

Predavanje 5. maj 2021

## Ravninska deformacija

Omejili se bomo na infinitezimalno deformacijo. Deformacijski tenzor ravninske deformacije lahko zapišemo z matriko dimenzije  $2 \times 2$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{12} & e_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & \frac{1}{2}\gamma_{12} \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} & \epsilon_2 \end{bmatrix}.$$

Prednost prve pisave je, da matrika  $\mathbf{e}$  po strukturi zapisa splošna simetrična matrika dimenzije  $2 \times 2$ , prednost druge, inženirske pisave pa, da imajo elementi zapisa svoj neposredni deformacijski pomen.

## Ekstremalne lastnosti deformacijskega tenzorja

Pri obravnavi ekstremalnih lastnosti bomo raje uporabili splošni zapis. Zanima nas v kateri smeri  $\vec{e} = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}$  je relativna sprememba dolžin največja. S formulo, zanima nas v kateri smeri ima forma

$$\epsilon = \epsilon(\vec{e}) = \vec{e} \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \vec{e}$$

ekstremalne vrednosti.

Obliko te forme že poznamo, ko smo obravnavali ekstremalne lastnosti napetostnega tenzorja. Tam je vlogo vektorja smeri  $\vec{e}$  imela normala na ravnino preseka, namesto deformacijskega tenzorja je nastopal napetostni tenzor, zanimala pa nas je smer ekstremalne normalne napetosti. Vse kar moramo narediti pri iskanju ekstremalne relativne spremembe dolžin je, da uporabimo rezultate ekstremalnih lastnosti napetostnega tenzorja in tam dobljene rezultate ustrezno prevedemo na deformacijo. Potemtakem velja:

- V smeri  $\vec{e} = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}$  je relativna sprememba dolžine enaka

$$\epsilon = \frac{1}{2}(e_{11} + e_{22}) + \frac{1}{2}(e_{11} - e_{22}) \cos 2\varphi + e_{12} \sin 2\varphi. \quad (1)$$

- Maksimalna relativna sprememba dolžine je

$$\epsilon_{\max} = \frac{1}{2} \left( e_{11} + e_{22} + \sqrt{(e_{11} - e_{22})^2 + 4e_{12}^2} \right)$$

in nastopi v smeri  $\vec{e} = \cos \varphi_{\max} \vec{i} + \sin \varphi_{\max} \vec{j}$ , kjer je

$$\varphi_{\max} = \frac{1}{2} \arctan \frac{2e_{12}}{e_{11} - e_{22}} + \begin{cases} 0 & e_{11} \geq e_{22} \\ \pi/2 & e_{11} < e_{22}. \end{cases} \quad (2)$$

Tu so  $e_{ij}$  komponente deformacijskega tenzorja  $\underline{\underline{\epsilon}}$  v bazi  $\vec{i}, \vec{j}$ .

- Minimalna relativna sprememba dolžine je

$$\epsilon_{\min} = \frac{1}{2} \left( e_{11} + e_{22} - \sqrt{(e_{11} - e_{22})^2 + 4e_{12}^2} \right).$$

Minimalna relativna sprememba dolžine nastopi v smeri  $\varphi_{\min} = \varphi_{\max} + \frac{1}{2}\pi$ .

Poglejmo še, kako je z ekstremalno spremembo kotov. Vemo, da izvendiagonalni element matričnega zapisa deformacijskega tenzorja predstavlja polovico spremembe kota med koordinatnima osema v smeri  $\vec{i}$  in  $\vec{j}$ . Prav tako poznamo pomen izvendiagonalnega elementa napetostnega tenzorja ravninskega napetostnega stanja, je natanko komponenta strižne napetosti. Potemtakem velja:

- Sprememba kota med pravokotnima vektorjema  $\vec{e} = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}$  in  $\vec{f} = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}$  je enaka

$$\gamma = -(e_{11} - e_{22}) \sin 2\varphi + 2e_{12} \cos 2\varphi.$$

- Maksimalna sprememba kota je

$$\gamma_{\max} = \sqrt{(e_{11} - e_{22})^2 + 4e_{12}^2} = \epsilon_{\max} - \epsilon_{\min},$$

minimalna pa

$$\gamma_{\min} = -\sqrt{(e_{11} - e_{22})^2 + 4e_{12}^2}.$$

- Smeri ekstremalne spremembe kota oklepata kot  $\pi/4$  s smerema ekstremalne spremembe relativnih dolžin.
- Ugotoviti moramo še, v kateri smeri je sprememba največja in v kateri najmanjša. Če zapišemo  $\varphi = \theta - \pi/4$  potem je

$$\gamma = (e_{11} - e_{22}) \sin 2\theta + 2e_{12} \cos 2\theta.$$

Dobili smo izraz, ki je enak bistvenemu delu v (1). Maksimum je torej dosežen pri  $\theta_{\max}$ , ki je dan z (2). Potemtakem nastopi maksimalna sprememba kota pri

$$\varphi_{\max} = \theta_{\max} - \pi/4 = \frac{1}{2} \left( \arctan \frac{2e_{12}}{e_{11} - e_{22}} - \frac{\pi}{2} \right) + \begin{cases} 0 & e_{11} \geq e_{22} \\ \pi/2 & e_{11} < e_{22}. \end{cases} \quad (3)$$

Dobljeno formulo lahko še preoblikujemo. Vemo, da je

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}.$$

Potem je  $\alpha - \beta = \pi/2$ , če je  $\tan \beta = -1/\tan \alpha$  oziroma  $\beta = -\arctan(1/\tan \alpha) + k\pi$ , kjer lahko  $k$  omejimo na  $k \in \{-1, 0\}$ . Potem je  $\alpha - \pi/2 = -\arctan(1/\tan \alpha) + k\pi$ . V našem primeru, ko je

$$\alpha = \arctan \frac{2e_{12}}{e_{11} - e_{22}}$$

sledi

$$\arctan \frac{2e_{12}}{e_{11} - e_{22}} - \frac{\pi}{2} = -\arctan \left( \tan \left( \arctan \frac{2e_{12}}{e_{11} - e_{22}} \right) \right)^{-1} + k\pi = \arctan \frac{e_{22} - e_{11}}{2e_{12}} + k\pi.$$

