksimalna in katera minimalna. Smer $\varphi = \frac{1}{2}\delta$ je smer maksimuma, smer $\varphi = \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\pi$ pa minimalna smer. Potem iz (26) sledi, da je maksimalna smer

$$\varphi_{\max} = \frac{1}{2} \arctan \frac{2t_{12}}{t_{11} - t_{22}} + \begin{cases} 0 & t_{11} \geq t_{22} \\ \pi/2 & t_{11} < t_{22} \end{cases}, \quad (31)$$

minimalna pa je

$$\varphi_{\min} = \varphi_{\max} + \frac{\pi}{2}. \quad (32)$$

Strižna napetost na ravnino z normalo $\vec{n} = \vec{v}'$ je $t_s = t'_{12}$. Po formuli (22) je

$$t_s = -\frac{1}{2}(t_{11} - t_{22}) \sin 2\varphi + t_{12} \cos 2\varphi. \quad (33)$$

Pokažimo sedaj, da je strižna napetost enaka nič v koordinatnem sistemu z osmi v smeri glavnih osi. Prepišimo (33) v

$$t_s = \cos 2\varphi \left(-\frac{1}{2}(t_{11} - t_{22}) \tan 2\varphi + t_{12} \tan \right).$$

Potem z upoštevanjem (30) sledi, da je $t_s = 0$ za $\varphi \in \{\varphi_{\min}, \varphi_{\max}\}$.

Poiščimo sedaj maksimalno strižno napetost. Iz (33) očitno sledi, da je ekstremalna vrednost strižne napetosti τ_{\max} enaka

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{(t_{11} - t_{22})^2 + 4t_{12}^2}.$$

Upoštevajmo (28). Potem je

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}). \quad (34)$$

To je pomembna formula. Maksimalna strižna napetost je večja, če je $\sigma_{\min} < 0$. Ta primer ustreza strižni deformaciji. Lom pri strižni deformaciji je tako bolj verjeten kot pri enoosni deformaciji.

Določiti moramo še smer. V ta namen zapišimo $\varphi = \theta - \pi/4$. Potem je

$$\cos 2\varphi = \cos(2\theta - \frac{1}{2}\pi) = \sin 2\theta$$

in

$$\sin 2\varphi = \sin(2\theta - \frac{1}{2}\pi) = -\cos 2\theta.$$

Če izrazimo strižno napetost kot funkcijo θ , potem iz (33) sledi

$$t_s = \frac{1}{2}(t_{11} - t_{22}) \cos 2\theta + t_{12} \sin 2\theta.$$

Vidimo, da ima t_s kot funkcija θ do konstantnega člena enako obliko kot t_n kot funkcija φ . Potemtakem, sta ekstremalni smeri strižne napetosti

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \arctan \frac{2t_{12}}{t_{11} - t_{22}} \quad \text{in} \quad \theta_2 = \frac{1}{2} \arctan \frac{2t_{12}}{t_{11} - t_{22}} + \frac{\pi}{2}$$

in ker je $\varphi = \theta - \pi/4$, smer ekstremalne strižne napetosti oklepa kot $\pi/4$ s smerema ekstremalne normalne napetosti. Pri enoosni deformaciji je tako strižna deformacija maksimalna na ravninah, ki so pod kotom $\pi/4$ glede na os obremenitve. To pojasni, zakaj je lom pogostokrat žagast.

