Predavanje 20. maj 2021

Termalni upogib nosilca

V prostoru je temperaturna deformacija enaka $\underline{\underline{e}}_T = \alpha\underline{\underline{i}}\,\Delta T$. Ker v inženirski teoriji nosilcev dovolimo samo osno deformacijo, se bomo omejili na temperaturno deformacijo v smeri osi x, kjer je ΔT funkcija koordinate z. Celotna deformacija je enaka elastični ϵ_E in temperaturni ϵ_T deformaciji. Velja torej

$$\epsilon = \frac{z}{R} = \epsilon_E + \epsilon_T = \epsilon_E + \alpha\Delta T.$$

Potem je osna napetost

$$\sigma = E\epsilon_E = \frac{E}{R}z - \alpha E\Delta T.$$

Upogibni moment dobimo z integracijo $\vec{r}\times\sigma\vec{\imath}$ po preseku A. Če se omejimo na linearno spremembo temperature

$$\Delta T = T_0 + \beta(T_2 - T_1)z,$$

kjer je β sorazmernostni faktor z enoto [1/m], je

$$M = \frac{EI}{R} - \alpha\beta(T_2 - T_1)EI = -EIw'' - \alpha\beta(T_2 - T_1)EI.$$

Tako je

$$w'' = -\frac{M}{EI} - \alpha\beta(T_2 - T_1) = -\frac{M + M_T}{EI},$$

kjer je

$$M_T = \alpha\beta(T_2 - T_1)EI. \tag{1}$$

Če je $T_2 > T_1$ in $\beta > 0$, temperatura narašča z z. Spodnji del nosilca ima višjo temperaturo, zato se bolj raztegne in povzroči upogib nosilca. Zato izrazu M_T pravimo *temperaturni moment*.

Za primer si poglejmo temperaturni upogib konzolno vpetega nosilca brez obremenitve. Potem je $M = 0$ in tako

$$w'' = -\frac{M_T}{EI},$$

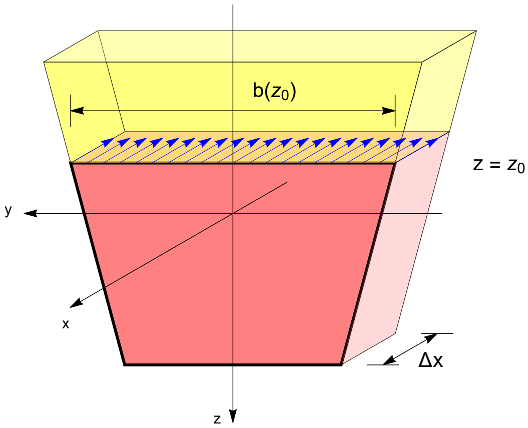
kjer je M_T dan z (1). Splošna rešitev je

$$w(x) = -\frac{M_T}{2EI}x^2 + C_1 x + C_2.$$

Robna pogoja za konzolno vpeti nosilec na krajišču $x = 0$ sta $w(0) = w'(0) = 0$. Potem je $C_1 = 0$ in $C_2 = 0$. Temperaturni upogib je

$$w(x) = -\frac{M_T}{2EI}x^2 = -\frac{1}{2}\alpha\beta(T_2 - T_1)x^2.$$

Pri $\beta > 0$ in $T_2 > T_1$ se nosilec upogne navzgor. Maksimalni upogib je pri $x = l$.



Slika 1: Presek nosilca med x in $x + \Delta x$.

Strižna napetost

Na preseku nosilca poleg normalne napetosti σ deluje tudi strižna napetost τ. Strižna napetost je gostota površinske sile v prečni smeri, torej sile, ki smo jo označili s Q. Strižno napetost bomo določili iz ravnovesja sil v smeri osi x za nosilec med odsekoma pri x in $x + \Delta x$, glej sliko 1, ki je dodatno odrezan pri $z = z_0$. Nosilec ni obremenjen na robu nosilca v smeri osi x, zato na odrezani del v smeri osi x deluje osna površinska sila na prerezih x in $x + \Delta$ in površinska sila na prerezu $z = z_0$. Gostota osne površinske sile na presekih x in $x + \Delta$ je $\sigma(x)$ oziroma $\sigma(x + \Delta x)$, na prerezu pa $\vec{\imath} \cdot \underline{\underline{t}}\,(-\vec{k})$, kjer je $\underline{\underline{t}}$ napetostni tenzor na prerezu $z = z_0$. Zaradi simetrije je $\underline{\underline{t}}$ odvisen samo od koordinate $z = z_0$ in nič od koordinate y. Ker je zaradi simetričnosti napetostnega tenzorja $\vec{\imath} \cdot \underline{\underline{t}}\,\vec{k} = \vec{k} \cdot \underline{\underline{t}}\,\vec{\imath}$, je to natanko iskana strižna napetost τ na osnem preseku. Površino nosilca od reza $z = z_0$ do njegovega spodnjega konca označimo z $A(z_0)$, širino nosilca pri $z = z_0$ pa z $b(z_0)$. Ravnovesna enačba na odrezan del nosilca v smeri osi x se potem glasi

$$\int_{A(z_0)} \sigma(x + \Delta x)\,\mathrm{d}A - \int_{A(z_0)} \sigma(x)\,\mathrm{d}A - \tau b(z_0)\Delta x = 0.$$