Določiti moramo še  $k \in \mathbb{N}$ . Če imata  $e_{12}$  in  $e_{11} - e_{22}$  enak predznak, leži leva stran zgornje enakosti na intervalu  $(-\frac{1}{2}\pi, 0)$ . Desna stran leži na tem intervalu za  $k = 0$ . Če imata različni predzank, leži leva stran na intervalu  $(-\pi, -\frac{1}{2}\pi)$ . Za enakost mora potem veljati  $k = -1$ . Primer  $e_{12} = 0$  obravnavamo posebej. Če je  $e_{12} = 0$  in  $e_{22} > e_{11}$ , je  $k = -1$ , pri  $e_{22} < e_{11}$  pa  $k = 0$ . Tako lahko (3) prepišemo v

$$\varphi_{\max} = \frac{1}{2} \arctan \frac{e_{22} - e_{11}}{2e_{12}} + \frac{\pi}{2} \begin{cases} 0; & e_{11} \geq e_{22} \\ 1; & e_{11} < e_{22} \end{cases} - \frac{\pi}{2} \begin{cases} 0; & 2e_{12}/(e_{11} - e_{22}) > 0 \\ 0; & e_{12} = 0 \text{ in } e_{11} > e_{22} \\ 1; & 2e_{12}/(e_{11} - e_{22}) \leq 0 \\ 1; & e_{12} = 0 \text{ in } e_{11} < e_{22} \end{cases}. \quad (4)$$

Minimalna sprememba nastopi v smeri

$$\varphi_{\min} = \varphi_{\max} + \frac{\pi}{2}.$$

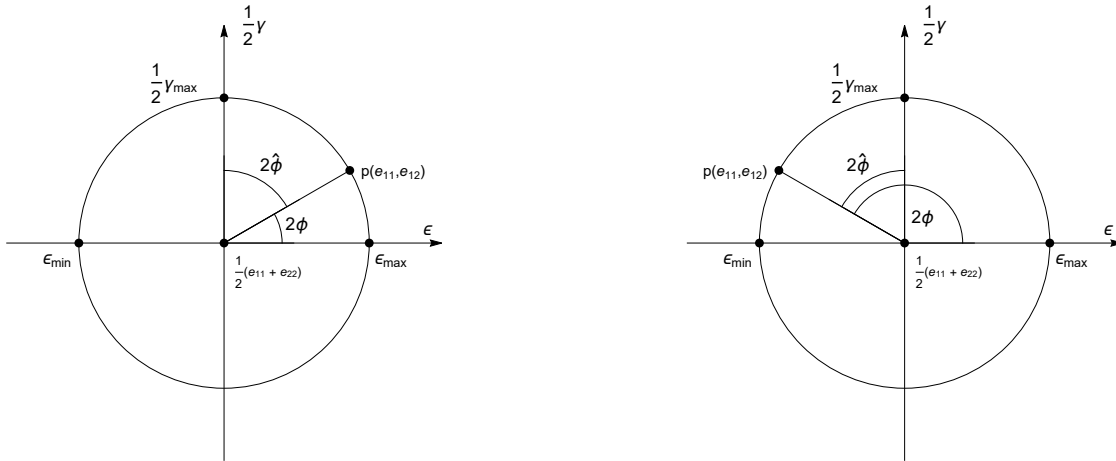
Podobno kot smo ekstremalne lastnosti napetostnega tenzorja upodobili z Mohrovo krožnico, ekstremalne lastnosti deformacije upodobimo z Mohrovo krožnico. Poglejmo to na primeru.

### Primer

Naredili bomo primere za vse možnosti, ki nastopajo v (4). Začnimo s primerom  $e_{11} > e_{22}$  in  $e_{12} > 0$ . Naj bo

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}\epsilon_0 \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix},$$

kjer je  $\epsilon_0$  pozitivna konstanta, ki zagotavlja, da matrika  $\mathbf{e}$  res pripada infinitezimalno majhni deformaciji. Ker je sled deformacijskega tenzorja enaka nč je to strižna deformacija. Po formulah za ekstremalno relativno spremembo relativnih dolžin hitro dobimo  $\epsilon_{\min} = -1$  in  $\epsilon_{\max} = 1$ . Smer maksimalne deformacije je  $\varphi_{\max} = \pi/12$ , smer maksimalne spremembe kota pa  $\hat{\varphi}_{\max} = -\pi/6$ . Mohrova krožnica za ta primer je leva slika na sliki 1. Pozitivni predznak kota pomeni, da maksimalno smer iščemo v smeri urinega kazalca, negativni pa v obratni smeri.



Slika 1: Mohrove krožnice, primer  $e_{12} > 0$ . Levo  $e_{11} > e_{22}$ , desno  $e_{11} < e_{22}$ .

Naslednji je primer  $e_{11} < e_{22}$  in  $e_{12} > 0$ , kjer je

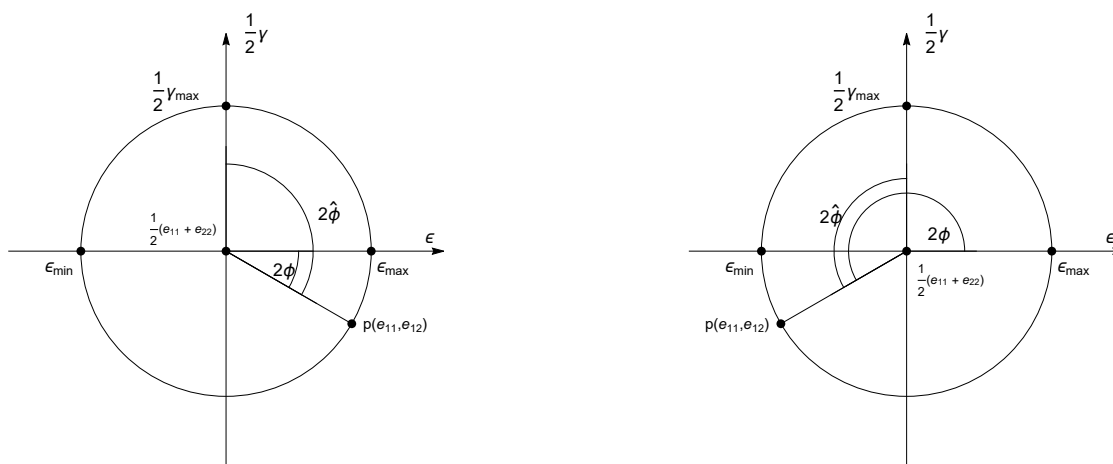
$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}\epsilon_0 \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Ekstremalne vrednosti so enake, smeri pa sta  $\varphi_{\max} = 5\pi/12$  in  $\hat{\varphi}_{\max} = \pi/6$ . Vidimo, da sta sedaj oba kota pozitivna.

Poglejmo še primera z negativnim izvendiagonalnim elementom, glej sliko 2.