Za boljši pregled zapišimo po točkah, kaj smo ugotovili

- Maksimalna normalna napetost je

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{2} \left(t_{11} + t_{22} + \sqrt{(t_{11} - t_{22})^2 + 4t_{12}^2} \right)$$

in nastopi v smeri $\vec{n} = \cos \varphi_{\max} \vec{i} + \sin \varphi_{\max} \vec{j}$, kjer je

$$\varphi_{\max} = \frac{1}{2} \arctan \frac{2t_{12}}{t_{11} - t_{22}} + \begin{cases} 0 & t_{11} \geq t_{22} \\ \pi/2 & t_{11} < t_{22}. \end{cases}$$

Tu so t_{ij} komponente napetostnega tenzorja \underline{t} v bazi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

- Minimalna normalna napetost je

$$\sigma_{\min} = \frac{1}{2} \left(t_{11} + t_{22} - \sqrt{(t_{11} - t_{22})^2 + 4t_{12}^2} \right).$$

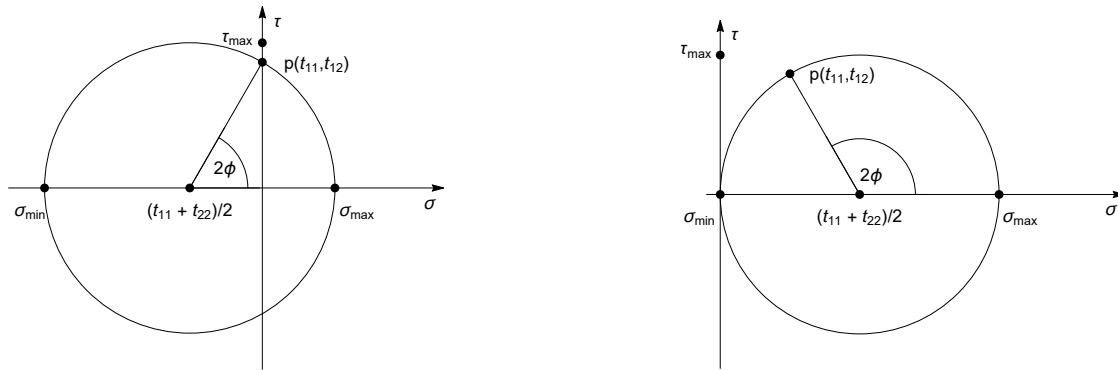
Minimalna normalna napetost nastopi v smeri $\varphi_{\min} = \varphi_{\max} + \frac{1}{2}\pi$.

- Maksimalna strižna napetost je

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}).$$

Smer maksimalne strižne napetosti oklepa kot $\pi/4$ s smerema ekstremalnih normalnih napetosti.

Morhova krožnica



Slika 1: Mohrova krožnica. Levo $t_{11} > t_{22}$, desno $t_{11} < t_{22}$.

Problem ekstremalnih lastnosti simetričnega tenzorja ima naslednjo geometrijsko ponazoritev. Z upoštevanjem (24) in (33) po krajšem računu sledi

$$\left(t_n - \frac{1}{2}(t_{11} + t_{22}) \right)^2 + t_s^2 = \frac{1}{4}(t_{11} - t_{22})^2 + t_{12}^2 = \rho^2, \quad (35)$$

kjer smo z ρ označili

$$\rho = \sqrt{\frac{1}{4}(t_{11} - t_{22})^2 + t_{12}^2}. \quad (36)$$

Enačba (35) je enačba krožnice v ravnini $t_n t_s$ s središčem v $\frac{1}{2}(t_{11} + t_{22})$ in polmerom ρ , glej sliki 1. Krožnica seka os t_n pri $\frac{1}{2}(t_{11} + t_{22}) \pm \rho$. Po definiciji polmera ρ sledi iz (28), da sta presečišči natanko σ_{\min} in σ_{\max} .

Za dani napetostni tenzor \underline{t} so vse možne vrednosti normalne $\sigma = t_n$ in strižne napetosti $\tau = t_s$ na Mohrovi krožnici. Na slikah 1 je označena točka $\mathbf{t} = (t_{11}, t_{12})$. To je par normalna in strižna napetost v smeri normale \vec{i} . Tej smeri ustreza kot $\varphi = 0$. Potem je kot med absciso osjo σ in smerjo iz središča krožnice do točke \mathbf{t} enak kotu 2φ . Iz slike 1, primer $t_{11} > t_{22}$ potem sledi

$$\tan 2\varphi = \frac{t_{12}}{t_{11} - \frac{1}{2}(t_{11} + t_{22})} = \frac{2t_{12}}{t_{11} - t_{22}},$$

kar se ujema (31). Prav tako se ujema desna slika za primer $t_{11} < t_{22}$. S slike tudi vidimo, da je maksimalna strižna napetost enaka polmeru krožnice. To se ujema z enakostjo $\rho = \tau_{\max}$.