Enačbo delimo z Δx in poženemo Δx proti nič. Tako dobimo

$$\int_{A(z_0)} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}A = \tau b(z_0).$$

Iz enačbe $\sigma = \frac{M}{I} z$ potem sledi

$$\tau b(z_0) = \int_{A(z_0)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{M}{I} z\,\mathrm{d}A = \int_{A(z_0)} \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}\frac{z}{I}\,\mathrm{d}A = \frac{Q}{I}\int_{A(z_0)} z\,\mathrm{d}A. \tag{2}$$

Tu smo upoštevali, da sta prečna sila in ploskovni moment neodvisna od y in z. Označimo z

$$S(z_0) = \int_{A(z_0)} z\,\mathrm{d}A$$

linearni ploskovni moment dela preseka $A(z_0)$. Potem iz (2) sledi

$$\tau = \frac{QS(z_0)}{Ib(z_0)}. \tag{3}$$

Strižna napetost je odvisna od x in koordinate z na preseku. Povejmo brez dokaza, da je τ res gostota prečne sile Q, da velja

$$Q = \int_A \tau \, \mathrm{d}A,$$

kjer sedaj integriramo po celem preseku nosilca z ravnino pri konstantnem x. Iz definicije $S(z_0)$ vidimo, da je $S(z_0)$ enak produktu ploščine spodnjega preseka $A(z_0)$ z z koodinato njegovega središča.

Za primer izračunajmo linearni ploskovni moment za pravokotnik dimenzije $b \times h$. Koordinata z teče od $-\frac{1}{2}h$ do $\frac{1}{2}h$. Pri z_0 odrezan spodnji preseka je pravokotnik dimenzije $b \times (\frac{1}{2}h - z_0)$. Njegova ploščina je $b(\frac{1}{2}h - z_0)$, z koordinata masnega središča pa je $z_0 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}h - z_0) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}h + z_0)$. Potem je

$$S(z_0) = \frac{1}{2}b(\frac{1}{2}h - z_0)(\frac{1}{2}h + z_0) = \frac{b}{8}(h^2 - 4z_0^2).$$

Iz (3) potem sledi, da je strižna napetost enaka

$$\tau = \frac{Qb(h^2 - 4z_0^2)12}{8b^2h^3} = \frac{3Q}{2bh}(1 - 4(z_0/h)^2).$$

Stržna napetost na krajiščih $z_0 = \pm\frac{1}{2}h$ enaka nič. To že vemo. Novo pa je, da je za pravokotni presek potek strižne napetosti kvadratična funkcija z maksimumom pri z_0. Maksimalna vrednost je

$$\tau_{\mathrm{m}ax} = \frac{3Q}{2bh} = \frac{3Q}{2A}, \tag{4}$$

kjer je A površina preseka. Ta vrednost je za faktor $\frac{3}{2}$ večja od povprečne vrednosti Q/A.

Strižna napetost $\tau = t_{13}$ povzroči strižno deformacijo $\gamma = \tau/G$, kje je G strižni modul. Kot vemo, γ predstavlja spremembo kota med osjo x in z. V inženirski teoriji nosilcev preseki pravokotni na nevtralno os ostanejo po deformaciji pravokotni na deformirano nevtralno os. Po tej predpostavki bi moralo veljati $\gamma = 0$. Vendar je inženirska teorija aproksimativna teorija, zato preseki niso natančno pravokotni na deformirano nevtralno os. Strižna deormacija γ tako ni enaka nič, mora pa biti majhna za veljavnost inženirske aproksimacije. Preverimo, da je res majhna v že obravnavanem primeru enostavno podprtega nosilca z enakomerno linijsko obremenitvijo.

Prečna sila je enaka $Q = -EIw'''$. Iz (**??**) in (**??**) potem sledi

$$w''' = \frac{q_0}{EI}\left(x - \frac{1}{2}l\right).$$

Izraz je ekstremalen v podporah, $x = 0, l$. Potem je

$$Q_{\mathrm{m}ax} = \frac{q_0 l}{2},$$

kar je, kot vemo, enako sili leve podpore. Po (4) je potem

$$\tau_{\mathrm{m}ax} = \frac{3q_0 l}{4A}$$

in

$$\gamma_{\mathrm{m}ax} = \frac{\tau_{\mathrm{m}ax}}{G} = \frac{3q_0 l(1+\nu)}{2AE}.$$

Za aluminijasti nosilec z $E = 70\,\mathrm{GPa}$ in $\nu = 1/3$ dolžine $1\,\mathrm{m}$ s kvadratnim presekom $a = 3\,\mathrm{cm}$, ki je obremenjen z linijsko gostoto $q_0 = 10\,\mathrm{kN/m}$ je potem $\gamma_{max} = 3.2 \times 10^{-4}$. Izračunana vrednost je v tem primeru dovolj majhna za veljavnost inženirske teorije.

Vprašanja in naloge

1.