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}\epsilon_0 \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ -1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e} = \frac{1}{2}\epsilon_0 \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & -1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Za  $e_{11} > e_{22}$  sta kota  $\varphi_{\max} = -\pi/12$  in  $\hat{\varphi}_{\max} = -\pi/3$ . V primeru  $e_{11} < e_{22}$  pa je  $\varphi_{\max} = 7\pi/12$  in  $\hat{\varphi}_{\max} = \pi/3$ .



Slika 2: Mohrove krožnice, primer  $e_{12} < 0$ . Levo  $e_{11} > e_{22}$ , desno  $e_{11} < e_{22}$ .

## Posplošen Hookov zakon

Pri enoosni deformaciji je linearna zveza med napetostjo  $\sigma$  in deformacijo  $\epsilon$  dana s Hookovim zakonom  $\sigma = E\epsilon$ . V primeru prostorske deformacije in napetostnega stanja sta deformacija in napetost tenzorja. Njuni linearni zvezi pravimo *posplošen Hookov zakon*. Podobno kot pri enoosni deformaciji posplošen Hookov zakon velja samo za majhne deformacije, ko so elementi deformacijskega tenzorja po absolutni vrednosti manjši od 0.005. V danem koordinatnem sistemu v katerem pripadata deformaciji in napetosti matriki s komponentami  $t_{ij}$  in  $e_{kl}$ ,  $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$  linerano zvezo med napetostjo in deformacijo izrazimo z

$$t_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 C_{ijkl} e_{kl} = C_{ijkl} e_{kl}. \quad (5)$$

V zadnji enakosti smo uporabili zapis, ki mu pravimo *sumacijski dogovor*. Ta pravi, da indekse simbolov, ki se dvakrat ponovijo smatramo za tekoče indekse in jih seštejemo po njihovih vrednostih. Po tem dogovoru smo v zadnji enakosti v (5) izpustili znak za vsoto po indeksih  $k$  in  $l$  po vrednostih od 1 do 3. Primer uporabe sumacijskega dogovora, pravimo mu tudi sumacijska konvencija, je sled tenzorja. Vsoto diagonalnih elementov tenzorja s komponentami  $e_{ij}$  po tem dogovoru zapišemo z sl  $\underline{e} = e_{ii}$ . Sumacijski dogovor bomo uporabljali le občasno, posebej tam, kjer bomo z njim želeli poenostaviti izgled formule.

Zveza (5) pravi, da je vsaka komponenta napetostnega tenzorja  $t_{ij}$  linearno odvisna od komponent deformacijskega tenzorja. Koeficienti  $C_{ijkl}$  so konstantni, če je material homogen, in so funkcije položaja, če je material heterogen. V okviru predmeta se bomo posvetili predvsem homogenim materialom. Koeficientom  $C_{ijkl}$  pravimo elastični koeficienti. Ti koeficienti so dejansko komponente elastičnega tenzorja. Ker ima ta tenzor štiri komponente, je to tenzor četrtega reda. Pravimo mu elastični tenzor in ga ozančujemo s  $\underline{\underline{C}}$ . Tenzorski zapis posplošenega Hookovega zakona je tako

$$\underline{\underline{t}} = \underline{\underline{C}} : \underline{e}.$$

Operacija označena z dvopičjem pomeni natanko to kar je zapisano po komponentah v (5). Tej operaciji pravimo *dvojna kontrakcija*.

Zveza (5) priredi deformaciji napetost. Če je ta zveza linearna, je linearna tudi zveza, ki napetosti priredi deformacijo

$$e_{ij} = S_{ijkl} t_{kl}.$$

Tu smo uporabili sumacijsko konvencijo. Pripadajoči tenzorski zapis je

$$\underline{\underline{e}} = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{t}}.$$

Tenzorju  $\underline{\underline{S}}$  pravimo podajnsotni tenzor. Očitno je sta si elastični in podajnostni tenzor med seboj inverzna.

Ker je  $\underline{\underline{C}}$  tenzor četrtega reda in ker indeksi tečejo od 1 do 3 sklepamo, da ima elastični tenzor  $3^4 = 81$  komponent  $C_{ijkl}$ . Hitro pa lahko ugotovimo, da vse te komponente niso med seboj neodvisne. Tenzorja napetosti in elastičnosti sta simetrična tenzorja, velja  $t_{ij} = t_{ji}$  in  $e_{ij} = e_{ji}$ . Potem in (5) sledi, da velja

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk}.$$

Pravimo, da je elastičen tenzor simetričen v prvem in drugem paru indeksov. Prav tako je podajnostni tenzor simetričen v prvem in drugem paru indeksov. Poleg te simetrije, ki ji prvimo tudi *mala simetrija* imata tako elastični in podajnostni tenzor še glavno simetrijo

$$C_{ijkl} = C_{klij}, \quad S_{ijkl} = S_{klij}.$$

tenzorjem z obema simetrijama pravimo simetrična tenzorja. Elastični in podajnostni tenzor sta tako simetrična tenzorja četrtega reda.

Glavna simetrija elastičnega tenzorja je posledica elastičnosti. Elastičnost dejansko pomeni, da je delo, ki ga opravijo površinske sile na del telesa pri deformaciji v zaprtem krogu od nedeformiranega položaja do deformiranega in nazaj v prvotni nedeformiran položaj enako nič. Gostota površinske sile, to je napetostni tenzor, je funkcija deformacije. In če je delo v zaprtem krogu enako nič, obstaja funkcija  $U = U(\underline{\underline{e}})$ , ki ji pravimo gostota elastična energija, tako da je

$$t_{ij} = \frac{\partial U}{\partial e_{ij}} \quad (6)$$

oziroma v tenzorskem zapisu

$$\underline{\underline{t}} = \frac{\partial U}{\partial \underline{\underline{e}}}.$$

V posebnem primeru enoosnega napetostno/deformacijskega stanja je  $\sigma = E\epsilon$  in  $U = \frac{1}{2}E\epsilon^2$ . Iz zveze (5) in (6) potem vidimo, da je

$$C_{ijkl} = \frac{\partial t_{ij}}{\partial e_{kl}} = \frac{\partial}{\partial e_{kl}} \frac{\partial U}{\partial e_{ij}} = \frac{\partial^2 U}{\partial e_{ij} \partial e_{kl}}.$$

Tu smo v zadnji enakosti uporabili simbol za dvakratno parcialno odvajanje. Iz matematike je znano, da vrstni red zaporednih parcialnih odvodov gladkih funkcij ni pomemben. Velja torej

$$\frac{\partial^2 U}{\partial e_{ij} \partial e_{kl}} = \frac{\partial^2 U}{\partial e_{kl} \partial e_{ij}},$$

od tod pa že vidimo, da je  $C_{ijkl} = C_{klij}$ .