S pomočjo Mohrove krožnice lahko torej v celoti okarakteriziramo ekstremalne lastnosti ravninskega napetostnega tenzorja. Poglejmo kako najhitreje narišemo Mohrovo krožnico.

- Prvo narišemo koordinatni osi σ in τ in nato središče krožnice na osi σ s koordinato $\sigma = \frac{1}{2}(t_{11} + t_{22})$.
- Nato izračunamo polmer po formuli (36) in narišemo krožnico. Presečišči določata σ_{\max} in σ_{\min} .
- Na krožnici označimo še točko $\mathbf{t} = (t_{11}, t_{12})$. Kot med osjo σ in smerjo iz središča krožnice do točke \mathbf{t} je enak kotu 2φ . Ploovica tega kota določa smer maksimalne normalne napetosti.

Mohrove krožnice osnovnih napetostnih stanj

Določili bomo Mohrove krožnice za enosno, hidrostatično in strižno napetostno stanje. Za enosno napetostno stanje obstaja tak koordinatni sistem, da je pripadajoča matrika napetostnega tenzorja enaka

$$\begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Središče krožnice na osi σ je v $\frac{1}{2}\sigma_0$, polmer pa je $\rho = \frac{1}{2}|\sigma_0|$. Če je $\sigma_0 > 0$, je $\sigma_{\max} = \sigma_0$, $\sigma_{\min} = 0$ in $\tau_{\max} = \frac{1}{2}\sigma_0$. Maksimalna smer normalne napetosti je kar smer enosne napetosti \vec{i} . Za $\sigma_0 < 0$ je $\sigma_{\max} = 0$, $\sigma_{\min} = \sigma_0$ in $\tau_{\max} = -\frac{1}{2}\sigma_0$. Maksimalna smer normalne napetosti je sedaj smer \vec{j} .

Za hidrostatično napetostno stanje je $\underline{t} = -p\vec{i}$ je središče krožnice na osi σ v $-p$. Polmer krožnice je enak nič. Krožnica je degenerirana krožnica in je enaka točki $(-p, 0)$. Velja $\sigma_{\min} = \sigma_{\max} = -p$ in $\tau_{\max} = 0$.

Strižno napetostno stanje je podano z matriko

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{bmatrix}.$$

Središče Mohrove krožnice je v izhodišču koordinatnega sistema $\sigma\tau$. Polmer krožnice je $|\sigma_0|$. Potem je $\sigma_{\max} = |\sigma_0|$, $\sigma_{\min} = -|\sigma_0|$ in $\tau_{\max} = |\sigma_0|$. Za $\sigma_0 > 0$ je $\varphi_{\max} = 0$, za $\sigma_0 < 0$ je $\varphi_{\max} = \frac{1}{2}\pi$. Smer maksimalne strižne napetosti oklepa kot $\pi/4$ s smerjo \vec{i} .

Vprašanja in naloge

1. Naj bodo komponente tenzorja napetosti t_{ij} linearne funkcije koordinate x . Določi volumensko silo, da bo telo s tem napetostnim tenzorjem v ravnovesju.

2. Izračunaj komponente napetostnega tenzorja v novi bazi $\vec{i}' = \vec{j}$, $\vec{j}' = -\vec{i}$, $\vec{k}' = \vec{k}$.
3. Določi ekstremalne smeri normalne napetosti v primeru $t_{11} = t_{22}$ in $t_{12} = 0$.
4. Nariši Mohrove krožnice za enoosno, hidrostatično in strižno napetostno stanje.