Preštejmo sedaj število neodvisnih komponent elastičnega tenzorja. Iz male simetrije sledi, da je neodvisnih samo 6 parov prvih in 6 parov drugih indeksov. To pomeni, da ima zaradi male simetrije elastični tenzor  $6 \times 6 = 36$  neodvisnih komponent. Po glavni simetriji pa lahko zamenjamo vrstni red obeh parov. Hitro vidimo, da je vseh neodvisnih parov 21. Elastični in podajnostni tenzor imata tako 21 neodvisnih komponent.

## Voigtov zapis

Voigtov zapis je zapis posplošenega Hookovega zakona z matriko reda  $6 \times 6$ . Ta zapis sledi že iz male simetrije elastičnega ali podajnostnega tenzorja. Matriki napetostnega tenzorja  $\mathbf{t}$  priredimo stolpec neodvisnih komponent

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{12} & t_{22} & t_{23} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{22} \\ t_{33} \\ t_{23} \\ t_{13} \\ t_{12} \end{bmatrix} = T,$$

matriki deformacijskega  $\mathbf{e}$  tenzorja pa stolpec

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{12} & e_{22} & e_{23} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2e_{23} \\ 2e_{13} \\ 2e_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = E.$$

Pri prevedbi deformacije v stolpec smo uporabili inženirski zapis, ki se v inženirski literaturi večinoma uporablja. Slaba stran te uporabe je, da predpisa kako napetostnemu in deformacijskemu tenzorju priredimo stolpec nista enaka. Ta razlika potem poruši simetrijo med elastičnim in podajnostnim tenzorjem v Voigtovem zapisu.

S stolpcema  $T$  in  $E$  posplošen Hookov zakon zapišemo v obliki  $T = \mathbf{C}E$ , kje je  $\mathbf{C}$  matrika dimenzije  $6 \times 6$ . Zaradi glavne simetrije je ta matrika simetrična. Posplošen Hookov zakon v Voigtovem zapisu je tako

$$\begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{22} \\ t_{33} \\ t_{23} \\ t_{13} \\ t_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2e_{23} \\ 2e_{13} \\ 2e_{12} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Splošne zveze med komponentami elastičnega tenzorja  $C_{ijkl}$  in elementi matrike  $c_{ij}$  ne bomo navajali. S primerjavo zapisov hitro vidimo naprimer, da je  $c_{11} = C_{1111}$ ,  $c_{12} = C_{1122}$  in  $c_{16} = C_{1112}$  in tako naprej. Pri zadnji enakosti nam prav pride, da ima v stolpcu  $E$  komponenta  $e_{12}$  faktor 2. Pripadajoči Voigtov zapis za podajnostni tenzor je

$$\begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2e_{23} \\ 2e_{13} \\ 2e_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & s_{34} & s_{35} & s_{36} \\ s_{14} & s_{24} & s_{34} & s_{44} & s_{45} & s_{46} \\ s_{15} & s_{25} & s_{35} & s_{45} & s_{55} & s_{56} \\ s_{16} & s_{26} & s_{36} & s_{46} & s_{56} & s_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{22} \\ t_{33} \\ t_{23} \\ t_{13} \\ t_{12} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Posplošen Hookov zakon je ima 21 materialnih parametrov. To je veliko število in teoretični model s tako velikim številom parametrov ni kaj prida. Kmalu pa bomo videli, da lahko pogostokrat Hookov zakon zapišemo z bistveno manjšim številom parametrov, v idealnem primeru samo z dvema.

## Simetrije elastičnega tenzorja

Kot že dobro vemo, je komponentni zapis tenzorja odvisen od izbire koordinatnega sistema. Če se Hookov zakon v koordinatnem sistemu z baznimi vektorji  $\vec{i}, \vec{j}$  in  $\vec{k}$  glasi

$$t_{ij} = C_{ijkl}e_{kl},$$

se v koordinatnem sistemu z baznimi vektorji  $\vec{i}', \vec{j}'$  in  $\vec{k}'$  glasi

$$t'_{ij} = C'_{ijkl}e'_{kl}.$$

### Monoklinična simetrija

Privzemimo, da novo bazo dobimo iz prvotne z zrcaljenjem preko ravnine  $xy$ . To pomeni, da je  $\vec{i}' = \vec{i}, \vec{j}' = \vec{j}$  in  $\vec{k}' = -\vec{k}$ . V novi bazi se Hookov zakon glasi  $t'_{ij} = C'_{ijkl}e'_{kl}$ . V primeru, ko je  $C'_{ijkl} = C_{ijkl}$ , torej v primeru, ko ima elastični tenzor v tej novi bazi enake komponente kot v prvotni bazi, pravimo, da je elastičen tenzor invarianten za to zrcaljenje oziroma, da ima zrcalno simetrijo. Materialom, ki imajo eno zrcalno simetrijo pravimo *monoklinični materiali*. Poglejmo kaj ta simetrija pomeni za komponente elastičnega tenzorja.

Pišimo  $\vec{e}_1 = \vec{i}, \vec{e}_2 = \vec{j}$  in  $\vec{e}_3 = \vec{k}$  ter podobno za  $\vec{e}'_1 = \vec{i}', \vec{e}'_2 = \vec{j}'$  in  $\vec{e}'_3 = \vec{k}'$ . Vemo, da je

$$t'_{ij} = \vec{e}'_i \cdot \mathbf{t} \vec{e}'_j,$$

kjer je  $\mathbf{t}$  matrika komponent, ki pripadajo tenzorju napetosti  $\underline{t}$  v bazi  $\vec{e}_i$ . Iz zgornjega zapisa hitro vidimo, da se spremenijo samo komponente  $t_{ij}$ , kjer je samo eden od indeksov enak 3, drugi pa različen od 3. Potem je

$$t'_{13} = -t_{13} \quad \text{in} \quad t'_{23} = -t_{23},$$

vse ostale komponente pa so nespremenjene. Na prav enak način ugotovimo, da je

$$e'_{13} = -e_{13}, \quad e'_{23} = -e_{23} \quad \text{in} \quad e'_{11} = e_{11}, \quad e'_{22} = e_{22}, \quad e'_{33} = e_{33}, \quad e'_{12} = e_{12}.$$

Zapišimo sedaj Hookov zakon za  $t_{11}$  v stari in novi bazi

$$t_{11} = c_{11}e_{11} + c_{12}e_{22} + c_{13}e_{33} + 2c_{14}e_{23} + 2c_{15}e_{13} + 2c_{16}e_{12}, \quad (9)$$

in

$$\begin{aligned} t'_{11} &= t_{11} = c_{11}e'_{11} + c_{12}e'_{22} + c_{13}e'_{33} + 2c_{14}e'_{23} + 2c_{15}e'_{13} + 2c_{16}e'_{12} \\ &= c_{11}e_{11} + c_{12}e_{22} + c_{13}e_{33} - 2c_{14}e_{23} - 2c_{15}e_{13} + 2c_{16}e_{12}. \end{aligned} \quad (10)$$

Odštejmo (10) od (9). Tako dobimo

$$0 = 4c_{14}e_{23} + 4c_{15}e_{13}.$$

Ker mora ta enakost veljati za poljubno deformacijo, naprimer za strižni deformaciji v ravnini  $yz$  in  $xz$ , sledi, da je

$$c_{14} = c_{15} = 0. \quad (11)$$

Na podoben način pokažemo še, da je

$$c_{24} = c_{25} = c_{34} = c_{35} = c_{46} = c_{56} = 0. \quad (12)$$

Poglejmo še komponenti  $t_{23}$  in  $t_{13}$ . Pri tem upoštevajmo (11) in (12). Velja

$$t_{23} = c_{14}e_{11} + c_{24}e_{22} + c_{34}e_{33} + 2c_{44}e_{23} + 2c_{45}e_{13} + 2c_{46}e_{12} = 2c_{44}e_{23} + 2c_{45}e_{13}, \quad (13)$$

in

$$\begin{aligned} t'_{23} &= -t_{23} = c_{14}e'_{11} + c_{24}e'_{22} + c_{34}e'_{33} + 2c_{44}e'_{23} + 2c_{45}e'_{13} + 2c_{46}e'_{12} \\ &= c_{14}e_{11} + c_{24}e_{22} + c_{34}e_{33} - 2c_{44}e_{23} - 2c_{45}e_{13} + 2c_{46}e_{12} = -2c_{44}e_{23} - 2c_{45}e_{13}. \end{aligned} \quad (14)$$

Vidimo, da sta enačbi (13) in (14) ekvivalentni in zato ne prinašata novega pogoja.

Za monoklinični material v koordinatnem sistemu, kjer je ravnina  $xy$  ravnina zrcalne simetrije veljajo za komponente enačbe (11) in (12). Pripadajoča matrika v Voigtovem zapisu je

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{45} & c_{55} & 0 \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}.$$

Monoklinični material ima 13 neodvisnih parametrov.

## Ortotropična simetrija

Material je ortotropičen, če ima dve med seboj pravokotni ravnini zrcalne simetrije. Naj bosta to ravnini  $xy$  in  $xz$ . Na podoben način kot prej sedaj sledi, da je poleg (11) in (12) tudi

$$c_{16} = c_{26} = c_{36} = c_{45} = 0.$$

Elastični tenzor ortotropičnega material v Voigtovem zapisu je potem oblike

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Velja poudariti, da je v zgornjem zapisu koordinatni sistem usklajen z ortotropično simetrijo. V poljubnem koordinatnem sistemu je matrika elastičnega tenzorja ortotropičnega materiala praviloma polna matrika brez ničel. Določitev koordinatnega sistema, ki je usklajen z ortotropično simetrijo računsko ni trivialen. Pomembna lastnost ortotropičnega materiala je, da osna deformacija v smeri normale na ravnino zrcalne simetrije povzroči samo normalno napetost, strižna deformacija v ravnini zrcalne simetrije pa samo strižno napetost v tej ravnini. To vidimo iz (7). Obstoj treh takih med seboj pravokotnih ravnin zagotavlja, da ima material ortotropično simetrijo.

Ortotropični material ima 9 neodvisnih parametrov. Opazimo, da ima matrika  $\mathbf{C}$  enako obliko, če je material zrcalnih simetričen glede na ravnini  $xy$  in  $yz$  namesto glede na  $xy$  in  $xz$ . Dodatna ravnina zrcalne simetrije ne zmanjša števila parametrov. Pomembem primer materiala z ortotropično simetrijo je les, njegove mehanske lastnosti so bistveno odvisne od smeri. V smeri celuloznih vlaken, ki lesu dajajo trdnost je les precej bolj tog kot v prečni smeri. To smo spoznali že v tabeli Youngovih modulov.

Podajnostni tenzor ima enako simetrijo kot elastični tenzor. Podajnostni tenzor za ortotropični material v Voigtovem zapisu zapišemo v obliki

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_2 & -\nu_{13}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{21}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{23}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{31}/E_1 & -\nu_{32}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\mu_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\mu_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\mu_{12} \end{bmatrix}.$$



Številom  $E_i$  pravimo Youngovi moduli,  $\nu_{ij}$  Poissonovi količniki,  $\mu_{ij}$  pa strižni moduli. Indeksi  $i$  in  $j$  tečejo po množici  $\{1, 2, 3\}$ . Za Poissonove količnike veljajo zveze

$$\frac{\nu_{12}}{E_2} = \frac{\nu_{21}}{E_1}, \quad \frac{\nu_{13}}{E_3} = \frac{\nu_{31}}{E_1}, \quad \frac{\nu_{23}}{E_3} = \frac{\nu_{32}}{E_2}.$$

Neodvisni parametri so tako  $E_1, E_2, E_3, \nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}, \mu_{12}, \mu_{13}$  in  $\mu_{23}$ . Njihov pomen razberemo iz enoosnega in strižnega testa.

Izračunajmo deformacijo, ki jo povzroči enoosno napetostno stanje v smeri osi  $x$ . Po formuli (8) je

$$\begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2e_{23} \\ 2e_{13} \\ 2e_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_2 & -\nu_{13}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{21}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{23}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{31}/E_1 & -\nu_{32}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\mu_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\mu_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\mu_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Potem je

$$e_{11} = \frac{\sigma}{E_1}, \quad e_{22} = -\frac{\nu_{21}}{E_1}\sigma, \quad e_{33} = -\frac{\nu_{31}}{E_1}\sigma. \quad (16)$$

Vidimo, da je  $E_1$  Youngov modul v smeri osi  $x$ ,  $E_2$  v smeri osi  $y$  in  $E_3$  v smeri  $z$ . Kvocienta osnih deformacij (16) sta

$$\frac{e_{22}}{e_{11}} = -\nu_{21} \quad \text{in} \quad \frac{e_{33}}{e_{11}} = -\nu_{31}.$$

Poissonov količnik torej pove kolikšna je relativna sprememba dolžine v lateralni smeri glede na osno deformacijo. Pri raztegu v osni smeri se material praviloma skrči v lateralni smeri, pri skrčitvi v osni smeri pa raztegne v lateralni smeri. Zato je Poissonov količnik praviloma pozitiven. Obstajajo pa posebni materiali, pravimo jim *auksetini materiali*, ki se obnašajo ravno nasprotno in imajo tako negativni Poissonov količnik. Dopustne vrednosti Poissonovega količnika bomo spoznali kasneje.

Poglejmo kakšno deformacijo povzroči strižno napetostno stanje. Naj bo edina neničelna komponenta napetostnega tenzorja komponenta  $t_{12}$ . Potem po (8) sledi

$$2e_{12} = \frac{1}{\mu_{12}}t_{12} \Rightarrow t_{12} = 2\mu_{12}e_{12}.$$

Strižni modul torej povezuje z zgornjo enačbo strižno napetost in strižno deformacijo. V principu lahko tako materialne parametre ortotropičnega materiala določimo s tremi osnimi in tremi strižnimi preizkusi.

## Kubična simetrija

Poleg zrcalne simetrije obstajajo tudi rotacijske simetrije. Primer je kubična simetrija. Naj za komponente elastičnega tenzorja v danem koordinatnem sistemu velja, da se ne spremenijo, če zasukamo koordinatni sistem okrog poljubne koordinatne osi za večkratnik pravega kota. Konkretno, če zavrtimo koordinatni sistem z baznimi vektorji  $\vec{i}, \vec{j}$  in  $\vec{k}$  okrog osi  $\vec{k}$  za kot  $\pi$ , je nova baza  $\vec{i}' = -\vec{i}, \vec{j}' = -\vec{j}$  in  $\vec{k}' = \vec{k}$ . Podobne relacije veljajo za ostale rotacije za polni kot okrog  $\vec{j}$  in  $\vec{i}$ . Hitro lahko vidimo, podobno kot pri ortotropičnem materialu, da ima elastični tenzor materiala s kubično simetrijo enako obliko kot ortotropičen material. Velja pa še več. Ortotropičen material ima 9 neodvisnih parametrov, kubični pa samo tri, saj morajo biti njegove komponente invariantne tudi za rotacije za pravi kot.

Pri rotaciji za pravi kot okrog osi  $\vec{k}$  je nova baza oblike  $\vec{i}' = \vec{j}$ ,  $\vec{j}' = -\vec{i}$  in  $\vec{k}' = \vec{k}$ . Poglejmo kaj to pomeni za komponente napetostnega in deformacijskega tenzorja. Izračunajmo

$$\begin{aligned}
t'_{11} &= \vec{i}' \cdot \mathbf{t} \vec{i}' = \vec{j} \cdot \mathbf{t} \vec{j} = t_{22}, \\
t'_{22} &= \vec{j}' \cdot \mathbf{t} \vec{j}' = -\vec{i} \cdot \mathbf{t} (-\vec{i}) = t_{11}, \\
t'_{33} &= \vec{k}' \cdot \mathbf{t} \vec{k}' = \vec{k} \cdot \mathbf{t} \vec{k} = t_{33}, \\
t'_{23} &= \vec{j}' \cdot \mathbf{t} \vec{k}' = -\vec{i} \cdot \mathbf{t} \vec{k} = -t_{13}, \\
t'_{13} &= \vec{i}' \cdot \mathbf{t} \vec{k}' = \vec{j} \cdot \mathbf{t} \vec{k} = t_{23}, \\
t'_{12} &= \vec{i}' \cdot \mathbf{t} \vec{j}' = \vec{j} \cdot \mathbf{t} (-\vec{i}) = -t_{21} = -t_{12}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Podobne formule veljajo za komponente deformacijskega tenzorja.

Sedaj izračunajmo  $T = \mathbf{C} E$

$$\begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{22} \\ t_{33} \\ t_{23} \\ t_{13} \\ t_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2e_{23} \\ 2e_{13} \\ 2e_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}e_{11} + c_{12}e_{22} + c_{13}e_{33} \\ c_{12}e_{11} + c_{22}e_{22} + c_{23}e_{33} \\ c_{13}e_{11} + c_{23}e_{22} + c_{33}e_{33} \\ 2c_{44}e_{23} \\ 2c_{55}e_{13} \\ 2c_{66}e_{12} \end{bmatrix} \tag{18}$$

in  $T' = \mathbf{C}' E' = \mathbf{C} E'$ , ki je dan z

$$\begin{bmatrix} t'_{11} \\ t'_{22} \\ t'_{33} \\ t'_{23} \\ t'_{13} \\ t'_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e'_{11} \\ e'_{22} \\ e'_{33} \\ 2e'_{23} \\ 2e'_{13} \\ 2e'_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}e'_{11} + c_{12}e'_{22} + c_{13}e'_{33} \\ c_{12}e'_{11} + c_{22}e'_{22} + c_{23}e'_{33} \\ c_{13}e'_{11} + c_{23}e'_{22} + c_{33}e'_{33} \\ 2c_{44}e'_{23} \\ 2c_{55}e'_{13} \\ 2c_{66}e'_{12} \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Uporabimo v (19) transformacijske formule (17) za  $t'_{ij}$  in  $e'_{ij}$ . Tako dobimo

$$\begin{bmatrix} t_{22} \\ t_{11} \\ t_{33} \\ -t_{13} \\ t_{23} \\ -t_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}e_{22} + c_{12}e_{11} + c_{13}e_{33} \\ c_{12}e_{22} + c_{22}e_{11} + c_{23}e_{33} \\ c_{13}e_{22} + c_{23}e_{11} + c_{33}e_{33} \\ -2c_{44}e_{13} \\ 2c_{55}e_{23} \\ -2c_{66}e_{12} \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Sedaj primerjajmo (18) in (20). Primerjavo zapišemo s sistemom enačb

$$\begin{aligned}
c_{11}e_{11} + c_{12}e_{22} + c_{13}e_{33} &= c_{12}e_{22} + c_{22}e_{11} + c_{23}e_{33} \\
c_{12}e_{11} + c_{22}e_{22} + c_{23}e_{33} &= c_{11}e_{22} + c_{12}e_{11} + c_{13}e_{33} \\
c_{13}e_{11} + c_{23}e_{22} + c_{33}e_{33} &= c_{13}e_{22} + c_{23}e_{11} + c_{33}e_{33} \\
2c_{44}e_{23} &= 2c_{55}e_{23} \\
2c_{55}e_{13} &= 2c_{44}e_{13} \\
2c_{66}e_{12} &= 2c_{66}e_{12}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Rešitev sistema (21) za poljubno deformacijo je

$$c_{11} = c_{22}, \quad c_{44} = c_{55} \quad \text{in} \quad c_{13} = c_{23}.$$

Upoštevajmo še, da so za material s kubično simetrijo komponente elastičnega tenzorja invariantne za rotacije za pravi kot tudi okrog osi  $\vec{j}$  in  $\vec{i}$ . Iz vseh rotacijskih simetrij potem sledi

$$c_{11} = c_{22} = c_{33}, \quad c_{44} = c_{55} = c_{66} \quad \text{in} \quad c_{13} = c_{23} = c_{12}.$$

Elastični tenzor materiala s kubično simetrijo ima tako samo tri neodvisne parametre, njegov Voigtov zapis pa je

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix}.$$

Za material s kubično simetrijo je Youngov modul enak v vseh treh smereh. Prav tako so enaki strižni moduli in Poissonovi količniki. Ta ugotovitev seveda velja samo v smereh, ki se sovpadajo z rotacijskimi osmi. Neodvisni materialni parametri so tako Youngov modul, Poissonov količnik in strižni modul. Tipični materiali s kubično simetrijo so kovinski materiali.

## Tranzverzalna simetrija

Material ima tranzverzalno simetrijo, če ima eno ravnino zrcalne simetrije in rotacijsko simetrijo za poljubni kot okrog normale na ravnino zrcalne simetrije. Te dve simetriji zagotavljata, da ima elastični tenzor tranzverzalno simetričnega materiala obliko (15). Zaradi dodatne rotacijske simetrije pa vsi ti koeficienti niso neodvisni.

Naj bo ravnina zrcalne simetrije ravnina  $xy$ , os rotacijske simetrije pa os  $\vec{k}$ . Rotacija okrog osi  $\vec{k}$  za kot  $\pi/4$  prevede staro bazo v novo bazo

$$\vec{i}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j}), \quad \vec{j}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i} + \vec{j}), \quad \vec{k}' = \vec{k}.$$

Po krajšem računu, podobnemu kot v (17) dobimo

$$\begin{aligned} t'_{11} &= \vec{i}' \cdot \mathbf{t} \vec{i}' = \frac{1}{2}(t_{11} + 2t_{12} + t_{22}), \\ t'_{22} &= \vec{j}' \cdot \mathbf{t} \vec{j}' = \frac{1}{2}(t_{11} - 2t_{12} + t_{22}), \\ t'_{33} &= \vec{k}' \cdot \mathbf{t} \vec{k}' = t_{33}, \\ t'_{23} &= \vec{j}' \cdot \mathbf{t} \vec{k}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-t_{13} + t_{23}), \\ t'_{13} &= \vec{i}' \cdot \mathbf{t} \vec{k}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(t_{13} + t_{23}), \\ t'_{12} &= \vec{i}' \cdot \mathbf{t} \vec{j}' = \frac{1}{2}(-t_{11} + t_{22}). \end{aligned} \tag{22}$$

Podobne formule veljajo za komponente deformacijskega tenzorja. Potem je po Hookovem zakonu

$$\begin{aligned} t'_{11} &= \frac{1}{2}(t_{11} + 2t_{12} + t_{22}) \\ &= \frac{1}{2}(c_{11}e_{11} + c_{12}e_{22} + c_{13}e_{33}) + 2c_{66}e_{12} + \frac{1}{2}(c_{12}e_{11} + c_{22}e_{22} + c_{23}e_{33}) \\ &= \frac{1}{2}(c_{11} + c_{12})e_{11} + \frac{1}{2}(c_{12} + c_{22})e_{22} + \frac{1}{2}(c_{13} + c_{23})e_{33} + 2c_{66}e_{12} \end{aligned} \tag{23}$$

Po drugi strani pa je

$$\begin{aligned}
t'_{11} &= c_{11}e'_{11} + c_{12}e'_{22} + c_{13}e'_{33} \\
&= \frac{1}{2}c_{11}(e_{11} + 2e_{12} + e_{22}) + \frac{1}{2}c_{12}(e_{11} - 2e_{12} + e_{22}) + c_{13}e_{33} \\
&= \frac{1}{2}(c_{11} + c_{12})e_{11} + \frac{1}{2}(c_{11} + c_{12})e_{22} + c_{13}e_{33} + (c_{11} - c_{12})e_{12}.
\end{aligned} \tag{24}$$

Primerjajmo (23) in (24). Enakosti (23) in (24) hkrati veljata za poljubno deformacijo natanko takrat, ko je

$$c_{11} = c_{22}, \quad c_{13} = c_{23} \quad \text{in} \quad c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}).$$

Poglejmo še, kako je s strižno komponento napetosti. Velja

$$t'_{13} = \frac{1}{\sqrt{2}}(t_{13} + t_{23}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(2c_{55}e_{13} + 2c_{44}e_{23}).$$

Po drugi strani pa je

$$t'_{13} = 2c_{44}e'_{13} = 2c_{44}\frac{1}{\sqrt{2}}(e_{13} + e_{23}).$$

Enakosti sta hkrati zadoščeni za poljubno deformacijo, če je

$$c_{44} = c_{55}.$$

S tem smo dejansko v celoti izkoristili rotacijsko simetrijo za določitev vezi med komponentami elastičnega tenzorja. Izkaže se, da z rotacijo okrog osi  $\vec{k}$  za poljubni kot ne dobimo novih pogojev.

Elastični tenzor tranzverzalno izotropičnega materiala ima tako pet neodvisnih konstant. Splošna oblika elastičnega tenzorja je

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (c_{11} - c_{12})/2 \end{bmatrix}.$$

Vidimo, da lahko strižni modul  $\mu_{12}$  tranzverzalno izotropičnega materiala zapišemo kot funkcijo Youngovega modula  $E_1$  in Poissonovega količnika  $\nu_{12}$ . Materiale z vlaknasto strukturo v fiksni smeri pogostokrat obravnavamo kot tranzverzalno izotropične materiale.

## Izotropija

Material je izotropičen, če je v vse smeri enak. To pomeni, da je tranzverzalno simetričen za poljubno os, oziroma, da je elastičen tenzor invarianten za poljubno rotacijo. Izotropičen tenzor je hkrati kubičen in tranzverzalno simetričen. Potemtakem ima izotropičen material samo dva neodvisna parametra, splošna oblika elastičnega tenzorja pa je

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (c_{11} - c_{12})/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (c_{11} - c_{12})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (c_{11} - c_{12})/2 \end{bmatrix}.$$

Youngov modul v poljubni smeri je enak, enaki so tudi Poissonovi količniki za poljubni par smeri in enaki so tudi strižni moduli. Podajnostni tenzor izotropičnega materiala je

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Tu smo z  $G$  zapisali strižni modul.

Poiščimo še zvezo med strižnim modulom in Youngovim modulom. Ker stolpca napetosti  $T$  in deformacije  $E$  nista po strukturi enaka, matrika  $\mathbf{S}$  ni inverz matrike  $\mathbf{C}$  in tudi zveza  $\frac{1}{G} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{E} + \frac{\nu}{E}\right)$  ne velja. Zvezo  $2e_{12} = s_{66}t_{12}$  prepisimo v  $e_{12} = \frac{1}{4}s_{66}2t_{12}$ . To je po obliki enaka zveza kot  $t_{12} = c_{66}2e_{12}$ . Potem je

$$\frac{1}{4}s_{66} = \frac{1}{4G} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{E} + \frac{\nu}{E}\right) = \frac{1+\nu}{2E}$$

in

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (26)$$

Neodvisna materialna parametra izotropičnega materiala sta tako  $E$  in  $\nu$ .

Pkažimo sedaj, da lahko posplošen Hookov zakon za izotropičen material zapišemo v obliko

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{t}} - \frac{\nu}{E}\text{sl}\underline{\underline{t}}\underline{\underline{i}}. \quad (27)$$

Res, upoštevajmo (25). Velja

$$t_{11} = \frac{1}{E}e_{11} - \frac{\nu}{E}e_{22} - \frac{\nu}{E}e_{33} = \frac{1+\nu}{E}e_{11} - \frac{\nu}{E}(e_{11} + e_{22} + e_{33}) = \frac{1+\nu}{E}e_{11} - \frac{\nu}{E}\text{sl}\underline{\underline{e}}.$$

Dobljena enakost potrjuje valjavnost (27) za  $t_{11}$ . Podobno dokažemo da enakost velja tudi za  $t_{22}$  in  $t_{33}$ . Preverimo veljavnost še za izvendiagonalne elemente. Dovolj je preveriti za  $t_{12}$ . Po (27) je

$$t_{12} = \frac{1+\nu}{E}t_{12},$$

po (25) in (26) pa je

$$2e_{12} = \frac{1}{G}t_{12} = \frac{2(1+\nu)}{E}t_{12},$$

kar se po krajšanju z 2 ujema s predhodno enakostjo. Zveza (27) torej res velja.  $\hat{\underline{\underline{t}}}$

Poiščimo še obratno zvezo, ki dani deformaciji priredi napetost. Prvo poiščimo zvezo med sledema napetostnega in deformacijskega tenzorja. Iz (27) sledi

$$\text{sl}\underline{\underline{e}} = \frac{1+\nu}{E}\text{sl}\underline{\underline{t}} - \frac{\nu}{E}\text{sl}\underline{\underline{t}}\text{sl}\underline{\underline{i}} = \left(\frac{1+\nu}{E} - \frac{3\nu}{E}\right)\text{sl}\underline{\underline{t}} = \frac{1-2\nu}{E}\text{sl}\underline{\underline{t}}. \quad (28)$$

Potem iz (27) dobimo

$$\underline{\underline{t}} = \frac{E}{1+\nu}\left(\underline{\underline{e}} + \frac{\nu}{E}\text{sl}\underline{\underline{t}}\underline{\underline{i}}\right).$$

Upoštevajmo (27). Tako je

$$\underline{\underline{t}} = \frac{E}{1+\nu}\underline{\underline{e}} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\text{sl}\underline{\underline{e}}\underline{\underline{i}}. \quad (29)$$

Dobljeno zvezo pogostokrat prepisemo v obliko

$$\underline{t} = 2\mu \underline{\epsilon} + \lambda \text{sl} \underline{\epsilon} \underline{i}, \quad (30)$$

kjer je

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{in} \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

Koeficientoma  $\mu$  in  $\lambda$  pravimo Laméjeva koeficienta.

Če je napetostno stanje hidrostatično,  $\underline{t} = -p \underline{i}$ , sledi iz (28), da je

$$\text{sl} \underline{\epsilon} = -\frac{3(1-2\nu)p}{E}$$

oziroma

$$p = -\frac{E}{3(1-2\nu)} \text{sl} \underline{\epsilon}.$$

Sled deformacijskega tenzorja je enaka relativni spremembi volumna. Pri enakomerni kompresiji, ko je  $p > 0$ , se volumen zmanjša. To pomeni, da mora biti koeficient

$$\kappa = \frac{E}{3(1-2\nu)},$$

ki mu pravimo *kompresijski modul*, pozitiven. It tega pogoja sledi, da je  $\nu \leq \frac{1}{2}$ . V limiti  $\nu \rightarrow \frac{1}{2}$  mora biti kompresija za spremembo volumna neskončno velika. To pomeni, da vrednost  $\nu = \frac{1}{2}$  ustreza *nestisljivemu* materialu. Ker mora biti tudi strižni modul pozitiven, dobimo iz (26), da je  $\nu > -1$ . Potemtakem je Poissonov količnik omejen z

$$-1 < \nu \leq \frac{1}{2}. \quad (31)$$

Eksperimentalno je Poissonov količnik težko natančno izmeriti, ker so spremembe volumna ali lateralne dimenzije v območju linearne elastičnosti majhne. Tipična vrednost Poissonovega količnika za kovine je približno 0.3.

## Vprašanja in naloge

1. Za funkcijo  $f(x, y) = (x + y)^3$  izračunaj druge odvode  $\partial^2 f / \partial x^2$ ,  $\partial^2 f / \partial x \partial y$  in  $\partial^2 f / \partial y^2$ .
2. Zapiši koeficiente  $c_{1j}$  s komponentami elastičnega tenzorja.
3. Pokaži, da je za monoklinični material  $c_{64} = c_{65} = 0$ .
4. Pokaži, da tretja ravnina zrcalne simetrije ne vpliva ne zmanjša število neodvisnih parametrov monokliničnega materiala.
5. Zapiši elastični tenzor tranzverzalno izotropičnega materiala v koordinatnem sistemu, kjer je matrika elastičnega tenzorja invarianta za rotacije okrog osi  $\vec{i}$ .
6. Dokaži, da velja (27) za  $t_{22}$  in  $t_{33}$ .
7. Poišči vrednosti Poissonovega količnika za nekatere konkretne materiale.